# 対話型多目的計画法とその応用

中山　弘隆

## 1. はじめに

数理計画法に限らず，一般に数理解析的意思決定の手法ではまず第1に数理モデルを作成する必要がある．数理モデルは大ざっぱに，構造モデル，影響モデル，評価モデルの3種類に分けられると考えられる．構造モデルは問題の構造を明らかにするどちらかといえば定性的なモデルをさし，影響モデルはあることを実行したとしてどのような影響がでるかの定量的なモデルをさす．この2つのモデルを作成することが伝統的にモデリングと呼ばれているものである．しかし，これだけのモデルでは実際の意思決定に十分とは決していえない．なぜなら，意思決定の問題はほとんどといってよいほど価値判断の問題であるにもかかわらず，上記2つのモデリングは伝統的に（意識的に）価値判断の問題を避けてきていたからである．このような価値判断をモデル化することが評価モデルの作成である．本稿の主要な目的は決定者の価値判断をどのようにして決定プロセスの中に組み入れるかということであるので，伝統的モデリングがあまり問題にならないような問題，特に意思決定の問題の中でも特に数理計画の問題として定式化できるものを取り扱って議論することにする．

たとえば，債券ポートフォリオ決定の問題を考えてみよう．債券投資担当者は手持ちの債券を売り，市場から新たな債券を買い入れて収益性の改善を図るというリバランシングを毎日数億円というオーダーで行なっている．この決定問題は分数計画の問題として定式化できる[1]．ここで，考慮すべき評価基準としては直利，最終利回り，最終実行利回り，リスクを表わすデュアレーションあるいは価格変動係数，平均単価，平均残存年数などがあり，制約としては資金制約，損益制約，取引量制約などがある．ここにおける複数の評価基準は本来同時に最大（小）化あるいはターゲット化したいというものであるが，通常の数理計画の手法を用いるために，どれか1つ（たとえば，直利）を目的関数にとり，残りを制約にして解くことが多い．数理計画として定式化できる問題では，目的関数のとり方や制約の右辺値のとり方に決定者の価値基準が反映される．

さて，数理計画の問題では制約が厳しすぎると実行可能解が存在しなくなることがある．ユーザーにとって「実行可能解がありません」というメッセージが出るだけでは味もそっけもない．従来の数理計画法の最大の弱点はこのようなときどの制約をゆるめればよいかについて何の情報も与えないことである．

また幸いにして実行可能解が存在してある最適解が出てきたとしても，そのままその解が即実行されることはほとんどない．目的関数の達成レベルと制約関数の達成レベルをみて制約の右辺を変えてみたり，その他のパラメータを変えてみるといったいわゆるpost optimality分析がなされるのが普通である．ほとんどの実際の場合このような試行錯誤に時間がかかるのであって，重視されるべきは最適化の計算そのものよりもこのpost optimality 分析であるから「post」などという副次的な性格をもたせるよりは，最適化計算のほうがこのための前処理(pre-processing)といったほうがよいともいえる．

さて，この「post optimality 分析」は目的関数や制約関数の達成レベルの上がり下がりをみながら総合的によいと思える解を見いだすものであるから，今後これをトレードオフ分析と呼ぶことにしよう．以上の議論によって数理計画の問題として定式化できる問題に対して重要なことは

(1) 実行可能解がない場合でも，どうすればよいかについて何らかの情報を与えられるようにすること

(2) トレードオフ分析をやりやすいようにヒューマン・インターフェイスを工夫すること

であることがわかる．

さて，制約関数といっても右辺の値が可変なものとそうでないものとがある．右辺値が変えられる制約をソフト制約，変えられない制約をハード制約と区別すること

なかやま　ひろたか　甲南大学　理学部
〒658 神戸市東灘区岡本8－9－1

にしよう．このとき，ソフト制約は本来できる限り大きく（小さく）したいのであるが，ある値以上（以下）は絶対に保証をしたいという性格のものと考えることができる．目的関数はあくまで可能な限り大きく（小さく）したいものであって，最低この程度のレベルは達成したいと（心の中で）思っていても他の評価基準とのからみで実際にはそれが達成されないでもかまわないという性格のものである．ソフト制約と目的関数の間には微妙な違いがみられるものの，本来はそれらを同格のものとして扱い，適宜，制約にしたり目的にしたりが自由にできるという決定支援システムを作ることが望ましい．したがって，さらに望まれる性質として

