乱数の原器としての円周率

三好　和憲

1. はじめに

真の乱数，すなわちあらゆるパターンが等しい確率でかつ独立に出現し得るような無限数列を得ることが可能であろうか．人間がこれを自ら生成すること，たとえばサイコロを完全に均等に作りまた均等な配位で同等の条件で(すなわち重力ポテンシャルなどを全く同じにして)振ることなどは原理的に不可能である．

自分で作り出さなくても世の中に真に確率的な現象が存在するならば，これを目に見える形に取り出すことを考えればよい．放射性物質の崩壊やツェナーダイオードの熱雑音を利用する物理乱数はこの思想にしたがったものである．しかし仮に現象そのものが確率的であったとしてもこれを取り出す電気回路への環境の影響を完全に排除することは難しく，得られた出力が本当に確率的であるかどうかはわからない．

物理法則とならんで宇宙の創世者から与えられたものとして数がある．無理数の無限小数による表現では数字が循環しないから

$$0.\,1\underbrace{\underbrace{00}\underbrace{11}}_{\text{2コ}}\underbrace{\underbrace{000}\underbrace{111}}_{\text{3コ}}\underbrace{\underbrace{0000}\underbrace{1111}}_{\text{4コ}}\underbrace{\underbrace{00000}\underbrace{11111}}_{\text{5コ}}\underbrace{\underbrace{000000}\underbrace{111111}}_{\text{6コ}}\ldots$$

のような意図的に構成したものでないかぎり数字の列の中にはあらゆるパターンが等しい確率で出現するものと期待できる．

数を（たとえば$\sqrt{2}$と）特定し基数を（たとえば通常用いている10と）指定すれば数字の列は（現実に計算できるかは別として)直ちに無限の先まで確定するわけで，その中の数字が本当の意味で独立であろうはずはない．しかしまた一方で数字の列の中の特定のパターンがある特定のパターンをどこか別の所定の箇所に生成する確率が高いという理論的な根拠もない．したがって数字の列は分布としては独立とみなせよう．

表1は$\sqrt{2}$の値の小数部分における各数字の出現頻度を10進3000万桁までの範囲でまとめたものである．χ^2値は3.19（1000万桁まで）を除けばすべて５％から95％の範囲に分布しており乱数的であるといってよい．しかし基数を10以外の任意の数に選んでも同じことがいえる保証はない．$\sqrt{2}$を正則連分数で表現すると，

$$\sqrt{2}=[1:2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$$

とすべての部分商が２である．$\sqrt{2}$にかぎらず２次の無理数はすべて正則連分数の部分商が循環することが知られており，はっきりした規則性をもっている．連分数表現における規則性と数値表現における数字分布との関係は不明であるが，明白な規則性をもつ数の方が数値表現の『かき混ぜ方』が不足していると言えそうである．

$\sqrt{2}$のような単純な無理数よりも高尚な数として思い浮かぶのは超越数である．世界初の電子計算機ENIACによって1949年円周率πと自然対数の底eの値がそれぞれ2,000桁以上計算されたのも（Reitwiesner'50）超越数の乱数性に着目したJ.von Neumannの示唆によるものであった．ところで同じ超越数でも自然対数の底は正則連分数で表わすと

$$e=[2:1,2,1,1,4,1,1,\ldots 2n,1,1,2(n+1),\ 1,1\ldots]$$

とごく単純な規則性を示している．これに対して円周率の方は

$$\pi=[3:7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,\ldots]$$

と全く不規則である．

数値表現の間に相関がない場合に部分商nが出現する理論的な確率は$\log\{(n+1)^2/n(n+2)\}/\log 2$に等しいが円周率の部分商の分布は実際にこの値に近いことが確かめられている．このことからも円周率は真の乱数の候補または乱数の原器として有力であるといえよう．後に述べるように円周率の値は古典的な統計検定や筆者の提唱するポテンシャル検定の結果においても模範的な乱数の性質を示している．

