ORメモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた知恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡潔に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

確率モデルによる釣銭の準備枚数の考察

高田 克巳，山田 茂，尾崎 俊治

1. はじめに

平成元年4月より消費税制度が実施されており，商店などで買物をするさいに，代金の支払いに1円玉や5円玉を使う場合が非常に増えてきた．このことは，客が支払いに煩雑さを感じることもさることながら，当該商店にとっては釣銭として1円玉や5円玉をどのくらい準備しておけばよいかということが重要な問題となる．そこで，この問題について考えてみることにする．

この種の問題に関する研究としては，会員制の会合における釣銭の準備額を取り扱ったものがある(文献[1])．そこでは，1)支払い代金があらかじめ決められている，2)参加者はできるだけ釣銭がなくて済むように支払う，という仮定のもとで，マルコフ連鎖を用いて議論されている．

本研究では，一般的な商店における買物を議論の対象として，支払い代金および客の支払い方法に不確実性をもたせることにする．

2. モデル化

2.1 考え方

上記の問題は，吸収壁が1つの1次元ランダムウォークとして取り扱うことができる (図1参照)．最初の時点，すなわちある商店における客数が0人のときの釣銭の準備枚数は，客数が増えるにつれて幾通りにも推移していく．ただし，本研究では釣銭として1円玉と5円玉を考え，商店におけるレジスター (以下レジと略す) を1台と仮定する．この推移状況における任意の時点で，ある確率の下で釣銭の準備枚数が吸収壁に到達し，0枚となる．この問題では，この準備枚数が0枚となるのが所定の確率以下になるように，各客数に対する最初の釣銭の準備枚数を求めればよいことになる．

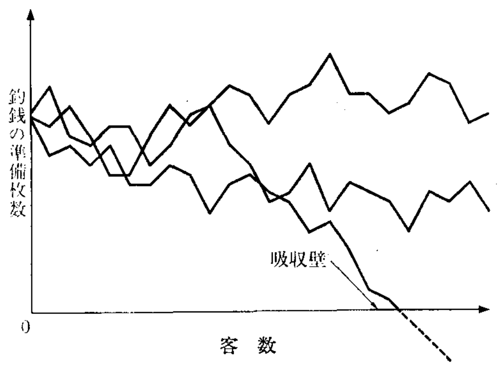

図 1 釣銭の準備枚数の推移図

今，各客の買物終了後のレジにおける1円玉と5円玉の枚数の増減量をそれぞれXおよびYとする．XおよびYはある確率をもって何通りかの値を取り得るから，離散型確率変数となる．確率変数XおよびYに対して適当な確率関数を定め，それによって決まる平均値および分散をそれぞれ，$\mu_X, \sigma_X{}^2$ および $\mu_Y, \sigma_Y{}^2$ とする．n 人($n=0, 1, 2, \cdots$)の客が買物をすることは，XおよびYの母集団からそれぞれn個の標本$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$を抽出することに相当する．

ところで，各客の買物においては，支払い代金および客の支払い方法 (釣銭が必要であるか不必要か) は，他の客とは独立である．したがって，各客の買物終了後におけるXおよびYの値は過去の履歴に関係なく決まる．

たかた かつみ，やまだ しげる，おさき しゅんじ
広島大学工学部 〒724 東広島市西条町大字下見

すなわち，標本値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対応する確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は，独立で同一の確率分布にしたがうものと考えることができる．$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ についても同様である．このとき，その標本和 $T_X=X_1+X_2+\cdots+X_n$, $T_Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$, すなわち n 人の客が買物を終えた時点での 1 円玉および 5 円玉の枚数の総増減量の確率分布は，n が十分大きければ，中心極限定理により近似的にそれぞれ正規分布 $N(n\mu_X, n\sigma_X{}^2)$, $N(n\mu_Y, n\sigma_Y{}^2)$ となる．ここで，平均値 μ，分散 σ^2 をもつ正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ と表わす．

2.2 仮定

モデル化にあたり，以下のことを仮定する．

(i) 各客の支払い代金の 1 円の位を $i(0\leq i\leq 9)$ とし，その確率関数を $P_I(i)$ とする．

(ii) 客の所持金の 1 円の位を $j(0\leq j\leq 9)$ とし，その確率関数を $P_J(j)$ とする．

(iii) 客の所持金の 1 円の位が 5 円以上の人のうち，5 円玉を持っている人の割合を a とする．

(iv) 客が支払い代金の 1 円の位に対して，その値ちょうどに支払うことができるにもかかわらず，それをしない確率を“ものぐさ率”と定義し $u(i)$ で表わす．

