可能性理論にもとづく ファジィ多目的線形計画法

市橋 秀友，乾口 雅弘

1. はじめに―― ファジィ数理計画アプローチ

数理計画問題を定式化するとき，いくつかの困難さに直面するであろう．その困難さの1つとして，不明確な知識のもとで係数をいかに定めればよいのか，漠然とした希求水準のもとで制約条件をどのように設定すればよいのかなどの知識，選好のあいまいさに起因する困難さが考えられる．これらの値を無理に実数値として定めると，定式化された問題に解が存在しなかったり，現実的でない解が得られたりすることがある．そのため，再度，定めた値を検討したり，原因を分析する必要が生じ，多くの労力と時間を要す可能性がある．そこで，値がはっきりと明確に定められないことを反映して，値をあいまいなままファジィ数として表現するファジィ数理計画法が提案されている[1]．

ファジィ数理計画法のアプローチを図示すれば，**図1**のようになる．すなわち，ファジィ数理計画法では，通常の数理計画アプローチとは異なり，いったん，現実問題をファジィモデル(ファジィパラメータを含むモデル)で表現する．このファジィモデルは，あいまいさを取り扱っているため，問題が明確に記述されていない．そこで，種々の解釈にもとづき，あいまいさを処理し，ファジィモデルを通常の数学モデルへ変換する(フェーズ1)．この数学モデルは，通常の数理計画問題であるので，通常の最適化手法により解を求めることができる（フェーズ2)．得られた解は，数学モデルに対して，明らかに最適解あるいは，有効解になるが，ファジィモデルに対してどのような解になっているかわからない．そこで，ファジィモデルに対する最適性，有効性などの妥当性を検討することが考えられる(フェーズ3)．不適当な解と判定されれば，ファジィモデルを解釈し直し，同様の手順を繰り返す．このように，ファジィ数理計画アプローチでは，現実問題からばかりではなく，ファジィモデルからも解の妥当性を検討することが考えられる．

本稿では，簡単な例題に対し，ファジィ多目的線形計画法を適用し，可能性理論[2]にもとづく1つのファジィ数理計画アプローチを簡単に紹介する．なお，種々のファジィ数理計画法については文献[1]を参照されたい．

2. 例題とファジィ多目的線形計画問題による定式化

次の例題を考える．

[例題] ある会社では，製品P，Qそれぞれを機能の異なる2つの機械M，Nを用いて生産し，販売している．製品Pを1単位生産するのに，機械Mでだいたい2単位時間，機械Nでだいたい6単位時間要し，製品Qを1単

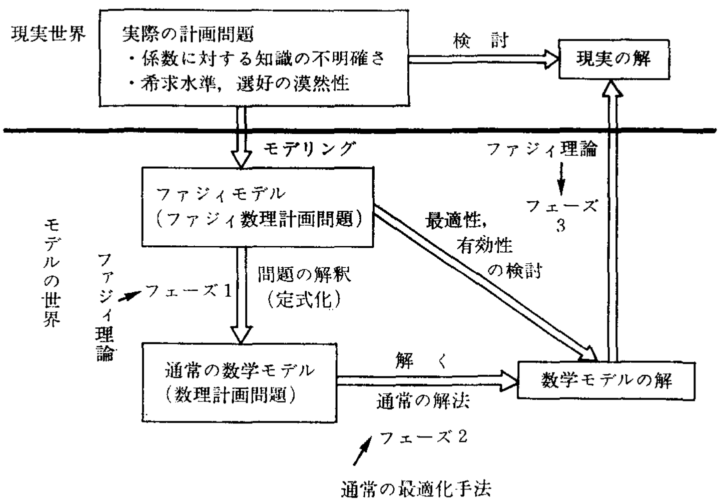

図1 ファジィ数理計画アプローチ

いちはし ひでとも，いぬいぐち まさひろ 大阪府立大学工学部
〒591 堺市百舌鳥梅町4丁804

位生産するのに，機械Mでだいたい3単位時間，機械Nでだいたい4単位時間要す．機械M，Nの1期当りの使用時間をそれぞれ，できるだけだいたい900単位時間，だいたい1800単位時間以内にしたい．製品P，Qの1単位当りの利益は，それぞれ，7千円ぐらい，9千円ぐらいであり，販売価格は，それぞれ，ほぼ60千円，ほぼ45千円である．この会社では，できるだけ2200千円ぐらいの売上をあげたく，3400千円ぐらいの利益を得る可能性があって欲しい．このとき，製品P，Qをそれぞれ何単位生産すればよいだろうか．