みよし　かずのり　工学院大学電子工学科
〒160 新宿区西新宿１―24―２

2. 円周率の計算

円周率の値を高精度に計算することは乱数とは離れても計算機の性能の検証，誇示の目的で ENIAC 以来行なわれてきた．手計算の時代から記録レースが続いていたことからも明らかなように円周率には数の世界の中で独特の地位が与えられている．100～200桁程度なら円周率の値を暗唱している人は多いが，e や $\sqrt{2}$ を 100 桁といわず50桁でも暗唱している人が何人いるであろうか．

手計算にせよ計算機によるにせよ最近に至るまで円周率を計算する手法は逆正接の加法公式を利用するものであった．すなわち1671年に James Gregory の求めた級数展開

$$\mathrm{Arctan}\ x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

を1706年と公表された Machin の公式

$$\frac{\pi}{4}=4\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\frac{1}{239}$$

のような $\pi/4$ を与える逆正接加法公式と組み合せて計算するものであった．Abraham Sharp は Gregory 級数に $x=1/\sqrt{3}$ を代入して1699年に72桁を計算したが，彼に Gregory の級数展開を利用して円周率を計算するよう示唆したのはハレー彗星で有名な英国王立天文台長 Edmund Halley である．また上記の巧妙な逆正接の加法公式を発見し自身でも 100 桁を計算した John Machin は London 大学の天文学の教授であった．別段天文学で特に高精度の円周率の値を必要としているわけではない．円周率のロマンと天文学者のロマンとに何らかの接点があったのであろうか．

逆正接加法公式を利用する場合，計算する桁数を 2 倍にすると必要な演算行程はその自乗の 4 倍になり計算時間も 4 倍かかる．これは手計算でも機械計算でも事情は同じであるが，計算機では桁数を増すと多倍長計算の基数をより大きくとる必要が生じるので計算時間は自乗よりもう少し余分にかかる．

ところが近年のスーパーコンピュータではベクトルの高速演算が可能になると同時に実装される記憶装置の容量も飛躍的に増大し，これにより高速フーリエ変換を用いて多倍長の乗算が高速に行なえるようになった．Gauss-Legendreの公式によれば円周率は次のように得られる．

$$a_0=1,\ b_0=\frac{1}{\sqrt{2}},\ t_0=\frac{1}{4},\ x_0=1$$

表 1 $\sqrt{2}$ の数字の出現頻度

DIGIT		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	χ^2
TO	100D	10	7	8	11	9	7	10	18	12	8	9.60
TO	200D	21	17	23	19	17	22	16	28	17	20	6.10
TO	500D	54	44	49	49	44	57	45	56	50	52	4.08
TO	1000D	108	98	109	82	100	104	90	104	113	92	8.38
TO	2000D	178	190	216	184	190	215	207	200	223	197	10.04
TO	5000D	458	488	492	500	490	507	522	484	541	518	9.73
TO	10000D	952	1005	1004	980	1016	1001	1032	964	1027	1019	6.41
TO	20000D	1971	2002	2005	1965	2053	2002	2001	1949	2038	2014	4.57
TO	50000D	4931	5064	4975	4977	5143	4970	4973	4990	4971	5006	6.61
TO	100000D	9959	10106	9876	10058	10100	10002	9939	10008	10007	9945	4.85
TO	200000D	19830	19974	20016	19855	20253	20082	19945	19992	20042	20011	6.33
TO	500000D	49899	49500	50051	50138	50055	50326	49923	50129	49975	50004	8.29
TO	1000000D	99814	98924	100436	100191	100024	100155	99886	100008	100441	100121	16.66
TO	2000000D	199636	198685	200271	199870	200358	200075	200843	199978	200298	199986	14.43
TO	4000000D	399882	398701	400728	399855	399948	399389	401077	400429	399608	400383	10.68
TO	5000000D	499479	499237	500546	499995	500108	499218	501393	500048	499600	500376	8.04
TO	8000000D	799389	799988	800328	799435	799986	799855	801650	799440	799523	800406	5.31
TO	10000000D	999897	1000114	1000208	999674	1000126	999358	1001246	999359	999452	1000566	3.19
TO	15000000D	1500663	1500295	1499592	1500153	1501723	1498098	1501192	1498368	1498710	1501206	9.67
TO	20000000D	2000003	2000343	1999839	2000676	2002264	1997152	2002307	1997505	1998668	2001243	14.35
TO	25000000D	2500072	2500873	2498225	2500517	2502134	2496915	2502928	2497472	2499324	2501540	14.42
TO	30000000D	3000898	2999729	2997791	3001175	3002364	2997707	3003192	2996232	2999026	3001886	15.63

