多目的計画問題に対する対話型ファジィ計画法とその応用

坂和 正敏, 矢野 均

1. はじめに

与えられた制約条件のもとで，複数個の相競合する目的関数を同時に最適化するという多目的計画問題に対しては，複数個の目的関数を同時に最適化するという（完全）最適解は一般には存在しないので，ある目的関数を改善するためには少なくとも他の1つの目的関数を犠牲にせざるを得ないような解，すなわち，パレート最適解が導入されてきている．しかし，パレート最適解は一般には無限個存在するので，現実の意思決定においては，人間としての意思決定者（Decision Maker : DM）が，自己の選好にもとづいてパレート最適解の集合の中から最終的な合理的な解を選択しなければならない．ところがDMの選好構造を充分に反映させるいわゆる選好関数は本来未知で，また直接同定することも困難である場合が多い．このような状況において，DMの選好関数を大域的に固定することなく，対話により得られる局所的な選好情報にもとづいてDMの選好解を導出するという，いわゆる対話型手法が数多く提案されてきた［2, 3］.

しかし，人間の判断のあいまい性を考慮すれば，ベクトル最小化問題として定式化された多目的計画問題に対してDMは“各目的関数をだいたいある値以下にしたい”というファジィ目標をもつものと考えられる．このような観点から，1978年に H. J. Zimmermann［12］は，多目的線形計画問題に対するDMのファジィ目標が線形のメンバシップ関数で表わされる場合，最大化決定［1］にしたがえば，線形計画問題になることを示した．

ところが従来のファジィ計画法［4］では，暗黙のうちにDMは最大化決定にしたがうことが仮定されており，各目的関数に対するメンバシップ関数を決定した後のDMとの対話が考慮されていなかった．このような問題点を克服するために，多目的計画問題の各目的関数に対するDMのファジィ目標をメンバシップ関数で規定した後，DMの設定する基準メンバシップ値を対話的に更新することにより，DMの満足解を導出するという対話型ファジィ満足化手法が，線形［9］，線形分数［8］，非線形［6］の場合に対して提案されている．さらに，DMの各目的関数に対する判断のあいまい性のみならず，定式化に携わった専門家の人間としての判断のあいまい性をも考慮して，各々の目的関数と制約式の係数にファジィ係数が含まれる多目的計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法が，線形［7］，線形分数［11］，非線形［5］の各々の場合に対して提案されてきている．

本稿では，紙面の制約上，これらの研究のすべてを紹介することはできないので，多目的計画問題に対するDMのファジィ目標を考慮した対話型ファジィ計画法とその環境管理計画問題への適用結果［6］について解説する．

2. 多目的計画問題に対する対話形ファジィ計画法

一般の多目的計画問題（MOP）は，複数個の互いに相競合する目的関数を与えられた制約条件のもとで何らかの意味で最適化するという問題として定義され，形式的には，次のようなベクトル最小化問題として定式化される．

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad f(x)=(f_1(x),\cdots,f_k(x)) \qquad (1)\\ &\text{subject to} \quad x\in X=\{x\in E^n \mid g_j(x)\leq 0,\\ &\qquad\qquad\qquad j=1,\cdots,m\}\end{aligned}$$

ここで，xはn次元決定変数ベクトル，$f_1(x),\cdots,f_k(x)$はk個の相競合する目的関数，$g_1(x),\cdots,g_m(x)$はm個の制約関数で，Xは制約領域を表わす．

MOPでは，目的関数がベクトルであるため，通常のスカラーの目的関数の最適解の代わりに，ある目的関数の値を改善するためには少なくとも他の1つの目的関数の値を改悪せざるを得ない解，すなわち，パレート最適

さかわ　まさとし　広島大学　工学部
〒724 東広島市鏡山1—4—1
やの　ひとし　名古屋市立女子短期大学

解が定義されている．

定義1（パレート最適解）

$x^* \in X$ に対して，$f(x) \leq f(x^*)$ すなわち $f(x) \leqq f(x^*)$ かつ $f(x) \neq f(x^*)$ となる $x \in X$ が存在しないとき，x^* をパレート最適解であるという．