(3) ソフト制約と目的を手軽に入れ換えられるようにすること

が追加される．

多目的計画法は以上の(1)―(3)の要求に応えるべく開発されてきたものである．次節で若干詳しく論じよう．

## 2. ゴールプログラミング（実行不可能をなくす方法）

第1節で述べた要求(1)はゴールプログラミング[2][3]を用いることによって達成される．その本質的なアイデアは本来の目的関数に対しても達成目標水準（希求水準と考えてもよい）を定め，それをクリアしよう（実現不可能ならできる限り近づけよう）とすることである．たとえば $f_i \to \mathrm{Max}$ に対してその達成目標水準を $\bar{f}_i$ とするとき，$\bar{f}_i$ に対する未達成量 $u_i^-(\geq 0)$，過剰達成量を $u_i^+(\geq 0)$ として

$$\left.\begin{aligned} &u_i^- \to \mathrm{Min} \\ &\text{subject to} \\ &f_i(x)-u_i^+ + u_i^- = \bar{f}_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

とする.* これはLPにおける2段階法の第1段目の一般化である．いくつかの評価基準があるときはそれぞれの最小とする量 $u_i^-$ や $u_i^+$ の線形加重和がとられることが多い．すべての達成目標水準をクリアする解が存在しないときはそれらの達成目標水準に（ある意味で）最も近い解が提示される．各評価基準の実際の達成度をみてどれをゆるめるか考えればよい．数理計画法で単に「実行可能解がありません」というメッセージだけを返すよりは，「現状でぎりぎり努力した結果がこれです」という情報を提供する方がユーザーにとってはるかに親切である．ゴールプログラミングが実際の場で広く使われるのはこのためである．

ところで，ゴールプログラミングにおいては達成目標水準が十分高い場合は確かに得られた解が Pareto 最適性を満足する場合も多いが，達成目標水準が低いときにはその低い達成目標水準をクリアしただけの低水準の解にとどまる可能性がある．しかし本来，目的関数にとった評価基準は単に目標達成水準をクリアすればそれでよいというのではなく，さらにできる限り大きく（小さく）したいというものであった．そのためにはもはやそれ以上の改善は望めないというギリギリの線，すなわち得られた解の Pareto 最適性を保証することが望ましい．このようなときには (2.1) のように未達成量を最小にするというのでなく，

$$\left.\begin{aligned} &z_i \to \mathrm{Min} \\ &\text{subject to} \\ &\bar{f}_i - f_i(x) \leqq z_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

とすればよい．ここで $z_i$ は必ずしも $\geqq 0$ とは限らないことに注意する．

さらに，伝統的ゴールプログラミングのもう1つの欠点は，目的関数の数が多くなった場合などで重みの調整をするさい，ある目的をよくしようと思ってその重みを大きくしても，他の目的が悪くなりすぎて今度はその重みを大きくするといういわゆる「モグラたたき」の現象が起こり適切な重みがなかなか決められないということである．これは重みと出てくる解との間に直接的な関係がないためで，トレードオフ分析を重みの調整によって行なうのは効率がよくないということを示している．

以上のような難点を克服するために，対話型多目的計

---

* ゴールプログラミングにおいて $u_i^+$ が過剰達成量，$u_i^-$ が未達成量を表わすという仮定の下に，上記定式化が可能となる．よく見落とされることだが，このためには，

$$u_i^+ \cdot u_i^- = 0$$

が成立していなければならない．じつは，次の定理により，(2.1) ではこの条件は最適解において自動的に満足されるのである．

【定理1】[4]

問題 $F\ (u_1^+,\ u_1^-, \ldots, u_m^+,\ u_m^-)) \to \mathrm{Min}$

subject to

$$f_i\,(x) - u_i^+ + u_i^- = \bar{f}_i \qquad i=1,\ldots,r$$

において $F$ が各 $i$ について $u_i^+$，$u_i^-$ のうち少なくともどちらか一方に関し，単調増大であれば最適解において

$$u_i^+ \cdot u_i^- = 0 \qquad i=1,\ldots,r$$

が成り立つ．

画法の手法がいくつか開発されている．

## 3. 対話型多目的計画法（トレードオフ分析のためのヒューマン・インターフェイス）

最初から決定者の価値基準を数式表現することは一般には難しい．たとえば，効用関数として表現しようとすれば，決定者の価値判断がある種の整合性を満たさなくてはならない．しかし，実際には人間の判断は不整合であることが多い．しかも，決定プロセスの中で決定者は次々と新しい情報を得ていくわけだから価値基準そのものが変わることが多い．このように,「わがまま」な価値基準に柔軟に対処できるようにするには価値基準を数式として固定するよりは，決定プロセスの中で自由に変動でき，しかも決定者の価値基準を十分に反映できるパラメータとして取り扱う方が実際的である．