表 2　円周率計算の歴史（最近のものは代表的なもののみ掲載）

calculated by	machine used	date	precision	time	formula
Reitwiesner et al	ENIAC	1949	2037	70h	Machin
Nicholson & Jeenel	NORC	1954	3092	13m	Machin
Felton	Pegasus	1957	7480	33h	Klingenstierna
Genuys	IBM704	1958	10000	1h40m	Machin
Shanks & Wrench	IBM7090	1961	100265	8h43m	Stoermer
Guilloud & Filiatre	IBM7030	1966	250000	41h55m	Gauss
Guilloud & Dichampt	CDC6600	1967	500000	28h10m	Gauss
Guilloud & Bouyer	CDC7600	1973	1000000	23h18m	Gauss
Miyoshi & Kanada	FACOM M200	1981	2000036	137h	Klingenstierna
Tamura & Kanada	HITAC M280H	1982	4194288	2h21m	Gauss-Legendre
Ushiro & Kanada	HITAC S810/20	1983	10013395	24h	Gauss-Legendre
Gosper	Symbolics 3670	1985	17000000	6month	Ramunujan
Bailey	CRAY-2	1986	29360111	28h	Borwein-Borwein
Kanada et al	NEC SX-2	1987	134217728	37h	Gauss-Legendre
Kanada et al	HITAC S820/80E	1989	1073741799	99h55m	Gauss-Legendre

$$\begin{cases} a_{k+1}=\dfrac{a_k+b_k}{2},\ b_{k+1}=\sqrt{a_k b_k}, \\ t_{k+1}=t_k-x_k\ (a_k-a_{k+1})^2 \\ x_{k+1}=2x_k \quad (k \geqq 0) \end{cases}$$

このとき $\dfrac{(a_k+b_k)^2}{4t_k} \to \pi$

この手続きは Newton 法のように２次の収束をするので求める桁数を２倍にするには途中の計算もまた倍の精度で行なう必要はあるがループをたった１回余分に回るだけでよい．したがって多倍長の乗算が主記憶上で実行できるだけの記憶装置の容量さえあれば計算する桁数を増やすことに障害はない．1982年以来次々に記録が更新され（金田他 '83, '84等）現在では10億桁以上が求められている．

桁数の多い計算には不向きであるが円周率を与える異色な公式として Ramanujan により発見された次の関係がある．

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}$$

数学的な興味からこの公式自体を検証する目的で1985年には1700万桁の計算も行なわれている．以上をまとめたものが**表 2** である．

10億桁の数字列を数値計算での適当な精度，たとえば８桁ずつに分割すれば１億2500万個の乱数標本が得られることになる．これだけではスーパーコンピュータを用いた大規模なシミュレーションには乱数の個数としてまだ不足である．しかし乗算合同法による擬似乱数などと異なり円周率の各桁の間には軽重の差はなく相関も認められないことから分割する箇所をずらしたり（８倍）全体を素数倍して増殖することができる．これにより円周率の数字列から実用的な個数の乱数を供給することも十分可能である．

