ファジィ多目的0-1線形計画法とその応用

玄 光男，井田 憲一

1. はじめに

各種システムにおける人員配置などの最適計画やシステム信頼性におけるユニット選択および配分問題は，0-1決定変数をもつ単一目的の線形計画問題に定式化，または変換されて解かれることが多く，今日まで数多くの優れた解法が提案されている[3, 16]．これらの0-1線形計画問題では，実用上数多くの0-1決定変数とそのシステム特有の構造を伴う大規模な0-1線形計画問題になる場合が多い．このような大規模なシステムを解析するには，そのシステムのもっている特有な構造を十分活用することによって，効率的な計算法を開発することが要求される．この大規模システム特有な構造の1つにGUB(generalized upper bounding) と呼ばれる構造があるが，最近，このGUB構造をもつ0-1線形計画問題のための効率的な解法も提案されている．

他方，路線乗合バスなどの公共輸送機関の運行管理システムにおける人員配置等の問題の中でも，時間帯によってバラツキのあるダイヤに種々の労働規約に伴う制約をもつ乗務員を割り当てなければならない仕業編成計画は大規模かつ複雑であり，これを忠実に定式化することが困難なため，人手に頼らなければならない状況にある．この仕業編成計画問題の解法としては，いままでに単一目的の数理計画問題に帰着させて解く手法やシミュレーションなどが報告[10, 11, 16]されているが，まだ実用レベルに至っていない．

この種の計画問題では，これまでの単一目的の計画モデルでは解決できない問題点が多く存在し，互いに利害が相反する複数の目的関数を伴う多目的意思決定(MODM: multiple objective decision making)の各手法[1, 6-9, 14]を適用する必要性が高まってきている．このようなMODM問題に対する代表的な解法の1つに目標計画法(GP: goal programming)[2, 4]があるが，最近，この仕業編成計画をGP問題に定式化して解く試みが太田ら[11]によって報告されており，前述のGUB構造を活かした効率的な解法も提案されている[5]．しかし，従来のGPでは，目標値とその優先順位および重みが確定値として与えられており，現実の意思決定においては，それらの値が意思決定者の主観的判断にもとづくあいまいさをもつことに関して，考慮されていなかった[12, 13, 17]．

本論文では，このような観点に立って，意思決定者のもつあいまいさと大規模な0-1線形計画問題に特有なGUB構造を活かしたファジィ多目的0-1線形計画問題の効率的な解法を提案する．さらに，路線バスの最適仕業編成計画問題への応用を試み，数値例を用いてその有効性を確認する．

2. ファジィ多目的0-1線形計画モデル

m個のシステム制約とp個のGUB制約条件の下で，q個の目的関数を最小化（ファジィ最小化）するファジィ多目的0-1計画問題は，次のように表わされる．

(1) $f_1(x) \precsim h_1^{(r)},\ f_2(x) \precsim h_2^{(r)},\ \cdots,\ f_q(x) \precsim h_q^{(r)}$
s.t.

(2) $$g_i(x) = \sum_{t=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_t} a_{itj} x_{tj} \leqq b_i,\quad i=1, 2, \cdots, m$$

(3) $$g_{m+t}(x) = \sum_{j=1}^{n_t} x_{tj} = 1,\quad t=1,\ 2, \cdots, p$$

(4) $$x_{tj} = 0 \text{ or } 1,\quad j=1,\ 2, \cdots, n_t,\quad t=1,\ 2, \cdots, p$$

ただし，$f_k(x)$は，

(5) $$f_k(x) = \sum_{t=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_t} c_{ktj} x_{tj},\quad k=1,\ 2, \cdots, q$$

で表わされるk番目の目的関数，また$h_k^{(r)}$は意思決定者が設定する反復rにおけるk番目の目的関数の目標値で，負の理想値(NIS: negative ideal solution, 単一目的関数の線形計画問題で，これ以上悪くならない解)z_k^-と正の理想解(PIS: positive ideal solution, 単一目的関数の線形計画問題で，これ以上よくならない解)

げん　みつお，いだ　けんいち
足利工業大学　工学部
〒326 足利市大前町268—1

z_k^* の間の値をとる．記号は$\lesssim$あいまいさ（大体小さいか等しい)を表わすファジィ不等号である．a_{itj} はGUB制約 t における j 番目の要素に対応する i 番目のシステム制約の係数，また b_i は i 番目のシステム制約の右辺定数である．式(3)はGUB制約と呼ばれ，n_t はGUB制約 t に含まれる決定変数の数である．また，x_{tj} はGUB制約 t における j 番目の決定変数であり，0または1のどちらかの値をとる．