ベクトル最小化問題として定式化されるMOPに対して，人間の判断のあいまい性を考慮すれば，DMは「$f_i(x)$ をだいたい a_i 以下にしたい」というようなファジィ目標をもつものと考えられる．ファジィ計画法では，さらにより一般的な場合として，DMが「$f_i(x)$ はだいたい a_i 以下にしたい」，あるいは「$f_i(x)$ はだいたい b_i 以上にしたい」というファジィ目標のみならず，「$f_i(x)$ はだいたい c_i ぐらいにしたい」というファジィ目標をももつような，一般化された多目的計画問題を取り扱うことができる．このような一般化多目的計画問題（GMOP）は，形式的に次のように表わすことができる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{fuzzy min} & f_i(x) & i \in I_1 \\
\text{fuzzy min} & f_i(x) & i \in I_2 \\
\text{fuzzy equal} & f_i(x) & i \in I_3 \\
\text{subject to} & \multicolumn{2}{l}{x \in X\ ;\ I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \cdots, k\}}
\end{array}
\qquad (2)
$$

ここで，fuzzy min $f_i(x)$ あるいは fuzzy max $f_i(x)$ は「$f_i(x)$ をだいたい a_i 以下，あるいは b_i 以上にしたい」というファジィ目標を表わし，fuzzy equal $f_i(x)$ は「$f_i(x)$ はだいたい c_i ぐらいにしたい」というファジィ目標を表わし，それぞれ対応するメンバシップ関数により規定される．

DMのファジィ目標として fuzzy equal $f_i(x)$ が含まれる場合には，$f_i(x)$ の大小関係にもとづいて定義されているパレート最適解の概念をそのまま適用することはできない．そこで，目的関数の代わりにメンバシップ関数の大小関係にもとづいて定義されるパレート最適解を導入し，特にM-パレート最適解と呼ぶ．

定義2（M-パレート最適解）

$x^* \in X$ に対して $\mu_f(x) \geq \mu_f(x^*)$ となる $x \in X$ が存在しないとき，x^* をM-パレート最適解であるという．

一般に，k 個の相競合するメンバシップ関数に対して，いわゆる統合関数とでも呼ぶべき関数

$$\mu_D(\mu_f(x)) = \mu_D(\mu_{f1}(x), \cdots, \mu_{fk}(x)) \qquad (3)$$

を導入すれば，次のようなファジィ多目的意思決定問題が形式的に定義できる．

$$\underset{x \in X}{\text{maximize}} \quad \mu_D(\mu_f(x)) \qquad (4)$$

ここで，統合関数 $\mu_D(\mu_f(x))$ の値は，k 個のファジィ目標に対するDMの全体としての満足度を表わしていると解釈することができる．ここで，もしDMの統合関数 $\mu_D(\mu_f(x))$ の関数形を大域的に同定することができれば，後は通常の単一目的計画問題を解くことに帰着され，話は簡単である．しかし一般にはDMのこのような統合関数の関数形を大域的に同定することは非常に困難な作業であると思われる．したがってこのような場合には，DMの陰に存在する統合関数を大域的に陽に同定することなく，DMとの対話により，局所的な選好情報を引き出し，最終的にDMが満足できる解，すなわち満足解を求めるという対話型手法が望ましい．このような観念から各目的関数に対するメンバシップ関数が決定された後，メンバシップ関数空間において，DMの設定する基準点にある意味において近いM-パレート最適解を求め，もし満足できなければ対話的に基準点を更新することにより，最終的にM-パレート最適性の保証された満足解を求めるという手法が，提案され発展してきている[6, 8, 9]．

GMOP（2）の目的関数 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_k(x))^T$ に対するDMのメンバシップ関数 $\mu_f(x) = (\mu_{f1}, \cdots, \mu_{fk}(x))^T$ が決定された後，各メンバシップ関数に対してDMの志望水準を反映させる基準点 $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_k)^T$ が設定されると，DMの要求にある意味において近い解は，たとえば，次のようなミニマックス問題を解くことにより求められる．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x \in X, v}{\text{minimize}} & v \\
\text{subject to} & \bar{\mu}_i - \mu_{fi}(x) \leqq v, i = 1, \cdots, k
\end{array}
\qquad (5)
$$

ここで基準点 $\bar{\mu}_1$ は，Wierzbicki [10] の目的関数空間での基準点の考えをメンバシップ関数空間に拡張したものであり，基準メンバシップ値と呼ばれる．