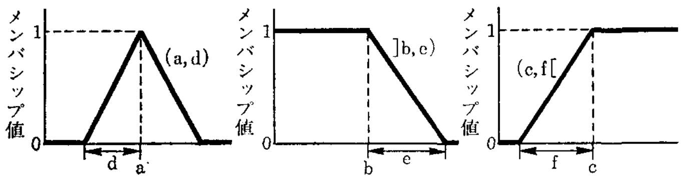

図 2 ファジィ数とファジィ目標

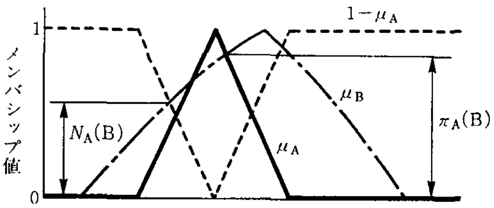

図 3 可能性測度と必然性測度

この問題の下線部にあいまいさが存在している．このあいまいさを無視して，線形計画問題として定式化すると，

$2x_1+3x_2 \leqq 900$ 〔機械Mの使用制限〕 (2.1 a)

$6x_1+4x_2 \leqq 1800$ 〔機械Nの使用制限〕 (2.1 b)

$60x_1+45x_2 \geqq 22000$ 〔売上高の目標〕 (2.1 c)

$7x_1+9x_2 \geqq 3400$ 〔総利益の目標〕 (2.1 d)

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$ (2.1 e)

となり，解は存在しない．ただし，x_1，x_2 はそれぞれ，製品P，Qの生産量を表わす．

そこで，下線部のあいまいさを反映して，図2に示すような三角型ファジィ数 (a, b)，線形のファジィ目標 $]b, e)$，$(c, f[$ を定め，次のファジィ多目的線形計画問題として定式化する．

$\underset{\sim}{2}x_1+\underset{\sim}{3}x_2 \precsim 900$ 〔機械Mの使用制限〕 (2.2 a)

$\underset{\sim}{6}x_1+\underset{\sim}{4}x_2 \precsim 1800$ 〔機械Nの使用制限〕 (2.2 b)

$\underset{\sim}{60}x_1+\underset{\sim}{45}x_2 \succsim 22000$ 〔売上高の目標〕 (2.2 c)

$\underset{\sim}{7}x_1+\underset{\sim}{9}x_2 \succsim 3400$ 〔総利益の目標〕 (2.2 d)

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$ (2.2 e)

ただし，$\underset{\sim}{2}=(2, 0.4)$，$\underset{\sim}{6}=(6, 1)$，$\underset{\sim}{3}=(3, 0.3)$，$\underset{\sim}{4}=(4, 0.3)$，$\underset{\sim}{60}=(60, 5)$，$\underset{\sim}{45}=(45, 4)$，$\underset{\sim}{7}=(7, 0.5)$，$\underset{\sim}{9}=(9, 0.6)$ なる三角型ファジィ数であり，値の取りうる範囲を示している．$\precsim$，$\succsim$ は“だいたい～以下”，“だいたい～以上”を示すファジィ不等号であり，$\precsim 900$，$\precsim 1800$，$\succsim 22000$，$\succsim 3400$ はそれぞれ，]900, 100)，]1800, 240)，(22000, 4000[，(3400, 400[なるファジィ目標を表わしている．これらのファジィ目標は，満足できる範囲を表わしている．