対話型多目的計画法として今までにいくつかのタイプのものが提案されているが，現在もっとも操作性のよいものとして希求水準法[5][6]がある．この方法は決定者に希求水準の入力を求める点でゴールプログラミングと同じであるが，得られた解の Pareto 最適性を保証するために (2.1) よりも (2.2) を用いること，およびもっと本質的に，希求水準を修正することによってトレードオフを行なう点で伝統的ゴールプログラミングと異なっている．すなわち，対話型多目的計画法における希求水準法を要約すれば次のようなアルゴリズムになる．

$$\bar{f}^{k+1} = T \circ P(\bar{f}^{k})$$

$P(\bar{f}^{k})$ は与えられた希求水準 $\bar{f}^{k}$ に最も近い Pareto 解を求める作用素で，$T$はその解をみながらトレードオフ分析を行ない希求水準を更新する作用素である．$P(\bar{f}^{k})$ は通常，もとのベクトル値目的関数を適当にスカラー化することによってなされる．しかし，通常よく行なわれる線形加重和のスカラー化では非凸な場合などで一種の duality gap のために望ましい Pareto 解が求められないことがある[7]．どのような価値基準であっても決定者の意のままの解を出せるようにするには，すべての Pareto 解を解として抽出できるスカラー化が望まれる．このような性質を満たすスカラー化は Pareto 解の定義から直ちにわかるようにチェビシェフノルム型（L字型）関数を最小化することだけである．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq r}\ w_i(\bar{f}_i-f_i(x)) \rightarrow \mathrm{Min} \\ &\text{subject to} \\ &x\in X \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

この問題を直接解くには目的関数が滑らかでないという不都合があるので，実際には通常，等価な次の問題を解く：

$$\left.\begin{aligned} &z \rightarrow \mathrm{Min} \\ &\text{subject to} \\ &w_i(\bar{f}_i-f_i(x))\leqq z \quad i=1,\dots,r \\ &x\in X \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

ただし，このスカラー化では単なる弱 Pareto 解 [7] が得られる可能性もあるので，強 Pareto 最適性 [7] を保証するために次の拡大チェビシェフノルム型関数最小化を行なうことが多い：

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq r}\ \{w_i(\bar{f}_i-f_i(x))\}+ \\ &\qquad \alpha\Sigma w_i(\bar{f}_i-f_i(x)) \rightarrow \mathrm{Min} \\ &\text{subject to} \\ &x\in X \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

ただし，$\alpha$ は線形加重和の項が支配的とならないよう十分に小さい値，たとえば $10^{-6}$ のようにする．

この方式においては，意思決定者の価値基準はその希求水準によって与えられるので，トレードオフ分析は重みの調整でなく，希求水準によってなされる．したがって，重みは通常，理想点 $f_i^*$ と最悪点 $f_{i*}$ によって*

$$w_i=\frac{1}{f_i^*-f_{i*}}$$

のようにとって，固定しておく．

さて，示された Pareto 解が満足のいかないものであれば，より改善したいと思う目的関数の希求水準を上げ，ゆるめてもよいという目的関数の希求水準を下げる．目的関数の数が多い場合などでは改善する量，緩和する量をともに答えるのは意思決定者にとって大変な作業である．そこで，どちらかというと改善したいと思う方が切実であるから，改善する方だけを答えてもらい．他は感度解析を用いて緩和量を推定すれば楽になる．たとえば問題(3.2)に対する Lagrange 乗数を $\lambda_i$ とすると

$$\Delta f_j=-\frac{\sum_{i\in I_I} w_i\lambda_i\Delta f_i}{Nw_j\lambda_j} \qquad j\in I_R$$

上式は改善すべき量の総和を，トレードオフとして見返りに緩和してもよいという目的関数に比例配分して割り当てたものである．この緩和量が不満であれば手入力で補正すればよい．このようにすることによって，目的

---

* 理想点 $f_i^*$ と最悪点 $f_{i*}$ のとり方は，通常次のようにする．$x_i^*=\arg\operatorname*{Max}_{x\in X} f_i(x)$ とするとき

$f_i^*=f_i(x_i^*)$，$f_{i*}=\operatorname*{Min}_{1\leqq j\leqq r} f_i(x_j^*)$ $(i=1,\dots,r)$

関数の数が多い場合には意思決定者の労力が大幅に軽減される．さらに，もとの問題がＬＰやＱＰの場合にはパラメトリック最適化の技法を用いれば修正した希求水準が Pareto 解曲面に留まるための緩和すべき量を正確に求めることができるので，新たに Min-Max 問題を最初から求めなくてもすばやく Pareto 解曲面上をたどっていくことができる[8]．これを用いれば，出力画面をアニメーションにすることもでき，意思決定者はより簡単にすばやく決定を行なうことができるようになる．