しかし，ミニマックス問題を解いて得られる最適解はもし唯一でなければ，M-パレート最適解とは限らない．したがって，常にM-パレート最適性のテストを行なわなければならないという問題が生じる．このような問題点を回避するために，ミニマックス問題の代わりに，次のような拡張ミニマックス問題を解くことによりM-パレート最適解を求める．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x \in X, v}{\text{minimize}} & v + \rho \sum_{i=1}^{k} (\bar{\mu}_i - \mu_{fi}(x)) \\
\text{subject to} & \bar{\mu}_i - \mu_{fi}(x) \leqq v, i = 1, \cdots, k
\end{array}
\qquad (6)
$$

ここで，ρ は十分小さい正の数である．

この拡張ミニマックス問題を解いて得られる最適解とGMOP（2）のM-パレート最適解との関係は，次の定

理に与えられる．

定理1

(1) もし，$x^* \in X$ がある基準メンバシップ値に対する拡張ミニマックス問題の最適解であれば，x^* はGMOP(2)のM-パレート最適解である．

(2) もし，$x^* \in X$ がGMOP(2)のM-パレート最適解であれば，x^* が十分小さな ρ に対する拡張ミニマックス問題に対する最適解となるような基準メンバシップ値が存在する．

さて，DMが現在のM-パレート最適解で満足するのか，あるいは基準メンバシップ関数を更新するのかの判断のための情報として．現在の解における各メンバシップ関数間のトレード・オフ比を与えることが考えられる．このトレード・オフ比は，拡張ミニマックス問題のメンバシップ関数に関する制約式のラグランジュ乗数を λ_i とすると，$\lambda_i > 0\ i=1, \cdots, k$ であれば，次式で与えられる．

$$-\frac{\partial \mu_{fi}(x)}{\partial \mu_{f1}(x)} = \frac{\lambda_1 + \rho}{\lambda_i + \rho}, \quad i=1, 2, \cdots, k \tag{7}$$

以上の議論により，M-パレート最適性の保証されたDMの満足する解を導出するための対話型アルゴリズムを次のように構成することができる．ここで，*印のついた手順では，DMとの対話が行なわれる．

《対話型ファジィ計画法のアルゴリズム》

手順0：与えられた制約領域における各目的関数の個別の最小値と最大値を求める．

手順1*：各目的関数に対する個別の最小値と最大値を考慮して，メンバシップ関数を決定する．

手順2：初期の基準メンバシップ値を1に設定する．

手順3：設定された基準メンバシップ値に対して，拡張ミニマックス問題を解き，M-パレート最適解と現在の解における各メンバシップ関数間のトレード・オフ比を求める．

手順4*：現在の解に満足なら終了，そうでなければ，現在のメンバシップ関数値とトレード・オフ比を考慮して，基準メンバシップ値を更新して手順3へもどる．

ここで，DMは，あるメンバシップ関数を改善するためには，他のいずれかのメンバシップ関数を犠牲にせざるを得ないことに注意しよう．

3. 大阪市の環境管理計画問題への応用

近年地球規模での環境破壊が深刻化しており，資源の開発と自然環境の保存をいかにバランスよく調和させるかが大きな社会問題となっている．ここでは，このような背景のもとで大阪市を対象地域として，環境要因としてのCOD（化学的酸素要求量）量と SO_2（二酸化硫黄）量をおさえながら，生産量を高めるという3つの目的関数をとりあげ，産業 j の資本金と労働者数を決定変数とする大阪市の環境管理計画問題を，多目的計画問題として定式化し，対話型ファジィ計画法を適用した結果を紹介する [4, 6]．

生産量を高めるための目的関数として，Cobb-Douglas 型の生産関数を用いて，次の目的関数の最大化を考える．

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n} A_j K_j^{1-b_j} L_j^{b_j} \tag{8}$$

ここで，K_j は産業 j の資本金（有形固定資産総額），L_j は産業 j の労働者を表わす決定変数である．

環境汚染の要因として，水質汚濁の指標COD量および大気汚染の指標 SO_2 量をできるだけ少なくするため，産業 j の単位出荷額あたりの環境要因の放出量 ω_{ij} ($i=1$: COD, $i=2$: SO_2) と，資本係数（産業 j の単位出荷額あたりの資本金）k_j を用いて，次の2つの目的関数の最小化を考える．

$$f_2 = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{1j}/k_j) \cdot K_j \tag{9}$$

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{2j}/k_j) \cdot K_j \tag{10}$$