3. 通常の数理計画問題への変形（フェーズ 1）

可能性理論にもとづき，(2.2) 式のファジィ線形計画問題を通常の数理計画問題へ変形する．ファジィ数理計画問題は，種々の解釈により，さまざまな定式化が考えられるが[1, 3]，ここでは，その1つを述べる．まず，可能性理論における2つの測度（可能性測度と必然性測度）を定義する．ファジィ集合A，Bが与えられたとき，ファジィ集合Aのもとでの可能性測度Π，必然性測度Nは，それぞれ，次のように定義される（図3参照）．

$$\Pi_A(B)=\sup_y \min\{\mu_A(y),\ \mu_B(y)\} \quad (3.1)$$

$$N_A(B)=\inf_y \max\{1-\mu_A(y),\ \mu_B(y)\} \quad (3.2)$$

ただし，μ_A，μ_B はそれぞれ，ファジィ集合A，Bのメンバシップ関数である．$\Pi_A(B)$，$N_A(B)$ は，Aのもとで B である可能性，必然性の度合いを示している．

特に，A，Bが通常の集合である場合を考えると，

$$\Pi_A(B)=\begin{cases}1\ ;\ A\cap B\neq\emptyset\\ 0\ ;\ A\cap B=\emptyset\end{cases} \quad (3.3)$$

$$N_A(B)=\begin{cases}1\ ;\ A\subseteq B\\ 0\ ;\ A\nsubseteq B\end{cases} \quad (3.4)$$

となる．たとえば，A={1, 2}のいずれかが当選番号であるという情報を得たとき，手持ちのくじの番号の集合B内に1，2のいずれかの番号があれば（$A\cap B\neq\emptyset$），当選している可能性があるといえる．さらに，1，2のどちらともB内にあれば（$A\subseteq B$），少なくとも1つが当選していることはまちがいない（必然である）．可能であるときに限り1を出す測度，必然であるときに限り1を出す測度を考えれば，(3.3)，(3.4)式のΠ，Nとなる．(3.1)，(3.2)式の可能性測度Π，必然性測度Nはこの概念のファジィ集合の場合への拡張である．なお，

$$N_A(B)\leqq \Pi_A(B) \tag{3.5}$$

が常に成立する(必然なものは可能であることを表す).

さて，例題に戻ろう．この問題は，“機械M，Nの使用制限，売上高の目標を必然的に満たし，かつ，総利益の目標を可能的に満たす度合いが最大の解”を求める問題と解釈できる．この解釈にもとづき，(2.2) 式を定式化すると，次のようになる．

maximize h (3.6 a)

制約条件

$$N\,\underline{2}\,x_1+\underline{3}\,x_2(\precsim 900)\geqq h \tag{3.6 b}$$

$$N\,\underline{6}\,x_1+\underline{4}\,x_2(\precsim 1800)\geqq h \tag{3.6 c}$$

$$N\,\underline{60}\,x_1+\underline{45}\,x_2(\succsim 22000)\geqq h \tag{3.6 d}$$

$$\Pi\,\underline{7}\,x_1+\underline{9}\,x_2(\succsim 3400)\geqq h \tag{3.6 e}$$

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ 0\leqq h\leqq 1 \tag{3.6 f}$$

連続なメンバシップ関数をもつファジィ集合A，Bについて次式が成立することが知られている[4].

$$\Pi_A(\mathrm{B})\geqq h\Leftrightarrow[\mathrm{A}]_h\cap[\mathrm{B}]_h\neq\emptyset \tag{3.7}$$

$$N_A(\mathrm{B})\geqq h\Leftrightarrow[\mathrm{A}]_{1-h}\subseteq[\mathrm{B}]_h \tag{3.8}$$

ただし，$[\mathrm{A}]_h=\{y\,|\,\mu_A(y)\geqq h\}$ と定められる．また，A，Bが三角型ファジィ数 $(a_1,\ d_1)$，$(a_2,\ d_2)$ であるとき，$x_1\geqq 0$，$x_2\geqq 0$ について，次式が成立する[5].