3.　古典的統計検定

円周率の値がどの程度乱数らしいのか，特に擬似乱数と比べてどのくらい質的に異なるのかは興味深い．超越数の数字列は周期を持たないので擬似乱数発生器の検定に用いられるスペクトル検定（Coveyou他 '67）を適用することはできない．ここでは古典的な検定として１万桁の π の値の検定（Pathria'62）と同様に数字の頻度，系列相関，５個ずつ区切ったポーカー手の検定を行なった．

表１と同様にして円周率の小数部分における各数字の出現頻度を10進10億桁までの範囲でまとめたものが**表 3** である．32レンジのうち χ^2 値がその期待値である9を越えるものはわずか２個しかなく全体に小さいほうに偏っており $\sqrt{2}$ に比べてやや お行儀が良すぎるきらいはある．近年の円周率記録レースの発端となった 200 万桁まででは偶然 χ^2 値が期待値に一致している．

表 4 は５億桁，10億桁の範囲それぞれを10のブロックに分け全体および各ブロック内でそれぞれ数字の頻度，系列相関，５個ずつ区切ったポーカー手検定を行ない χ^2 値をまとめたものである．頻度検定（自由度９）では全

表 3 円周率の数字の出現頻度

range ＼ digit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	χ^2
to 100D	8	8	12	11	10	8	9	8	12	14	4.20
to 200D	19	20	24	19	22	20	16	12	25	23	6.80
to 500D	45	59	54	50	53	50	48	36	53	52	6.88
to 1000D	93	116	103	102	93	97	94	95	101	106	4.74
to 2000D	182	212	207	188	195	205	200	197	202	212	4.34
to 5000D	466	532	496	459	508	525	513	488	492	521	10.77
to 10000D	968	1026	1021	974	1012	1046	1021	970	948	1014	9.32
to 20000D	1954	1997	1986	1986	2043	2082	2017	1953	1962	2020	7.72
to 50000D	5033	5055	4867	4947	5011	5052	5018	4977	5030	5010	5.86
to 100000D	9999	10137	9908	10025	9971	10026	10029	10025	9978	9902	4.09
to 200000D	20104	20063	19892	20010	19874	20199	19898	20163	19956	19841	7.31
to 500000D	49915	49984	49753	50000	50357	50235	49824	50230	49911	49791	7.73
to 1000000D	99959	99758	100026	100229	100230	100359	99548	99800	99985	100106	5.51
to 2000000D	199792	199535	200077	200141	200083	200521	199403	200310	199447	200691	9.00
to 4000000D	399419	399463	399822	399913	400792	400032	399032	400650	400183	400694	7.92
to 5000000D	499620	499898	499508	499933	500544	500025	498758	500880	499880	500954	7.88
to 8000000D	799111	800110	799788	800234	800202	800154	798885	800560	800638	800318	3.79
to 10000000D	999440	999333	1000306	999964	1001093	1000466	999337	1000207	999814	1000040	2.78
to 15000000D	1500081	1499675	1501044	1499917	1501166	1500417	1498447	1499584	1500435	1499234	4.07
to 20000000D	2001162	1999832	2001409	1999343	2001106	2000125	1999269	1998404	1999720	1999630	4.17
to 25000000D	2500496	2499915	2500707	2499313	2502826	2500139	2499603	2498290	2499189	2499522	5.28
to 30000000D	2999157	3000554	3000969	2999222	3002593	2999997	2999548	2998175	2999592	3000193	4.34
to 50000000D	4999632	5002220	5000573	4998630	5004009	4999797	4998017	4998895	4998494	4999733	6.17
to 80000000D	7998807	8002788	8001828	7997656	8003525	7996500	7998165	7999389	8000308	8001034	5.95
to 100000000D	9999922	10002475	10001092	9998442	10003863	9993478	9999417	9999610	10002180	9999521	7.27
to 150000000D	14998689	15001880	15001586	14999130	15003829	14993562	14998434	14999462	15001416	15002012	4.90
to 200000000D	19997437	20003774	20002185	20001410	19999846	19993031	19999161	20000287	20002307	20000562	4.13
to 300000000D	29998356	30000582	30006337	29999867	29999810	29993099	29998913	29999071	30003683	30000282	3.55
to 400000000D	39996048	39997375	40011791	39995030	40001014	39992123	40001899	40000314	40005735	39998671	7.19
to 500000000D	49995279	50000437	50011436	49992409	50005121	49990678	49998820	50000320	50006632	49998868	7.42
to 800000000D	79991897	79997003	80003316	79989651	80016073	79996120	80004148	79995109	80002933	80003750	6.62
to1000000000D	99993942	99997334	100002410	99986911	100011958	99998885	100010387	99996061	100001839	100000273	4.92