制約式として，産業構造の急激な変化は望めないので，資本と労働に対する上下限制約

$$\alpha K_{j0} \leq K_j \leq \beta K_{j0}, \alpha' L_{j0} \leq L_j \leq \beta' L_{j0} \tag{11}$$

を考える．ここで，K_{j0}, L_{j0} は，それぞれ産業 j の現状（1975年）の資本金あるいは労働者数で $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ は，資本と労働の移動に対する摩擦を示す係数である．

また，利用できる土地や水は限りがあるため，産業 j の単位出荷額あたりの土地 ($i=1$) あるいは水 ($i=2$) の要求量 γ_{ij}，上限値 Γ_j および係数 k_j を用いて，土地と水の要求量に対する次の制約式を考える．

$$\sum_{j=1}^{n} (\gamma_{ij}/k_j) \cdot K_j \leqq \Gamma_i (i=1, 2) \tag{12}$$

さらに，技術的制約として，全体の資本集約度（総資本金と総労働者数の比）の上限値 q_1 と下限値 q_2 を用いた次の制約式を考える．

$$q_2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} K_j\right) / \sum_{j=1}^{n} L_j \leqq q_1 \tag{13}$$

定式化された多目的計画問題の各目的関数に対して，DMがあいまいな目標をもつことを仮定すると，対象と

表 1 産業の分類

コード	産業名	コード	産業名
1	食品	11	皮革製品
2	繊維	12	窯業・土石製品
3	衣服	13	鉄および鉄鋼
4	木材・木製品	14	非鉄金属
5	家具	15	加工金属製品
6	パルプ・紙製品	16	一般機械
7	出版・印刷	17	電気機械
8	化学品・化学製品	18	輸送機械
9	石炭・石油製品	19	精密機械
10	ゴム製品	20	その他

する問題は次のように表わされる.

$$\text{fuzzy max} \quad f_1=\sum_{j=1}^{n} A_j K_j^{1-b_j} L_j^{b_j}$$

$$\text{fuzzy min} \quad f_2=\sum_{j=1}^{n}(\omega_{1j}/k_j)\cdot K_j$$

$$\text{fuzzy min} \quad f_3=\sum_{j=1}^{n}(\omega_{2j}/k_j)\cdot K_j$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{ij}/k_j)\cdot K_j \leqq \Gamma_i (i=1,2) \qquad (14)$$

$$q_2 \leqq (\sum_{j=1}^{n} K_j)/(\sum_{j=1}^{n} L_j) \leqq q_1$$

$$\alpha K_{j0} \leq K_j \leq \beta K_{j0}, j=1,\cdots,n$$

$$\alpha' L_{j0} \leq L_j \leq \beta' L_{j0}, j=1,\cdots,n$$

対象とした産業分類 ($n=20$) を**表 1** に示す.

さて, 問題 (14) に対する対話型ファジィ計画法の適用例を, 仮想的なDMとの対話過程 (**表 2**) にもとづいて説明しよう.

与えられた制約領域における各目的関数の個別の最小値と最大値が示された後, DMとの対話により, 目的関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ に対するメンバシップ関数が, それぞれ, 次のように決定されたと仮定する.

fuzzy max f_1 : 線形型

$(f_1^0, f_1^1)=(4800000, 5020000)$

fuzzy min f_2 : 正接双曲線型

$(f_2^{0.25}, f_2^{0.5})=(147000, 145000)$

fuzzy min f_3 : 指数型

$(f_3^0, f_3^{0.5}, f_3^1)=(110000, 104000, 102000)$

ここで, f_i^a は f_i のメンバシップ値が a であるような目的関数の値を表わす.

次に, 初期基準メンバシップ値 1 に対して, 拡張ミニマックス問題が解かれ, 対応するパレート最適解とメンバシップ関数間のトレード・オフ比が示される. DMは現在のパレート最適解には満足できないため, 現在の解とトレード・オフ比とを考慮して, $\mu_{f1}(x)$ を犠牲にして, $\mu_{f2}(x)$ と $\mu_{f3}(x)$ を改善しようと考えて, 対応する基準メンバシップ値をそれぞれ (0.5, 0.6, 0.55) に更新している. このことは, 生産量を抑えても, 環境保全を重視しようという意識が働いていることを示す. 以下同様な対話が, DMの満足する解が導出されるまで繰