$$\begin{aligned}[Ax_1+Bx_2]_h&=[A]_hx_1+[B]_hx_2\\&=[a_1-(1-h)\cdot d_1,\ a_1+(1-h)\cdot d_1]x_1\\&\quad+[a_2-(1-h)\cdot d_2,\ a_2+(1-h)\cdot d_2]x_2\\&=[a_1x_1+a_2x_2-(1-h)(d_1x_1+d_2x_2),\\&\quad a_1x_1+a_2x_2+(1-h)(d_1x_1+d_2x_2)]\end{aligned} \tag{3.9}$$

また，C，Dがそれぞれ，ファジィ目標$]b,\ e),(c,\ f[$であるとき，$[C]_h=[b-(1-h)\cdot e,\ +\infty)$，$[D]_h=(-\infty,\ c+(1-h)\cdot f]$ となる．

以上より，(3.6)式は次のように書き換えられる．

maximize h (3.10 a)

$$2x_1+3x_2+h(0.4x_1+0.3x_2)\leqq 1000-100h \tag{3.10 b}$$

$$6x_1+4x_2+h(x_1+0.3x_2)\leqq 2040-240h \tag{3.10 c}$$

$$60x_1+45x_2-h(5x_1+4x_2)\geqq 18000+4000h \tag{3.10 d}$$

$$7.5x_1+9.6x_2-h(0.5x_1+0.6x_2)\geqq 3000+400h \tag{3.10 e}$$

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ 0\leqq h\leqq 1 \tag{3.10 f}$$

4. 一解法（フェーズ 2）

ここでは，(3.10)式の一解法を述べる．従来提案されているファジィ数理計画問題の解法の多くは，ここで述べる解法と同様な考え方にもとづいている．もちろん，(3.10)式を非線形計画問題に対する種々の最適化手法により解くこともできる．

(3.10)式で，hに値を与えると，(3.10 b)～(3.10 e)式は線形不等式になり，シンプレックス法により，実行可能解の存否を確認することができる．実行可能解が存在すれば，hを与えられた値以上にすることができる．hの値が大きいほど(3.10 b)～(3.10 e)式の各制約条件は厳しくなるので，実行可能解が存在しなければ，hを与えられた値以上にすることはできない．このことより，hに関する二分法を適用した次のアルゴリズムが考えられる．

〔アルゴリズム I〕

[手順1] $h=0$として，シンプレックス法により，(3.10 b)～(3.10 f)式を満たす解の存否を調べる．解が存在すれば，その解を $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ とする．解が存在しなければ，ファジィ目標，使用している測度などを検討し，解が存在するように変更する．

[手順2] $h=1$として，シンプレックス法により，(3.10 b)～(3.10 f)式を満たす解の存否を調べる．解が存在すれば，終了する．このとき，得られた解が(3.10)式の最適解の1つとなる．

[手順3] $h^L=0$，$h^U=1$ と設定する．

[手順4] $h=(h^L+h^U)/2$ として，シンプレックス法により，(3.10 b)～(3.10 f)式を満たす解の存否を調べる．解が存在すれば，その解を x^*とし，$h^L=h$ とする．解が存在しなければ，$h^U=h$ とする．

[手順5] $h^U-h^L<\varepsilon$ であれば，終了する．このとき最適解は x^* となる．$h^U-h^L\geqq\varepsilon$ であれば，手順4へ戻る．

(3.10)式にこのアルゴリズムを適用した結果，$(x_1,x_2,h)=(195.38,\ 179.274,\ 0.30793)$なる解が得られた．

5. 解の妥当性の検討（フェーズ 3）

ファジィ数理計画問題に対する最適性および，ファジィ多目的計画問題に対する有効性の概念は，最近，議論され始めたばかりである[4]．それゆえ，妥当性の評価方法などは未だ十分に研究されていない．そこで，ここでは，解の状態を図示し，他のモデルによる解と比較することにより，直感的に解の妥当性を検討する．

