非対称容量制約付き配送路決定問題の解法

石黒　勲（東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻：現所属：花王）　指導教官　西田直矩教授

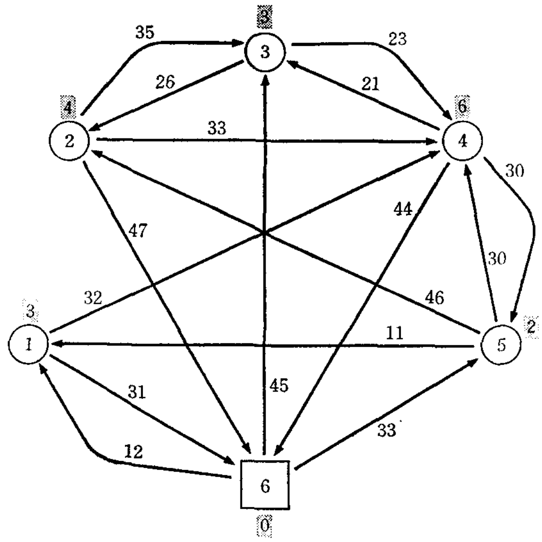
1. はじめに

有向なグラフ$G=(N, A)$が与えられている．ただし，Nは，配送先に対応する点集合N_C（：$=\{1, 2, \ldots, n\}$）とデポ点（$n+1$とする）からなる点集合であり，Aは，各点を結ぶ有向な枝からなる枝集合である．このグラフGの各点i（$\in N$）には，非負の需要w_i（$w_{n+1}=0$）が与えられており，各枝(i, j)（$\in A$）には，非負の費用c_{ij}が付加されている．ここで，積載量D（$\geqq \max w_i$）のビークルが与えられたとき，グラフG上の閉路で，その閉路にデポ点が含まれ，かつ，その閉路に含まれる点の需要の合計がビークルの積載量Dを越えないとき，その閉路を巡回路と呼ぶ．このとき，N_c中の各点が必ずいずれか1つの巡回路に含まれるという条件の下で，与えられたm台以下のビークルを用いたG上の巡回路の集合の中から，巡回にかかる枝の費用の合計が最小のものを求める問題は，容量制約付き配送路決定問題（Capacitated Vehicle Routing Problem: CVRP）と呼ばれる．この問題は，NP困難な問題であることが知られている．この問題の厳密解を求める解法として，分枝限定法を用いたLaporteらの解法[3]がある．この解法は，下界値計算に割当問題を用いているが，あまりよい下界値を得ることができない．

本論文では，CVRPに対する3つの新しい下界値計算法を提案する．さらに，Additive Approach[2]と呼ばれる下界値強化法を利用して，それらの下界値計算法を組合せ，より強い下界値を得る下界値計算法を提案する．この計算法は，Balasら[1]が行なった巡回セールスマン問題に対する下界値強化法と類似のものである．さらに，提案した下界値計算法を基礎とした厳密解法を提案する．

2. 定式化

ビークルの台数mに対して，$m-1$個のコピー点を作成し，デポ点とそのコピー点からなる点集合をN_d（：$=\{n+1, \ldots, n+m\}$）とし，これらの点を点集合N_cに加え，新たに点集合をN'（：$=N_c \cup N_d$）とする．ここで各点i（$\in N'$）に対して，点iがN_cに含まれるならば，W_iをi点の需要とし，点iが，N_dに含まれるならば，$W_i=0$とする．ここで，$A_1=N_d \times N_c$，$A_2=N_d \times N_d$とし，A_1とA_2の枝集合をAに加えそのグラフを$G'=(N', A')$とする．各枝$(i, j) \in A'$に対して，枝(i, j)がAに含まれるならば，その枝の費用c'_{ij}をc_{ij}とする．また，枝(i, j)がA_1に含まれるならば，c'_{ij}をデポ点とi（あるいはj）を結ぶ枝の費用とし，枝(i, j)がA_2に含まれるならば，その費用を0とす