ここで，目的関数 $f_k(x)$ に対する反復 r でのメンバシップ関数 $\mu_k^{(r)}$ を次のように定義する．

$$(6)\quad \mu_k^{(r)}=\begin{cases} 1 & ;f_k(x)\leqq h_k^{(r)} \\ \dfrac{z_k^- - f_k(x)}{z_k^- - h_k^{(r)}} & ;h_k^{(r)}<f_k(x)\leqq z_k^- \\ 0 & ;z_k^-<f_k(x) \end{cases}\quad ,\ k=1,\ 2,\cdots,q$$

この線形型メンバシップ関数は，目標値とNISの距離に対する目的関数値とNISの距離の比によって目標に対する達成度を評価するものである．また，意思決定者は，満足する解が得られるまで反復的に目標 $h_k^{(r)}$ の設定を行なうことができ，このメンバシップ関数の採用により複数の目的関数に対する目標を設定することに専念できるため，得られた非優越解に対する判断が容易になる．

このメンバシップ関数を採用すると，上記のファジィ多目的0－1計画問題は，次のような単一目的のGUB型0－1線形計画問題として定式化できる．

$$(7)\quad \max\quad z=\sum_{k=1}^{q} w_k\mu_k^{(r)}$$

s.t.

$$(8)\quad \sum_{t=1}^{p}\sum_{j=1}^{nt} c_{ktj}x_{tj}+(z_k^- - h_k^{(r)})\mu_k^{(r)}=z_k^-,\quad k=1,\ 2,\cdots,q$$

式(2)，(3)，(4)

$$(9)\quad 0\leqq\mu_k^{(r)}\leqq 1,\ k=1,\ 2,\cdots,q$$

ここで，w_k は AHP (analytic hierarchy process) [15]によって得られる各目的関数 $f_k(x)$ の重要度に対応する重みである．

3. 計　算　法

m 個のシステム制約と p 個のGUB制約条件の下で，q 個の目的関数を最適化する効率的なファジィ多目的0－1線形計画問題(最小化問題)を解く計算手順を次に示す．

［ステップ1］ 意思決定者の基本的な設計方針を反映させるために，AHPによって各目的関数の重要度 w_k, $k=1,\ 2,\cdots,q$ を計算する．反復回数を $r=1$ とする．

［ステップ2］ 次に示す p 個のGUB制約をもつ単一目的の0－1線形計画（0-1LP（GUB））問題 k, $k=1,\ 2,\cdots,q$

$$\min\quad f_k(x)=\sum_{t=1}^{p}\sum_{j=1}^{nt} c_{ktj}x_{tj}$$

s.t.　式(2)，(3)，(4)

を解き，それぞれPIS(z_k^*)を求める．さらに，上記の目的関数の型（min／max）を反転させた（もとの目的関数の型が min なら max に，max なら min に）q 個の単一目的のGUB型0－1線形計画問題を解き，それぞれNIS(z_k^-)を求める．

［ステップ3］ 各目的関数に対する目標値 $h_k^{(r)}$ を，条件

$$z_k^* < h_k^{(r)} \leqq z_k^-,\ k=1,\ 2,\cdots,q$$

の範囲内で意思決定者が設定する．通常，初期値（1回目の目標値）は各目的関数に対するPISを与える．$r\geqq 2$ の場合は，各目的関数間のトレード・オフを考慮し，ステップ2で得られた重要度の高い目的関数に対する目標値 $h_k^{(r+1)}$ をできるだけ下げることなく，下位のレベルの目標値を下げることによって再設定を行なう．

［ステップ4］ 各GUB制約において，低いランクの実行可能解を探すために，次式(10)にもとづいて各GUB制約の集合の変数を昇順にランクづけを行ない，そのインデックスを求める．

$$(10)\quad r_{tj}=\sum_{k=1}^{q} c_{ktj}/z_k^- + \sum_{i=1}^{m} a_{itj}/b_i,\quad j=1,\ 2,\cdots,n_t,\ t=1,\ 2,\cdots,p$$

$$(11)\quad j_t=[j_{t1}j_{t2}\cdots j_{tn}] =\underset{j}{\mathrm{indsort}}\ \{r_{tj}|j=1,\ 2,\cdots,n_t\},\ t=1,\ 2,\cdots,p$$