(v) 客の支払い代金の 1 円の位に対して釣銭が必要なように支払うとき，および支払い代金の 1 円の位が 0 のときは，支払いに 1 円玉および 5 円玉は使わない．

(vi) 客に対する釣銭が 5 円以上のときは，5 円玉を必ず含めることにする．

2.3 評価式

仮定(v)と(vi)より X および Y の標本空間は，それぞれ $\{X|-4\leq X\leq 9\}$ および $\{Y|-1, 0, 1\}$ となる．これらの仮定より，確率変数 X および Y に対する確率関数は以下のようになる．

(a) $9\geq x\geq 5$ のとき

$$P_X(x)=P_I(x)\left[(1-a)\sum_{j=x}^{9}P_J(j)\right]\left[1-u(x)\right], \quad (1)$$

(b) $4\geq x\geq 1$ のとき

$$P_X(x)=P_I(x)\left[1-\sum_{j=0}^{x-1}P_J(j)-a\sum_{j=5}^{x+4}P_J(j)\right]\left[1-u(x)\right]+P_I(x+5)\left[a\sum_{j=x+5}^{9}P_J(j)\right]\left[1-u(x+5)\right], \quad (2)$$

(c) $-1\geq x\geq -4$ のとき

$$P_X(x)=P_I(x+10)\left[\sum_{j=0}^{x+9}P_J(j)+\sum_{j=x+10}^{9}P_J(j)\,u(x+10)\right]+P_I(x+5)\left[\sum_{j=0}^{x+4}P_J(j)+a\sum_{j=5}^{x+9}P_J(j)+\left\{1-\sum_{j=0}^{x+4}P_J(j)-a\sum_{j=5}^{x+9}P_J(j)\right\}u(x+5)\right], \quad (3)$$

(d) $x=0$ のとき

$$P_X(0)=P_I(0)+P_I(5)-P_X(5), \quad (4)$$

(e) $y=1$ のとき

$$P_Y(1)=\sum_{i=5}^{9}\left\{P_I(i)a\sum_{j=i}^{9}P_J(j)\left[1-u(i)\right]\right\}, \quad (5)$$

(f) $y=-1$ のとき

$$P_Y(-1)=\sum_{i=1}^{4}\left\{P_I(i)\left[\sum_{j=0}^{i-1}P_J(j)+a\sum_{j=5}^{i+4}P_J(j)+\left\{1-\sum_{j=0}^{i-1}P_J(j)-a\sum_{j=5}^{i+4}P_J(j)\right\}u(i)\right]\right\}+P_I(5)\left[\sum_{j=0}^{4}P_J(j)+\sum_{j=5}^{9}P_J(j)\,u(5)\right], \quad (6)$$

(g) $y=0$ のとき

$$P_Y(0)=1-P_Y(1)-P_Y(-1). \quad (7)$$

今，n 人の客が買物をしたとき，1 円玉および 5 円玉が不足する確率が 5 %以下になるために必要な 1 円玉および 5 円玉の準備枚数を求めることにする．これらは，X および Y の標本和の確率分布 $N(n\mu_X, n\sigma_X{}^2)$, $N(n\mu_Y, n\sigma_Y{}^2)$ の下側 5 %点で評価でき，必要な 1 円玉の準備枚数 Z_X および 5 円玉の準備枚数 Z_Y は，それぞれ

$$Z_Y=n\mu_X-1.65\sqrt{n}\,\sigma_X. \quad (8)$$

$$Z_Y=n\mu_Y-1.65\sqrt{n}\,\sigma_Y. \quad (9)$$

となる．

3. 数値例

3.1 初期条件

数値計算にあたって，確率関数 $P_I(i)$, $P_J(j)$ を

$$P_I(i)=0.1,\ P_J(j)=0.1$$

と定める．すなわち，支払い代金の 1 円の位(i)，および客の所持金の 1 円の位(j)は，ともにその値が 0 ～ 9 まですべて同じ確率をとり，片寄りがないことにする．この条件は，実際にすべての場合に適合するわけではないが，一般的であると考えてよい．また，客数は1000人までを考えた．

3.2 計算結果

a をパラメータとしたときの 1 円玉および 5 円玉の必要な準備枚数を**図 2** および**図 3** に示す．ここで，ものぐさ率を $u(i)=0.5$ としている．