図4に解 $(x_1,\ x_2)=(195.38,\ 179.274)$ の各目標の達成状況を示す．

機械M，Nの使用制限，売上高の目標をほどほどに満たし，総利益の目標を満たす可能性がある解が得られて

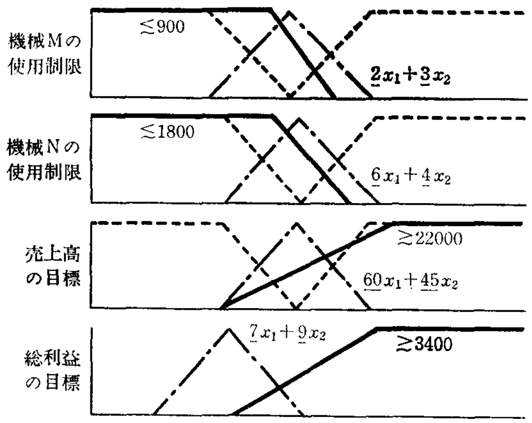

図 4　$(x_1,\ x_2)=(195.38,\ 179.274)$の場合

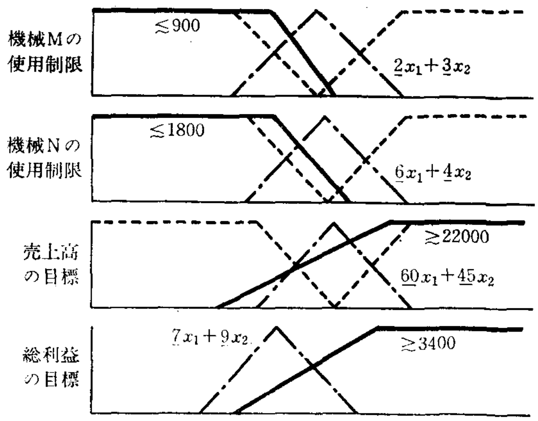

図 5　$(x_1,\ x_2)=(202.732,\ 188.525)$の場合

いることがわかる．比較のため，(2.2) 式の係数のあいまいさを無視し，ファジィ目標をもつファジィ線形計画問題（フレキシブル計画問題 [1]，この場合，L字型モデルにもとづく目標計画問題 [6] と等価になる）により解を求めると，$(x_1,\ x_2)=(202.732,\ 188.525)$ が得られ，**図5**のようになる．また，係数のあいまいさを無視し，加重型モデルにもとづく目標計画問題[6]，

minimize　$3d_1^+ + 3d_2^+ + 3d_3^- + d_4^-$　(5.1 a)

制約条件

$2x_1+3x_2+d_1^- - d_1^+ = 900$　(5.1 b)

$6x_1+4x_2+2.4d_2^- - 2.4_2^+ = 1800$　(5.1 c)

$60x_1+45x_2+40d_3^- - 40d_3^+ = 22000$　(5.1 d)

$7x_1+9x_2+4d_4^- - 4d_4^+ = 3400$　(5.1 e)

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$　(5.1 f)

により解を求めると，$(x_1,\ x_2)=(180,\ 180)$が得られ，図示すると，**図6**のようになる．ただし，(5.1) 式の差異変数 d_i^-，d_i^+ の係数は，各目標間に通約性をもたせるための係数であり，ここでは，ファジィ目標の幅にもとづき定めている．

図5の解では，総利益の目標を満たす可能性があるという意味がうまく解に反映されていないことがわかる．また，図6の解では，機械M，Nの使用制限の目標はかなり満たされているが，売上高の目標はそれほど満たされておらず，目標の達成バランスが悪いことがわかる．

次に，意思決定者が機械M，Nの使用制限の目標をもう少し必然的に満たしたいとすると，“機械M，Nの使用制限を満たす必然性が非常に高く，売上高の目標を必然的に満たし，総利益の目標を可能的に満たす度合いが最大の解” を求める問題と解釈し直し，次の問題を解く．

maximize h　(5.2 a)

制約条件

$(N\underline{2}x_1+\underline{3}x_2(\lesssim 900))^2 \geqq h$　(5.2 b)