ここで，indsort の ind は index の省略形であり，ソーティング(sorting)後のインデックスを採用することを意味する．以下同じ意味で ind を用いる．

［ステップ5］ すべての決定変数の値を0にする．各GUB制約の集合において，最高ランク（ランク1）の変数の値を1にする．

$$x_{tj}=1,\ t=1,\ 2,\cdots,p,\ j=1,\ 2,\cdots,n_t$$
$$k=[k_1k_2\cdots k_p]=[11\cdots1]$$

これらの変数の集合を初期解 x^1 とする．

［ステップ6］ 次式から各目的関数に対するPISと達成値の残差 s_k を求める．

$$(12)\quad s_k=\begin{cases} z_k{}^*-f_k(x^1) & ;f_k(x^1)<z_k{}^* \\ 0 & ;z_k{}^*\leqq f_k(x^1)\leqq z_k{}^- \\ z_k{}^- -f_k(x^1) & ;z_k{}^-<f_k(x^1) \end{cases}\quad ,\ k=1,\ 2,\cdots,q$$

[ステップ7] すべての k に対し，$s_k=0$ ならば，ステップ8へいく．そうでなければ各GUB制約の集合に対し，次式を満たすような低いランクの実行可能変数を探す．

$$(13)\quad t^*=\underset{t}{\mathrm{indmax}}\ \{\sum_{k=1}^{q}(c_{ktj'}-c_{ktj''})/z_k{}^- +\sum_{i=1}^{m}(a_{itj'}-a_{itj''})/b_i|s_k\neq 0,\ t=1,\ 2,\cdots,p\}$$
$$j'=j_{t^*,\,kt^*+1},\ j''=j_{t^*,\,kt^*}$$

残差の最大値が正の場合は低いランクの変数，負の場合には高いランクの変数の値を1にする．そのGUB制約で，いままで1をもっていた変数を0とし，最も大きな値をもつ目的関数の残差を計算する．残差が改善されていればステップ6へ戻る．そうでなければ，式(13)においてさらに小さい値をもつGUB制約の変数に対して残差を改善する変数を探す．そのような変数が存在すれば，その変数の値を1とする．存在しなければ，低いランクの変数を探す．

$$x_{tj}=1,\ x_{tj}=0,\ k_t=k_t+1$$

すべてのGUB制約において，そのような変数が存在しなければ，非実行可能問題として終了する．

同値の場合は，各GUB制約において，さらに低いランクの変数を選び，その中で最も大きな r_{tj} の値をもつ変数を探し，ステップ6へ戻る．最大残差が正の場合 $j_t=j_{t+1}$，負の場合，$j_t=j_{t-1}$ とおく．

[ステップ8] 次式により，各目的関数に対する目標値と達成値との差 e_k を求める．

$$e_k=|f_k(x^1)-h_k{}^{(r)}|,\ k=1,\ 2,\cdots,q$$

各GUB制約において，$\sum_{k=1}^{q}w_k\,e_k$ の値を最小にするような実行可能変数を探す．存在する場合には，その変数の値を1にし，同じGUB制約で1をもっていた変数の値を0にする．

[ステップ9] 意思決定者が得られた解に満足すれば，そのときの解を最良解として終了する．そうでなければ $r=r+1$ としてステップ3へ戻る．

4. 路線乗合バスの仕業編成計画問題

路線乗合バスの仕業編成計画は，既知のダイヤに対し，路線形態に関する条件，乗務員の勤務条件，経営上の条件などを考慮して乗務員と車両を各ダイヤに割り当てる問題である[11].

1) システム制約条件

①各路線のダイヤ t に乗務員 j を割り当てるとき1，そうでないとき0とする0-1決定変数 x_{tj} を導入すれば，各ダイヤ t にいずれか1人の乗務員を割り当てるので，次式のGUB制約を満足しなければならない．

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{n}x_{tj}=1,\ t=1,\ 2,\cdots,p$$