体に χ^2 値が小さく，2項系列相関（自由度90）やポーカー手検定（自由度6）では χ^2 値のばらつきが大きい．この傾向は200万桁，800万桁の検定でも見られたものである．

4. ポテンシャル検定

シミュレーションを行なううえで常に真の乱数が求められているというわけではなく，それぞれの目的に応じた検定を行なって棄却されなければ合格とするのでかまわない．

擬似乱数の格子構造（Marsaglia '68）は多くのシミュレーションで有害と考えられる．これを検出する理論的な検定法としてはスペクトル検定法があるが，前述のように超越数の数字の列のような周期を持たない標本には適用できないため円周率を擬似乱数と直接比較することができない．

筆者の提唱したポテンシャル検定法（三好'83, '87）は乱数列を用いて同等な粒子を3次元空間内に配置するとき，粒子系の2体相関によるポテンシャルエネルギーが格子構造を鋭敏に検出することならびに近傍および遠方の寄与が均衡していることを用いた統計的検定法であり，乱数発生器の周期と無関係に行なえる利点がある．

N 個の同等な粒子を1辺2Lの単位立方体の内部に配置しこの立方体が無限に周期構造をなすものとするとき，粒子系の2体相関によるポテンシャルエネルギーは単位立方体当たり，無次元化して次のように書かれる．ここで x_i は i 番目の粒子の3次元座標を意味する．

$$U_N = -\frac{3}{4\pi}\int_v\int_v \frac{\{\sum_i \delta(x-x_i)-1\}\{\sum_j \delta(x'-x_j)-1\}}{|x-x'|}\,dx\,dx' \qquad (v=(2L)^3=N)$$

$$= -\frac{3}{2\pi}\sum_{i>}^{N}\sum_{j}\left(\frac{1}{|x_i-x_j|}-\frac{6\log(2+\sqrt{3})-\pi}{4L}\right)$$

距離の逆数の単位立方体内での期待値は $(6\log(2+\sqrt{3}-\pi)/4L$ に等しく，分散は

$$\sigma^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3}{L^3}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\left(\frac{6\log(2+\sqrt{3}-\pi)}{4L}\right)^2$$

$$\fallingdotseq 0.50233899\times\frac{1}{L^2}$$

表4　円周率の古典統計の χ^2 値
（　）内の数値は上側確率

block numb.	frequency (d.f.=9)	serial (d.f.=90)	poker hand (d.f.=6)
whole	7.42	101.81	8.98
1	6.17	86.42	2.04(>.90)
2	11.30	107.36	11.05(<.10)
3	2.08(>.99)	71.68(>.90)	1.67(>.90)
4	6.19	94.78	18.91(<.005)
5	5.11	113.54(<.05)	0.42(>.995)
6	8.50	86.51	3.98
7	4.70	92.95	1.72(>.90)
8	5.63	102.50	6.73
9	13.02	131.41(<.005)	5.86
10	12.68	111.24(<.10)	5.93