また，$u(i)$ をパラメータとしたときの 1 円玉および 5 円玉の必要な準備枚数をそれぞれ**図 4** および**図 5** に示

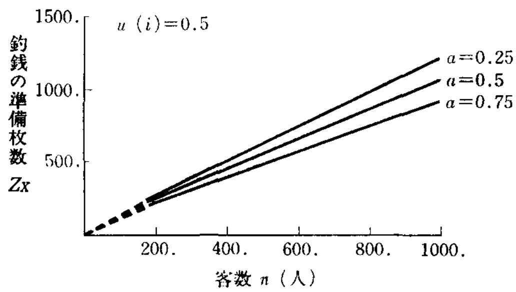

図 2　客数 n に対して必要な 1 円玉の準備枚数と a の関係

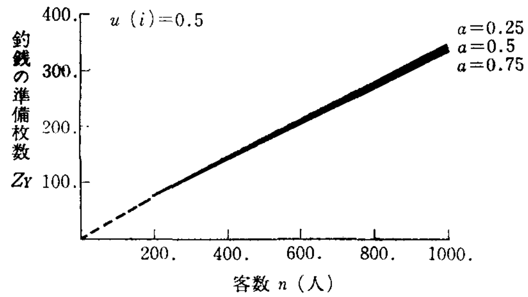

図 3　客数 n に対して必要な 5 円玉の準備枚数と a の関係

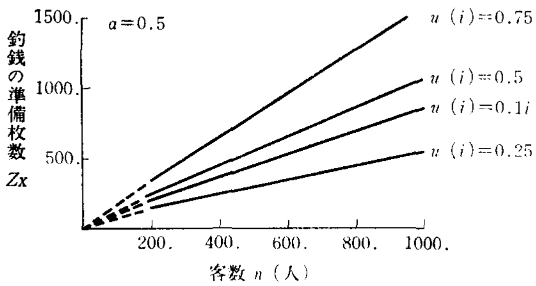

図 4　客数 n に対して必要な 1 円玉の準備枚数と $u(i)$ の関係

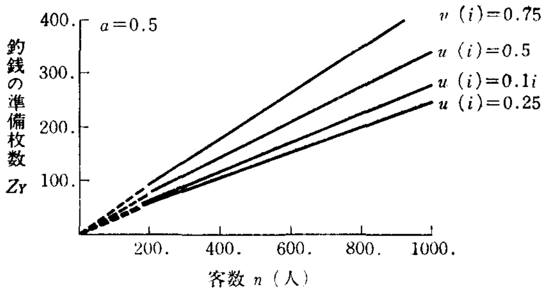

図 5　客数 n に対して必要な 5 円玉の準備枚数と $u(i)$ の関係

す．ここで，$a=0.5$ である．

3.3 考察

まず，1 円玉の必要な準備枚数を示した図 2 および図 4 を比較すると，パラメータ $u(i)$ の方が，a に比べて釣銭の準備枚数に対する影響が大きいことがわかる．

そこで，何も知識がないものとして，仮に最も多く釣銭が必要な場合を考える．確率変数 X の最小値は -4 であるから，1000 人の客に対して 1 円玉が 4000 枚必要ということになる．一方，本研究の方法では，ものぐさ率 $u(i)=0.75$ の場合でも，1000人の客に対しては 1 円玉が 1500枚程度でよいことがわかる．つまり，釣銭は“意外に”少なくて済むことがわかる．5 円玉の場合も 1 円玉と同様のことが言える．

4. おわりに

以上の議論は，釣銭を 1 円玉および 5 円玉に限って述べたが，単位を置き換えれば，10円玉や100円玉といった，高額な釣銭でも同様な議論ができる．また，特定の状況で支払い代金などの各パラメータがある程度確定するような場合には，その設定値を変えることにより，より現実的な結果が得られる．なお，文献[1]にみられるようなマルコフ連鎖を用いたモデル化は，本研究で取り上げた問題を確率過程により記述する場合には，より有効であると考えられる．

参 考 文 献

[1]　小沢正典：“つり銭の準備額”，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 30, No. 12, pp. 779–783 (1985).

訂正とお詫び

前号に次のような校正ミスと欠落がありました．訂正してお詫び申し上げます．

1. 191頁 (2.2)式

$$(\prod_{j=1}^{n} a_1)^{1j/n} \longrightarrow (\prod_{j=1}^{n} a_{1j})^{1/n}$$

2. 194 頁下 4 行（欠落，アンダーライン部分）
の値の範囲外にあるものはコピーまがいでないと判定する．このテストにすべて残ったものを一応コピーまがいの候補として……