②1人の乗務員は運行時間の重なるダイヤに同時に乗務することはできない．したがって，ダイヤ t と運行時間の重なるダイヤの集合を P_t とすれば，次式を満足しなければならない．

$$(14)\quad \sum_{k\in Pt}x_{jk}\leqq 1,\ j=1,\ 2,\cdots,n,\ t=1,\ 2,\cdots,p$$

2) 目的関数

①拘束時間に関する目標

乗務員 j の拘束時間以外の時間に運行のおよぶダイヤの集合を Q_j とすれば，次式を満足することが目標となる．

$$(15)\quad \sum_{1\in Qj}x_{j1}\lesssim 0,\ j=1,\ 2,\cdots,n$$

②実乗時間に関する目標

ダイヤ t の運行所要時間を F_t，乗務員 j に対して定めた勤務形態の実乗時間の上限を U_j とすると，次式を満足することが目標となる．

$$(16)\quad \sum_{t=1}^{p}F_t x_{jt}\lesssim U_j,\ j=1,\ 2,\cdots,n$$

5. 数値実験例

ここでは，GUB制約をもつファジィ多目的0-1計画問題の応用例として，前章で定式化した路線乗合バスの最適仕業計画問題をとりあげ，従来の手法と比較することにより，本稿で示す手法の有効性を示す．

各ダイヤの運行所要時間 F_t および集合 P_t の要素となるダイヤ番号は，**表1** で与えられるものとする．この場合の時間帯の重なるダイヤ数の最大値は3である．よって，仕業編成するために必要な最小乗務員数は3人であり，$n=3$ とする．また，各乗務員に割り当てられる勤務形態として，拘束時間，実乗時間の上限 U_j および Q_j に属するダイヤ番号を**表2** に示す．

以上のデータ[11]をもとに，同一条件でモデルの作成を行なうと，次のような決定変数の数24，制約条件の数32(GUB制約条件8を含む)，さらに6目的関数からな

表 1　運行所要時間 F_t と集合 P_t

ダイヤ番号 t	1	2	3	4	5	6	7	8
運行所要時間 F_t	120	150	120	150	120	120	150	120
P_t	1, 2	2, 3, 4	3, 4	4, 5	5, 6, 7	6, 7, 8	7, 8	8

表 2　実乗時間の上限 U_j および Q_j に属するダイヤ番号

乗務員 j	実乗時間の上限 U_j	Q_j に属するダイヤ
1	8 時 間	7, 8
2	8 時 間	1, 8
3	8 時 間	1, 2

るファジィ 0－1 線形計画問題となる．ただし，本論文で提案する手法では，最後の 8 個のＧＵＢ制約式は変数の組として与えられ，制約式の形で陽的に用いない．

$x17+x18 \lesssim 0$

$x21+x28 \lesssim 0$

$x31+x32 \lesssim 0$

$120x11+150x12+120x13+150x14+120x15$
$\quad +120x16+150x17+120x18 \lesssim 360$

$120x21+150x22+120x23+150x24+120x25$
$\quad +120x26+150x27+120x28 \lesssim 360$

$120x31+150x32+120x33+150x34+120x35$
$\quad +120x36+150x37+120x38 \lesssim 360$

s．t．　$x11+x12 \leqq 1$

$x21+x22 \leqq 1$

$x31+x32 \leqq 1$

$x12+x13+x14 \leqq 1$

$x22+x23+x24 \leqq 1$

$x32+x33+x34 \leqq 1$

$x13+x14 \leqq 1$

$x23+x24 \leqq 1$

$x33+x34 \leqq 1$

$x14+x15 \leqq 1$

$x24+x25 \leqq 1$

$x34+x35 \leqq 1$

$x15+x16 \leqq 1$

$x25+x26+x27 \leqq 1$

$x35+x36+x37 \leqq 1$

$x16+x17+x18 \leqq 1$

$x26+x27+x28 \leqq 1$

表 3　数値例の計算結果

	目的関数値	目標値 h_k	メンバシップ関数値	1 をもつ決定変数（他の変数は 0）
$f_1(x)$	0.0	0.0	1.0	$x11, x14, x16$
$f_2(x)$	0.0	0.0	1.0	$x22, x27$
$f_3(x)$	0.0	0.0	1.0	$x33, x35, x38$
$f_4(x)$	390.0	360.0	0.813	
$f_5(x)$	300.0	360.0	1.0	
$f_6(x)$	360.0	360.0	1.0	

$x36+x37+x38 \leqq 1$

$x17+x18 \leqq 1$

$x27+x28 \leqq 1$

$x37+x38 \leqq 1$

$x18 \leqq 1$

$x28 \leqq 1$

$x38 \leqq 1$

$$\sum_{t=1}^{8} x_{tj}=1,\ j=1,\ 2, \cdots, 8$$

この問題を本論文で提案する手法を用いて解いた場合の計算結果を表 3 に示す．

6.　定量的評価

表 3 の結果から，この問題では，乗務員 1 がダイヤ1, 4, 6，乗務員 2 がダイヤ2, 7，乗務員 3 がダイヤ3, 5, 8 にそれぞれ乗務することになる．このときのメンバシップ関数は，4 番目の目的関数に対応する μ_4 を除いて1.0 となり，目標を達成していることがわかる，しかも $\mu_4=0.813$ であり，目標の達成度合いとしては十分満足できると判断してよい．この解は，太田らが示した結果[11] と一致している．