(1) First 500 million decimal digits

block numb.	frequency (d.f.=9)	serial (d.f.=90)	poker hand (d.f.=6)
whole	4.92	79.54	3.69
1	7.27	90.13	6.57
2	3.58(>.90)	84.83	10.90(<.10)
3	3.42(>.90)	75.61	1.91(>.90)
4	8.84	81.52	2.60
5	4.62	97.79	5.31
6	8.55	83.37	4.38
7	8.42	105.17	4.99
8	9.13	99.70	5.42
9	2.86(>.95)	89.09	2.47
10	7.98	102.18	4.39

(2) First 1 billion decimal digits

で与えられるので，厳密には $N(N-1)/2$ 個の $1/r$ は互いに独立ではないが粒子数 N を大きくしたとき U_N は漸近的に正規分布 $N(0, \sigma_0^2)$ にしたがうとしてよい．ここで σ_0^2 は

$$\sigma_0^2=\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2\frac{N(N-1)}{2}\sigma^2\left(\frac{1}{r}\right)\fallingdotseq(1.9143\times L^2)^2\frac{N-1}{N}$$

である．U_N を計算するとき，粒子間の距離 $|x_i-x_j|$ は着目した粒子を中心とする単位立方体内部で考える．

粒子数 N を $10^3=1000$, $16^3=4096$, $25^3=15625$ の3通りに選び円周率5億桁の小数部の数字を上位から8桁ずつ区切って粒子の座標とし，それぞれ17500, 4100, 500

個の標本を得た.（$24N\times$標本数が5億桁に達していないのはディスク上に保存できるデータセット容量の上限値とＣＰＵ時間の関係である.）

標本全体とこれを10個に分割したブロックの各々について，標本平均 $y=\mu(U_N)$および標本標準偏差 s.d.$=\sigma(U_N)$ を検定した結果を表5に掲げる．表でxは標本平均÷標本標準偏差$\times\sqrt{\text{標本サイズ}}$，prob.は標準正規分布の確率密度関数を$|x|$から$\infty$まで積分したものの2倍，chi-sq. は標本分散$\div\sigma_0^2\times$標本サイズである．

乱数が少数の超平面上に落ちる格子構造があるとU_Nは負の値をとり，また粒子がすべて相異なる格子点上に配置されるとU_Nは正の値をとる．後者はU_Nの最大値を与えNが奇数の3乗のときはほぼ$0.53N$また偶数の3乗のときはほぼ$0.90N$となる．

粒子数Nを大きくするほど格子構造の検出能力は高くなるが，32ビット機で悪名高い乗数65539による乗算合同法擬似乱数から粒子系を構成すると$N=1000$でも$\mu(U_N)$が-190にもなり正規分布$N(0, \sigma_0^2)$からほど遠いことがはっきりする．

5. まとめ

円周率の数字列は種々の検定で良好な結果を示している．また厳密な検定ではないが円周率の値を整数部の3も含めて頭から順に数字をとって整数を作るときこれが素数になるのは160桁までの範囲では1桁(3)，2桁(31)，6桁（314159)，38桁（略）だけである．これも素数定理から導かれる素数の分布とよく合致している．

現時点では，乱数の原器として1つだけ選ぶとすれば類似品がないこと，再現性があること，などから円周率であろう．擬似乱数や物理乱数との比較

表5 円周率のポテンシャル検定

Number of independent particles = 1000
Theoretical standard deviation = 47.8341
Number of samples = 17500
420000000 decimal digits are processed

block	y:mean(U)	x	prob.	s.d.	chi-sq.
whole	0.118475	0.3273	74.35%	47.89	17541.5
1	0.761582	0.6795	49.68%	46.89	1681.5
2	2.070986	1.8281	6.75%	47.39	1717.7
3	-0.172743	-0.1490	88.15%	48.49	1798.4
4	-3.430663	-2.8917	0.38%	49.63	1883.9**
5	0.285903	0.2501	80.25%	47.81	1748.4
6	-0.040626	-0.0358	97.14%	47.43	1720.6
7	0.511514	0.4444	65.67%	48.15	1772.9
8	0.749122	0.6624	50.77%	47.31	1711.9
9	-0.831372	-0.7295	46.57%	47.67	1738.2
10	1.281049	1.1165	26.42%	48.00	1761.9