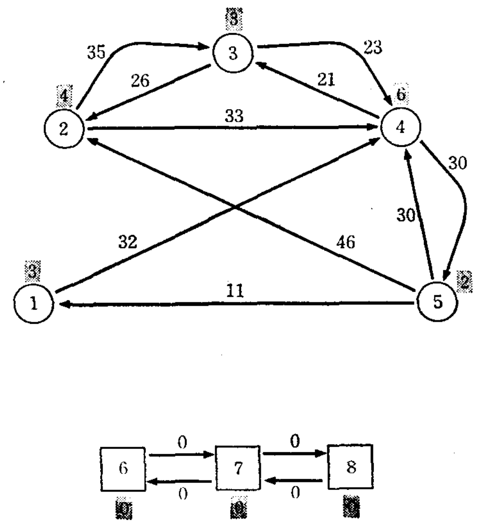


配送先の数：5（$n=5$）
ビークルの台数：3（$m=3$）
積載量：10（$D=10$）
配送先の点集合$N_c=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
デポは点6

枝上の数字は費用を示す．ただし，費用が∞の枝は省略した．またアミ掛けの数字は点の需要を示す．

図1　与えられたグラフG

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．



$m=3$, $D=10$, $N_c=\{1,2,3,4,5\}$, $N_d=\{6,7,8\}$

アミ掛けの数字は，点の需要を示す．

枝上の数字は費用を示す．ただし，費用が∞の枝と，N_d 中の点に接続する枝は省略した．

N_d 中の任意の異なる 2 点を結ぶ枝の費用は 0．

N_d 中の点 i から N_c 中の点への費用

	1	2	3	4	5
i	12	∞	45	∞	33

N_c 中の点から N_d 中の点 j への費用

	j
1	31
2	47
3	∞
4	44
5	∞

図 2 拡張したグラフ

る．また，任意の点集合 S に対して $\delta^+(S)$ を点集合 S に含まれる点から S 以外の点への枝集合とし，$\delta^-(S)$ を S 以外から S への枝集合とする．このとき，このラグフ G' 上で，CVRP は以下のように定式化される [3]．

$$\text{(CVRP)} \ \min \sum_{(i,j)\in A'} c'_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(k)} x_{ij}=1, \ \text{for all } k\in N' \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(k)} x_{ij}=1, \ \text{for all } k\in N' \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij}\geqq V(S), \ \text{for all } S\subseteq N_c,\ |S|\geqq 2 \tag{4}$$

$$x_{ij}：\text{非負整数}, \ \text{for all } (i,\ j)\in A' \tag{5}$$

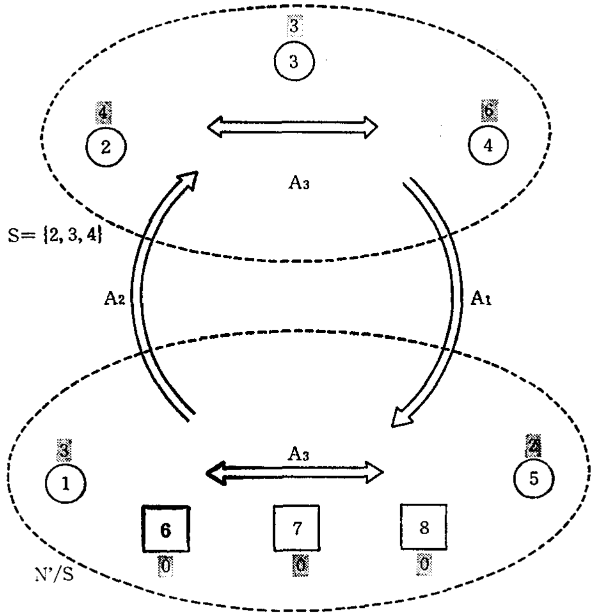


図 3 枝集合の分割

ただし，$V(S)=\lceil \sum_{i\in S} w_i/D \rceil$ である． (6)