本数値例では，太田らの数値例と同一条件で比較を行なうために，各目的関数に対する重みをすべて等しく設定したが，ここで提案する手法では，各目的関数（たとえば，拘束時間や実乗時間，さらに各乗務員など）に対して容易に重みづけを行なうことができ，得られた解に満足できない場合には意思決定者が満足するまで繰り返し目標値を設定できる．しかも目標の達成度合いをメンバシップ関数値により知ることができるため，意思決定者の判断が容易になる利点をもつ．

さらに，本数値例の計算時間は同氏らの約 3 分に対して1/2に減少する（同程度の16ビット・パソコンによる）．また，この問題は全制約条件に対するＧＵＢ制約の割合

が20%程度であることを考慮すると，本論文で提案した手法の優位性が明らかとなるであろう．

7. あとがき

本論文では，意思決定者のもつあいまいさと大規模な0－1線形計画問題に特有なGUB構造を活かしたファジィ多目的0－1線形計画問題の効率的な解法を提案した．ここで提案した手法には次のような特徴がある．

(1) 各目的関数値に対する目標値の設定にファジィ理論を導入することによって，意思決定のもつ判断のあいまいさを考慮することができる．

(2) AHPにもとづいた各目的関数の重要度に対応する重みを状況に応じて設定し直すことが可能である．

(3) 大規模0－1線形計画問題特有な構造の1つであるGUB構造を活用した効率的な解法である．

さらに，路線バスの最適仕業編成計画問題への応用を試み，数値例により提案した手法の有効性を確認した．

参考文献

[1] 福川忠昭：経営計画と多目的数理計画法．オペレーションズ・リサーチ **27**, 6 (1982), 320-324.

[2] 伏見多美雄，福川忠昭，山口俊和：経営の多目標計画．森北出版，1988.

[3] Gen, M.: Reliability Optimization by 0-1 Programming for a System with Several Failure Modes. *Distributed Computing Network Reliability* (eds. Rai, S. and Agrawal, D. P.), IEEE Comp. Soc. Press, Los Angeles, 1990, 252-256.

[4] 玄光男，井田憲一：線形計画・目標計画プログラム．電気書院，1984.

[5] 玄光男，井田憲一，李在旭：GUB構造を伴う0-1目標計画問題の一解法とそのシステム信頼性の最適化問題への応用．信学論(A) **73**-A, 3 (1990), 557-563.

[6] Hwang, C. L. and Masud, A. S. M.: *Multiple Objective Decision Making*, Springer-Varlag, 1979.

[7] 井田憲一，玄光男：多目的線形計画のマイコン・パッケージ開発と数値実験．日本経営工学会誌**39**, 4 (1988), 247-253.

[8] 井田憲一，佐々木正仁，玄光男：GUB制約をもつ2目的0-1線形計画法によるシステム信頼性の最適化．信学論(A) **72**-A, 7 (1989), 1117-1124.

[9] Ignizio, J. P.: *Linear Programming in Single & Multiple-Objective Systems*. Prentice-Hall, 1982. (高桑宗右ェ門訳：単一目標・多目標システムにおける線形計画法．コロナ社，1985)

[10] 中島勝，石原巧，太田雅春，人見勝人：パソコンによる路線乗合バス運行管理システムの開発．オフィス・オートメーション **6**, 3 (1985), 54-56.

[11] 太田雅春，中村敬一，人見勝人：路線乗合バスの最適仕業編成計画に関する研究．日本経営工学会誌 **38**, 5 (1987), 300-305.

[12] 坂和正敏：ファジィ多目的最適化問題と対話型ファジィ意思決定．計測と制御 **29**, 12 (1990), 1097-1102.

[13] 佐々木正仁，玄光男，井田憲一：ファジィ多目的0-1計画法による信頼性最適化問題の一解法．信学論(A) **J74**-A, 6 (1991).

[14] Steuer, R. E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. John Wiley & Sons, Inc., 1986.

[15] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法．日科技連，1986.

[16] Wren, A., ed.: *Computer Scheduling of Public Transport*. North-Holland, 1981.

[17] Zimmermann, H. J.: *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*. Kluwer Academic Pub., 1987.