* : significant at 10 percent level
**: significant at 5 percent level

Number of independent particles = 4096
Theoretical standard deviation = 122.5016
Number of samples = 4100
403046400 decimal digits are processed

block	y:mean(U)	x	prob.	s.d.	chi-sq.
whole	0.679793	0.3493	72.69%	124.62	4243.1
1	-4.083275	-0.6590	50.99%	125.46	430.1
2	-1.409943	-0.2202	82.57%	129.66	459.3*
3	2.726465	0.4365	66.24%	126.46	437.0
4	-6.797091	-1.0915	27.51%	126.09	434.4
5	0.914328	0.1494	88.13%	123.95	419.8
6	4.032858	0.6951	48.70%	117.48	377.0
7	12.475649	2.1305	3.31%	118.57	384.1
8	-4.005814	-0.6211	53.45%	130.59	465.9*
9	-0.203559	-0.0336	97.32%	122.55	410.3
10	3.148308	0.5098	61.02%	125.04	427.2

* : significant at 10 percent level

Number of independent particles = 15625
Theoretical standard deviation = 299.1031
Number of samples = 500
187500000 decimal digits are processed

block	y:mean(U)	x	prob.	s.d.	chi-sq.
whole	-24.627052	-1.8264	6.78%	301.51	508.1
1	-8.879902	-0.2022	83.98%	310.55	53.9
2	39.650099	0.8727	38.28%	321.26	57.7
3	11.583197	0.2646	79.13%	309.57	53.6
4	-59.374925	-1.4235	15.46%	294.93	48.6
5	11.433307	0.2577	79.66%	313.68	55.0
6	-32.760509	-0.8154	41.48%	284.08	45.1
7	-18.026269	-0.4501	65.26%	283.20	44.8
8	-94.077807	-2.0181	4.36%	329.63	60.7
9	-35.688542	-0.9458	34.42%	266.81	39.8
10	-60.129165	-1.4221	15.50%	298.97	50.0

No chi-sq. value is significant at 10% level

に利用するのに最適であり，実際のシミュレーションを多数個の擬似乱数を用いて行なう場合でも円周率の数字列を用いたテスト結果と照合することで結果の信頼性を高めることができよう．

参 考 文 献

[1] Coveyou, R. R. and MacPherson, R. D. : Fourier analysis of uniform random number generators, J. Ass. Comput. Mach., **14**, 100-119 (1967).

[2] Kanada, Y., Tamura, Y., Yoshino, S. and Usihro, Y. : Calculation of π to 10,013,395 decimals based on the Gauss-Legendre algorithms and Gauss arctangent relatian, **TR84-01**, Computer Centre, the University of Tokyo (1983)

[3] Marsaglia, G. : Random numbers fall mainly on the planes, Proc. Nat. Acad. Sci., **61**, 25-28 (1968).

[4] Miyoshi, K. and Nakayama, K.: Calculation of π to 2,000,000 decimals, Proc. Annual Conference of the Info. Proc. Soc. Japan., **23**, 941-942 (1981)

[5] 三好和憲：ポテンシャル法による乱数の検定．数理解析研究所講究録，**498**，191-198 (1983)

[6] Miyoshi, K.: On a Statistical Test Based on the Potential Energy for the System of Non-Periodic Random Number Cenerators, Tensor, N. S. **46**, 236-239 (1987)

[7] Pathria, R. K.: A statistical study of randomness among the first 10,000 digits of π, Math. Comp., **16**, 188-197 (1962)

[8] Reitwiesner, G.: An ENIAC determination of π and e to more than 2000 decimal places. MTAC, **4**, 11-15 (1950)

[9] Tamura, Y. and Kanada, Y.: Calculation of π to 4,194,293 decimals based on the Gauss-Legendre algorithms, **TR83-01**, Computer Centre, the University of Tokyo (1983)