## 4. 目的と制約の入れ替え

第１節で述べた望ましい多目的計画法の性質として，すでに1)，2)は実現された．最後の3)については補助最適化として(3.2)を用いれば簡単に行なうことができる．すなわち，制約として扱いたい $f_i$ に対しては

$$w_i(\bar{f}_i-f_i(x))\leqq z$$

において，$z$ の係数を１から０に置き換えるだけでよい．逆に，制約として扱っていたものを目的に変えるときは $z$ の係数を０から１にする．これをコンピュータプログラム中で行なうのは簡単である．

## 5. ファジィ数理計画法との関連

さて，数理計画法として定式化された問題に対し，さらに各種パラメータのもつあいまいさを処理するための方法としてファジィ数理計画法[9]があるが，それとの関連について簡単に触れてみたい．ここでは，特に制約の右辺値がそれほど厳格なものでなく，状況によって変えられるというソフト制約の場合を考えてみよう．話を簡単化するために次の問題を考えることにする．

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x)\to \max \\ \text{subject to} \\ f_1(x)=\bar{f}_1 \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

この問題において制約 $f_1$ をきっちりと $\bar{f}_1$ にする必要がなく，大体 $\bar{f}_1$ の値にしたいものとする．通常よく用いられるメンバーシップ関数は図１のようなものであるが，これをできる限り大きくしようとするのであるから本質的には次の関数にとってよい．

$$m_1(x)=\mathrm{Min}\{(f_1(x)-\bar{f}_1)/\varepsilon+1,\ -(f_1(x)-\bar{f}_1)/\varepsilon+1\}$$

ただし，$\varepsilon$ は $\bar{f}_1$ からのズレに対する許容度を表わすパラメータである．さてここで，もとの問題は $f_0$ および $m_1$ をともに最大化したいという多目的問題になっていることに注意したい．このとき，よく行なわれるのはさ

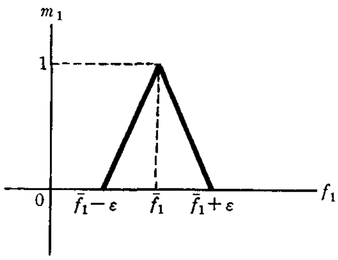


図 1

らに目的関数 $f_0$ に対しても希求水準 $\bar{f}_0$ を設定し，それに対してメンバーシップ関数を定めることである：たとえば

$$m_0'(x)=\mathrm{Min}\{(f_0(x)-\bar{f}_0)/(\bar{f}_0-f_{0*})+1,\ 1\}$$

ただし，上の $m_0'$ をそのまま使ったのでは単に $\bar{f}_0$ 以上にしたいという満足化にすぎないので，Pareto 最適性を保証するためには次の関数を用いる．

$$m_0(x)=(f_0(x)-\bar{f}_0)/(\bar{f}_0-f_{0*})+1$$

最終的には，$m_0$，$m_1$ というメンバーシップ関数を同時に最大化したいという問題になって，通常は次の補助的最適化問題を解くことによって解を決定する．

$$\left.\begin{array}{l} z\to \mathrm{Min} \\ \text{subject to} \\ \quad -(f_0(x)-\bar{f}_0)/(\bar{f}_0-f_{0*})-1\leqq z \\ \quad -(f_1(x)-\bar{f}_1)/\varepsilon-1\leqq z \\ \quad (f_1(x)-\bar{f}_1)/\varepsilon-1\leqq z \end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

ここで，多目的計画における希求水準法との類似点に気がつかれることと思う．多目的計画法においては $f_1$ のようなターゲット化は通常，$f_1\to\mathrm{Max}$ と $f_1\to\mathrm{Min}$ の2つを同時に考慮することによって処理するが $f_1\to\mathrm{Max}$ に対しては理想点 $f_1^*=\bar{f}_1$，最悪点 $f_{1*}=\bar{f}_1-\varepsilon$，希求水準 $\bar{f}_1-\varepsilon$ および $f_1\to\mathrm{Min}$ に対しては理想点 $f_1^*=\bar{f}_1$，最悪点 $f_{1*}=\bar{f}_1+\varepsilon$，希求水準 $\bar{f}_1+\varepsilon$ とすることによって問題(3.2)における $f_1$ の取扱いと問題(5.2)における $f_1$ の取扱いはまったく同一になる．