表 2 対話過程

イテレーション		1	2	3	4
基準メンバシップ値	$\bar{\mu}_1$	1	0.5	0.49	0.48
	$\bar{\mu}_2$	1	0.6	0.6	0.62
	$\bar{\mu}_3$	1	0.55	0.58	0.57
μ_{fi} 値	μ_{f1}	0.5251	0.4824	0.4678	0.4568
	μ_{f2}	0.5251	0.5824	0.5778	0.5968
	μ_{f3}	0.5251	0.5324	0.5578	0.5468
f 値	f_1	4,915,513	4,906,139	4,902,924	4,900,487
	f_2	144,817	144,394	144,429	144,286
	f_3	103,865	103,826	103,696	103,752
$-\partial\mu_{f2}/\partial\mu_{f1}$		2.8539	0.9633	1.0386	0.9431
$-\partial\mu_{f3}/\partial\mu_{f1}$		1.1151	1.3230	1.3494	1.3559

表 3 満足解に対する資本金と労働者数の配分

産業	1975 資本金 (100万円)	1975 労働者数 (人)	提案 資本金 (100万円)	提案 労働者数 (人)
1	31,653	22,527	28,579	25,783
2	22,981	17,521	20,749	18,740
3	10,114	18,088	9,132	19,347
4	13,479	8,237	14,417	8,810
5	8,581	8,275	9,178	8,851
6	36,996	16,041	33,403	17,157
7	75,595	43,494	68,254	47,008
8	86,440	34,161	78,047	36,539
9	2,004	827	1,809	885
10	5,161	4,195	4,660	4,487
11	3,764	5,512	3,776	5,896
12	15,538	8,472	14,029	9,062
13	108,036	28,964	103,740	30,980
14	28,750	10,147	25,958	10,853
15	75,339	52,749	80,583	56,420
16	81,541	52,358	87,216	56,002
17	30,677	26,736	32,812	28,597
18	32,687	18,597	38,813	19,891
19	4,577	4,148	4,896	4,437
20	26,266	22,701	28,094	24,280

り返される．本例では，イテレーション4でDMの満足するパレート最適解が導出されている．

DMとの対話により導出された満足解に対する資本 K_1 と労働 L_1 の最適配分は，1975年度の数値とともに表3に要約されている．表3の結果から，産業別の資本は1975年を基準にとれば全般的に減少していることがわかる．しかし，木材や家具産業・電気や機械産業などは資本が増加しているが，これらの産業は，石炭・石油や化学産業などに比べると単位出荷額あたりの環境要因の放出量が少なく，環境保全の立場から考えると比較的好ましい産業であり，DMの生産量の増大よりも環境保全を重視している立場に対応した結果といえる．また，労働は，環境要因とは全く関係なく生産関数のみに考慮されているため，ほとんどの産業で増加している．

ここで仮定されたDMは，環境保全をかなり重視しているが，たとえば，環境保全は最低限許容できる範囲内で，生産を優先させたいと考えるDMに対しては，もちろん彼の選好構造にもとづいた結果が，対話型ファジィ計画法により求められる．

参考文献

[1] Bellmann, R. E. and Zadeh, L. A.: Decision Making in a Fuzzy Environment, *Management Sci.*, Vol. 17 (1970), 141-164.

[2] Chankong, V. and Haimes, Y. Y.: *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, 1983.

[3] 坂和正敏：非線形システムの最適化《一目的から多目的へ》，森北出版，1986.

[4] 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版，1989.

[5] 坂和正敏，矢野　均：ファジィパラメータを含む多目的非線形計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法，電子通信学会論文誌，Vol. J68-A (1983), 1038-1046.

[6] Sakawa, M. and Yano, H.: An Interactive Fuzzy Satisficing Method Using Augmented Minimax Problems and Its Applications to Environmental Systems, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15 (1985), 720-729.

[7] Sakawa, M. and Yano, H.: An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Generalized Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35 (1990), 125-142.

[8] 坂和正敏，矢野　均，湯峯　亨：多目的分数計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法，電子通信学論文会誌，Vol. J69-A (1986), 32-41.

[9] Sakawa, M., Yano, H. and Yumine, T.: An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Linear Programming Problems and Its Application, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-17 (1987), 654-661.

[10] Wierzbicki, A. P.: The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization, in Fandel, G. and Gal, T. (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application* (1980), 468-486.

[11] Yano, H. and Sakawa, M.: An Interactive Fuzzy Decision Making for Generalized Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32 (1989), 245-261.

[12] Zimmermann, H. J.: Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1 (1978), 45-55.