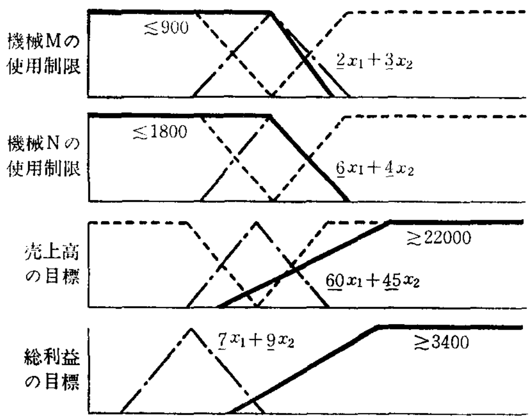

図 6　$(x_1,\ x_2)=(180, 180)$の場合

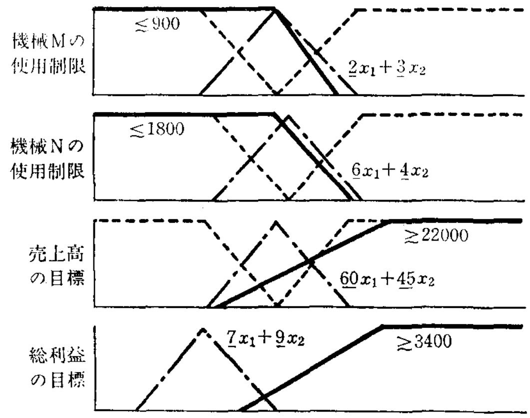

図 7　$(x_1,\ x_2)=(189.783,\ 175.082)$の場合

$$(N\,\underline{6}\,x_1+\underline{4}\,x_2(\lesssim 1800))^2 \geqq h \qquad (5.2\text{c})$$

$$N\,\underline{60}\,x_1+\underline{45}\,x_2(\gtrsim 22000) \geqq h \qquad (5.2\text{d})$$

$$\Pi\,\underline{7}\,x_1+\underline{9}\,x_2(\gtrsim 3400) \geqq h \qquad (5.2\text{e})$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ 0 \leqq h \leqq 1 \qquad (5.2\text{f})$$

ここで，“非常に”という修飾語を表わすため，必然性測度を自乗している．この問題も(3.6)式の問題と同じくアルゴリズムIで，解くことができ，解は$(x_1, x_2, h)=(189.783, 175.082, 0.173626)$となる．この解を図示すると，図7のようになる．図4に比べ，機械M，Nの使用制限の目標がより満足されていることがわかる．

6. おわりに

以上，1つの例題に対してファジィ多目的線形計画法を適用した．上述のように，ファジィ数理計画アプローチでは，不明確な係数などを不明確なまま表現するので，モデルが容易に構成できると考えられる．また，問題の解釈にもとづき通常の数学モデルに変換されるので，不明確さに対する意思決定者の多様な要求を反映することができる．今後，ファジィ数理計画法(特にフェーズ2，3)の研究が発展し，ファジィ数理計画法が種々の実際問題に応用されることが期待される．

参考文献

[1] Inuiguchi, M., Ichihashi, H. and Tanaka, H.: Fuzzy Programming: A Survey of Recent Development. Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Programming under Uncertainty (eds. R. Slowinski and J. Teghem), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1990. 45-68.

[2] Dubois, D. and Prade, H.: Possibility Theory: an Approach to Computerized Processing of Uncertainty. Plenum Press, New York. 1988.

[3] 乾口雅弘，市橋秀友，久米靖文：ファジィ数理計画問題の様相的構成．システム制御情報学会論文誌，2, 3 (1989), 69-79.

[4] 乾口雅弘，久米靖文：ファジィ多目的計画問題に対する解の概念．日本ファジィ学会誌，2, 1(1990), 65-78

[5] Dubois, D. and Prabe, H.: Fuzzy Numbers: An Overview. Analysis of Fuzzy Information, Vol. I: Mathematics and Logic (ed. J. C. Bezdek), CRC Press, Boca Raton, FL, 1987, 3-39.

[6] 伏見多美雄，福川忠昭，山口俊和：経営の多目標計画—目標計画法の考え方と応用例—，森北出版，1987