ここで制約式(4)を緩和した問題は，割当問題となる．Laporteら[3]は，この緩和問題を下界値計算に用いている．

3. 下界値計算法

3.1 緩和問題 1

ある点集合 S ($\subseteq N_c$, $|S|\geqq 2$) に対して，次の問題 $P_1(S)$ は，CVRP の緩和問題となる．

$$(P_1\ (S)) \ \min \sum_{(i,j)\in A'} c'_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

subject to (5) and

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(k)} x_{ij}\leqq 1, \ \text{for all } k\in N' \tag{7}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(k)} x_{ij}\leqq 1, \ \text{for all } k\in N' \tag{8}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij}\geqq V\ (S) \tag{9}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(S)} x_{ij}\geqq V\ (S) \tag{10}$$

ここで，点集合 S ($\subseteq N_c$, $|S|\geqq 2$) に対して，枝集合 A' を $A_1=\delta^+(S)$, $A_2=\delta^-(S)$, $A_3=A'\backslash(A_1\cup A_2)$ に分割し，それぞれの枝集合に対応する問題を作成すると，これらの問題は簡単に解くことができる．すなわち，枝集合 A_1 からなる問題は，S から $N'\backslash S$ への互いに隣接しない $V(S)$ 本以上の枝集合，枝集合 A_2 からな

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

る問題は $N'\backslash S$ から S への互いに隣接しない $V(S)$ 本以上の枝集合を求める問題に帰着され，最小費用 $V(S)$ 次2部マッチング問題として解くことができる．

3.2 緩和問題 2

ある点集合 S ($\subseteq N_c$, $|S|\geqq 2$) に対して，次の問題 P_2 (S)は，CVRPの緩和問題となる．

$$(P_2\ (S))\qquad \min \sum_{(i,j)\in A'} c'_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

subject to (5), (9), (10) and

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(k)} x_{ij}=1,\ \text{for all } k\in S \tag{11}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(k)} x_{ij}=1,\ \text{for all } k\in S \tag{12}$$

この問題は，ヒッチコック型輸送問題に帰着できる．

3.3 緩和問題 3

ある点集合 S ($\subseteq N_c$, $|S|\geqq 2$) に対して，次の問題 P_3 (S) は，CVRPの緩和問題であり，ヒッチコック型輸送問題となる．

$$(P_3\ (S))\qquad \min \sum_{(i,j)\in A'} c'_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

subject to (5), (9), (10), (11), (12) and

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(k)} x_{ij}\leqq 1,\ \text{for all } k\in N'\backslash S \tag{13}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(k)} x_{ij}\leqq 1,\ \text{for all } k\in N'\backslash S \tag{14}$$

3.4 Additive Approach [2] による下界値強化

ある問題に対して，p 個の下界値計算法 L^h, $h=1,\ldots,p$ があり，任意の非負の費用 C に対して，L^h を適用すると，(1) $C^h\geqq 0$ かつ，(2)任意の実行可能解 X に対して，$zb^h+C^h X\leqq CX$ を満足する下界値 zb^h と被約費用 (residual cost vector) C^h が得られるとする．このとき，費用 C からなる問題に対して，任意の下界値計算法を適用し，その下界値と被約費用を求める．さらに，別の下界値計算法を現在得られている被約費用に対して適用する．この操作を p 個の下界値計算法に対して繰り返すと，任意の実行可能解 X に対して，

$$zb^1+zb^2+\cdots+zb^p+C^p X\leqq C X$$

が成り立ち，強化された下界値が得られる．

Additive Approach の重要な操作は，被約費用の計算である．下界値計算に用いる緩和問題に対して，双対問題が定義できる場合，与えられた緩和問題の費用と，その双対問題の解から計算される費用は，条件1，2を満足するので，被約費用となる．本論文で提案した緩和問題は，いずれも双対問題が求められるため，容易に被約費用が計算できる．