ただし，$f_1$ のようなターゲット化の場合，トレードオフはターゲット $\bar{f}_1$ よりもむしろ許容誤差 $\varepsilon$ で行なうので希求水準法では(3.2)の分母に $\varepsilon$ を含ませないようにすることが多い．こうすることにより，決定者の希望がたとえ $\varepsilon=0$ となっていて，しかも $f_1(x)=\bar{f}_1$ を満たす解がない場合でも，それに最も近い解を得ることができる，しかし，ファジィ計画法では $\varepsilon=0$ の場合，完全に等号制約 $f_1(x)=\bar{f}_1$ になってしまい，場合によっては実行不可能になることがある．

このようなことから，最初から多目的計画問題として

定式化し，それを希求水準法で解けばファジィの問題も自動的に処理でき，かつファジィ計画法ではできないことも扱えることがわかる．

## 5. 応用について

多目的意思決定における方法はいくつかあるので，その応用例もいろいろであるが，ここでは多目的計画法に絞って，応用例を紹介することにしよう．かつては方法の説明のためのいわゆる toy 問題が多かったが，最近では実験的結果であっても実データ・実モデルにもとづくものが多くなっており，中には実際に動いているものもある．希求水準法の1つは IIASA の SDS 特に Wierzbicki を中心とするポーランドのグループが1979年頃から積極的に研究開発を重ね，DIDASS と呼ばれる基本的バージョンをもとに問題のタイプによってさまざまなソフトウェアを作成し，いくつかの実際問題に応用している[10]．代表的なものとして，ポーランド政府のエネルギー計画，化学産業の再構築など．

さらに，多目的意思決定に関する国際会議がほぼ2年に1回の割合で開かれ，1990年の Virginia／USA での会議ではソ連の Statnikov によるスペースシャトル "Buran" の多目的設計や工作機械の設計についての報告等，いくつかの応用があった．

また，文献[11]には数多くの工学設計問題への応用が見られる．たとえば，高精度パラボラアンテナの設計，宇宙飛行物体の多目的設計，人工衛星の諸々の部品の形状最適化，ロボット，列車の自動運転，鉄鋼業，土木構造物等への応用など．

経営の問題への応用については文献[3]などを参照されたい．

筆者自身の提案した満足化トレードオフ法の応用については，現在進行中のものも含め，家畜の飼料配合，セメントの原料石配合[12]，プラスティック成形材の原料調合[13]，債券ポートフォリオ[14]，斜張橋精度管理システム[15]，発電の長期計画，鉄鋼製造プロセスにおけるトライ選択問題[16]等がある．

### 参考文献

[1] 今野：線形計画法，日科技連 (1987)

[2] 井尻：計数管理の基礎，岩波書店 (1970)

[3] 伏見，福川，山口：経営の多目標計画，森北出版 (1987)

[4] Sawaragi, Nakayama and Tanino, Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press (1985)

[5] Grauer, Lewandowski and Wierzbicki, DIDASS-Theory, Implementation and Experiences. in Grauer and Wierzbicki (eds.) Interactive Decision Analysis, Springer (1984)

[6] 中山：多目的計画法に対する満足化トレードオフ法の提案，計測自動制御学会論文集，Vol.20, pp.29-35 (1984)

[7] 中山：対話型多目的計画法――方法と応用，オペレーションズ・リサーチ, Vol.33, pp.375-381 (1988)

[8] Nakayama, Trade-off Analysis using Parametric Optimization Techniques, to appear in EJOR

[9] 西田，竹田：ファジィ集合とその応用，森北出版 (1978)

[10] Lewandowski and Wierzbicki (eds.) Aspiration based Decision Support Systems, Springer (1989)

[11] Eschenauer, Koski and Osyczka (eds.), Multicriteria Design Optimization, Springer (1990)

[12] Nakayama, Satisficing Trade-off Method for Problems with Multiple Linear Fractional Objectives and its Applications, in Lewandowski and Volkovich (eds.) Multiobjective Problems of Mathematical Programming, Springer (1991)

[13] Nakayama et al., An Application of Satisficing Trade-off Method to a Blending Problem of Industrial Materials, in Fandel et al. (eds.) Large-scale Modelling and Interactive Decision Analysis, Springer (1986)

[14] Nakayama, An Interactive Support System for Bond Trading, in Lockett and Islel (eds.), Improving Decision Making In Organizations, Springer (1989)

[15] 古川，井上，中山，石堂：多目的計画法を用いた斜張橋の架設時精度管理システムに関する研究；土木学会論文集，第374号／I-6, pp.495-502 (1986)

[16] 上野他，鉄鋼プロセスにおけるトライ選択問題への多目的計画法の応用，オペレーションズ・リサーチ Vol. 35, No.12, (1990)