4. 提案する厳密解法

次に，CVRP に対する厳密解法を提案する．分枝限定法を用いたときに生成される子問題に対して，まず割当問題を解く．そこで得られる解をもとに，点集合 S を逐次求め，前述の緩和問題を用いて，下界値強化を行なっていく．分枝基準として，部分巡回路除去法[3]を利用し，最適解を探索していく．

5. おわりに

本研究では，容量制約付き配送路決定問題の下界値計算として，新たな下界値計算法を3つ提案した．また，それらの下界値計算法を組み合せて，より強い下界値を得る下界値計算法を提案した．さらに，提案した下界値計算法を分枝限定法に組み込んだ新しい厳密解法を提案した．提案した解法は，Laporte らの解法[3]と比較して，強い下界値を得ることができ，最適解を効率よく求めることができることを数値実験によって確認した．

参 考 文 献

[1] E. Balas and N. Christofides, "A Restricted Lagrangean Approach to the Traveling Salesman Problem," *Mathematical Programming*, **21**, 19-46 (1981).

[2] M. Fischetti and P. Toth, "An Additive Bounding Procedure for Combinatorial Optimization Problems," *Operations Research*, **37**, 319-328 (1989).

[3] G. Laporte, H. Mercure and Y. Nobert, "An Exact Algorithms for the Asymmetrical Capacitated Vehicle Routing Problem," *Networks*, **16**, 33-46 (1986).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

Structure of Solution Set to Nonlinear Programs with 2 Parameters

信太　正之　(東京工業大学大学院総合理工学研究科システム科学専攻：現所属：同大学院博士課程)　指導教官　小島政和教授

1.　はじめに

非線形計画問題とは，非線形目的関数をいくつかの非線形等式制約および不等式制約のもとで最小化する解を求める問題である．非線形計画問題の解は，ある制約想定，たとえば制約の勾配ベクトルの線形独立性(LICQ)もしくはＬＩＱＣよりも弱い仮定である，いわゆるMangasarian-Fromovitz条件（MFCQ）等のもとで，Karush-Kuhn-Tucker条件（KKT条件）を満たすものを考えるのが一般的である．非線形計画問題の基礎理論ではこの条件を満たす解（KKT解）の性質や構造を研究対象としている．本論文では特にパラメータの変化によって問題が連続的に変わる場合のKKT解集合の構造について研究した．

2.　既存の研究

これまで1次元のパラメータを含む場合のKKT解の集合の構造については盛んに研究されている．たとえばKojimaら[3]では，MFQCおよびある種の正則性条件を仮定すると，KKT解集合が境界のない区分的可微分1次元多様体になることが示され，またKKT解集合上で解の性質を決定する指数（Morse指数の拡張で局所最小点，鞍点，局所最大点を区別できる）を定義し，指数の変化が各点の近傍で1以下であることも示された．またJongenら[1]によって，関数空間に関する一般的な仮定のもとで，KKT解集合が境界を持つ1次元多様体になり，その各点での状況が5種類の型に分類されることを示した．その他数多くの研究がされており，KKT解集合の構造はかなり明確になりつつある．

それに対してパラメータの数が複数の場合についてはほとんど研究されていない．Schecter[4]は，特殊な構造をもつ問題の族に制限して調べ，さらに区分的可微分多様体の概念を拡張した折れ目のある多様体（CM）の族を定義し，LIQCおよびいわゆるLagrange関数の正則性を仮定することにより，KKT解集合がパラメータと同じ次元のCM多様体になることを示した．またJongenら[2]はLICQおよびLagrange関数の正則性だけを仮定して，KKT解集合がパラメータの次元と同じ次元のCM多様体になることを示しSchecterの結果を一般化した．しかしながら，パラメータ付きの非線形計画問題に対してはLICQは強い仮定であるとされるが，両者ともにMFCQの仮定では複雑になるために扱っていない．その他にShindohら[5]は，MFCQおよびKKT条件の正則性を仮定すると，パラメータが2次元の場合に指数の変化が補助空間（Lagrange multiplier vector）を含めた解集合の各点の近傍で2以下になることを示した．

本論文では，今までの議論を拡張し，LICQよりも緩い仮定であるMFCQを仮定した場合のKKT解集合の構造について研究している．

3.　KKT解集合の多様体構造

この論文では，MFCQおよび，KKT条件の正則性を仮定し，パラメータが2次元の場合のKKT解集合の構造について調べた．

そのために，まず始めにSchecterの論文で用いられた仮定（つまり制約を満たす領域に自然に入る滑層構造(stratification）の各滑層（stratum）に対して制約の勾配ベクトルの階数が一定である：ＣＲＣ）を用いて議論を拡張することによってKKT解集合が境界のない2次元位相多様体になることを示し，さらに区分的可微分多様体，CM多様体の概念を拡張した境界のない2次元多様体（ＧＣＭ）の族（区分的可微分多様体と各分割ごとに可微分同相となる多様体）を定義し，ＣＲＣの仮定のもとでKKT解集合がGCM多様体に属することを示した．さらにKKT解集合に自然にはいる滑層構造がいわゆるWhitney正則滑層構造を持つことを示した．

次に補助空間（Lagrange multiplier vector）を除いたKKT解集合上での指数の変化についても調べ，指数の変化が，パラメータの数・制約の勾配ベクトルの階

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

数・Lagrange関数のヘッセ行列の階数の3者によって定まることを明らかにした．その結果，補助空間を入れたKKT解集合上では各点の近傍で指数の変化が2以下になる（[5]）のに対して，補助空間を除くとCRCを仮定しても各点の近傍で指数の変化を評価できないことを示し，パラメータが1次元の場合と比較した．これは，これまで補助空間を除いても指数の変化が何らかの形で押さえられると思われていたことを考えると重要な結果である．

さらに，CRCを仮定せずに，MFCQとKKT条件の正則性のもとでKKT解集合が境界のない2次元位相多様体になることを示した．

4. まとめ

本論文ではMFCQの仮定のもとでパラメータの次元が2の場合に，KKT解集合が2次元の位相多様体になることを示し，さらに指数の変化について考察した．これによって，パラメータの次元が1次元の場合にKojimaら[3]によって得られた結果をすべて2次元の場合に拡張し，1次元パラメータと2次元パラメータを持つ非線形計画問題の違いを明確にした．この結果，パラメータの次元がさらに増えたときのKKT解集合の構造が予想可能となる．つまり，パラメータがd次元のときにはKKT解集合がd次元位相多様体になり（CRCを仮定すればGCM多様体になる），指数の変化は補助空間（Lagrange multiplier vector）を含めれば局所的にdしか変化しないが補助空間を除くと評価が困難になるという予想である．

参考文献

[1] H. Th. Jongen, P. Jonker, and F. Twilt. Critical sets in parametric optimization. *Mathematical Programming*, **34**, pp. 333-353, 1986.

[2] H. Th. Jongen, P. Jonker, and F. Twilt. Parametric optimization: the Kuhn-Tucker set. In J. Guddat, H. Th. Jongen, B. Kummer, and F. Nožička, editors, *Parametric optimization and related topics*, Vol. 35, pp. 196-208. Akademie-Verlag, Berlin, 1987.

[3] M.Kojima and R. Hirabayashi. Continuous deformations of nonlinear programs. *Mathmatical Programming Study* **21**, pp. 150-198, 1984.

[4] S. Schecter. Structure of the first-order solution set for a class of nonlinear programs with parameters. *Mathematical Programming* **34**, pp. 84-110, 1986.

[5] S. Shindoh, R. Hirabayashi, and T. Matsumoto. Structure of solution set to nonlinear programs with two parameters: I. change of stationary indices. Technical report, Research Reports on Information Sciences, B-224 (1989), Series B: Operations Research, Tokyo Institute of Technology (To appear in "*Parametric Optimization and Related Topics* II").

会合記録

10月3日（木）	国際委員会	7名
10月9日（水）	OA化委員会	4名
10月21日（月）	編集委員会	9名

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．