ファイナンス理論の概要

——金利構造と金利感応証券の価格理論——

Chi-fu Huang[†] and 浦谷　規[*]

1.　はじめに

ファイナンス理論とその応用の連載の最終回として，連載第3回の条件付き証券の価格理論を無倒産債券(default-free bonds)の価格理論，すなわち“金利構造の理論”と呼ばれるものに応用してみよう．そして，金利構造の理論がいかに債券先物や債券オプションのような金利感応証券の価格決定を理解するのに役立つかも述べる．

2.　無倒産証券の裁定価格理論

この節では無倒産債券の価格理論を考えてみよう．無倒産債券の割引債としての1単位を，満期である決まった1日に円の支払が確実にある金融証券であるとしよう．仮定として，すべての満期の割引債の価格はN次の“状態変数”Y，の関数であり，現時点tと満期時点Tに対して，$S(Y(t),t;T)$と記す．これらの状態変数は次の拡散過程にしたがう：

$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t \beta(Y(s),s)ds + \int_0^t g(Y(s),s)dw(s),\quad \forall t,$$

ただし，wは確率Pの下でのN次の標準ブラウン運動で，βは$N\times 1$ベクトル，gは$N\times N$行列とする．また，gはすべてのY，tおよびSに対してフルランクとし，SはYとtの滑らかな関数とする．

割引債以外に，借入および預金が自由にできる安全利子率が存在するものとする．この利子率の瞬時の金利は，時刻tには$r(Y(t),t)$であるとすると，1円は時刻tには，$B(t)=\mathrm{dxp}\left\{\int_0^t r(Y(s),s)ds\right\}$となり，これを安全資産の価格プロセスと呼ぶ．記号の単純化のために，これからはしばしば$S(Y(t),t;T)$および$r(Y(t),t;T)$をそれぞれ$S(t;T)$および$r(t)$と記す．

さて，満期が$T_1,T_2,\cdots,T_m$である無倒産債券の割引債の1単位ずつの集まりを考えよう．ただし，$m>N$とする．一般性を失わずに，$T_1<T_2<\cdots<T_m$と仮定できる．さらに，これらの割引債の価格は裁定取引機会がないものと仮定する．

連載第3回と第4回から，裁定機会がないための必要条件は一意の同値マルチンゲール測度の存在であることを知っている．すなわち，すべての満期$T_i(i=1,2,\cdots,m)$に対して，$S(t;T_i)/B(t)$がマルチンゲールとなる確率測度Qが存在する．伊藤の補題から，次の式が導ける．

$$\begin{aligned}d(S(t;T_i)/B(t))=&[-S(t;T_i)r(t)/B(t)\\&+(\mathscr{L}S(t;T_i))/B(t)+S_t(t;T_i)/B(t)]dt\\&+S_y(t;T_i)^{\mathsf{T}}g(Y(t),t)/B(t)dw(t),\end{aligned}\tag{1}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}S(t;T_i)=&\frac{1}{2}\mathrm{tr}(S_{yy}(t;T_i)g(Y(t),t)\\&g(Y(t),t)^{\mathsf{T}})+S_y(t;T_i)^{\mathsf{T}}\beta(Y(t),t),\end{aligned}$$

trは“トレース”を表わし，Sの添え字はSの偏微分を表わす．また，$(\mathscr{L}S(t;T_i)+S_t(t;T_i))/S(t,T_i)$は満期が$T_i$の割引債の時刻$t$における瞬時の期待収益率となることがわかる．Girsanovの定理から，確率Qの下ではN次のプロセス$\kappa(t)$が存在し，

$$w^*(t)=w(t)-\int_0^t\kappa(s)ds\quad t\in\mathscr{R}_+,\tag{2}$$

が標準ブラウン運動となることは連載第3回の定理1のとおりである．(2)を(1)に代入すると，

$$\begin{aligned}d(S(t;T_i)/B(t))=&[-S(t;T_i)r(t)/B(t)\\&+(\mathscr{L}S(t;T_i))/B(t)+S_t(t;T_i)/B(t)\\&+S_y(t;T_i)^{\mathsf{T}}g(Y(t),t)\kappa(t)/B(t)]dt\\&+S_y(t;T_i)^{\mathsf{T}}g(Y(t),t)/B(t)dw^*(t),\end{aligned}\tag{3}$$

となる．$S(t;T_i)/B(t)$は，Qの下ではマルチンゲールであるから，時間変化の項は存在しえない．したがって，次の式が得られる．

† Massachusetts Institute of Technology
* 静岡県立大学

$$-S(t;T_i)r(t)+\mathscr{L}S(t;T_i)+S_t(t;T_i)$$
$$+S_y(t;T_i)^{\mathsf{T}}g(Y(t),t)\kappa(t)=0,\quad \forall t. \tag{4}$$

故に，裁定機会が存在しない必要条件は，N次のプロセスκがすべての満期T_iに対して，(4)を満足することである．異なる満期の割引債の数はブラウン運動の次元より大きい，すなわちM/Nとしたので，線形代数の初歩の知識から，κが一意的に決まることがわかる．さらに，満期は任意に選べるので，κは満期から独立でなければならない．したがって，κはYとtの関数でなければならない．そこで，$\kappa(t)=\kappa(Y(t),t)$と記す．

以上から次のことが明らかとなった．もし$\kappa(Y(t),t)$がわかったなら，(4)は$S(Y,t;T)$が満たすべき次のとおりの偏微分方程式となる．

$$-S(Y,t;T_i)r(Y,t)+\mathscr{L}S(Y,t;T_i)+S_t(Y,t;T_i)$$
$$+S_y(Y,t;T_i)^{\mathsf{T}}g(Y,t)\kappa(Y,t)=0,$$
$$\forall t\in[0,T_i)\ \forall Y. \tag{5}$$

さらに，無倒産の割引債の1単位は，満期日には1円でなければならない．したがって，$S(Y,t;T_i)$は境界条件を$S(Y,T_i;T_i)=1$とする(5)の解である．

無倒産の割引債の価格に対する裁定アプローチを，要するに関数$\kappa(Y,t)$の定義に依存する．この定義は任意ではありえなく，Girsanovの定理を満たすように関数κを選ばねばならない．すなわち，任意の満期$T>0$に対して$E[\zeta(T)]=1$となるκを選ぶ．ただし，

$$\zeta(T)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\kappa(Y(s),s)^{\mathsf{T}}\kappa(Y(s),s)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^T\kappa(Y(s),s)^{\mathsf{T}}dw(s)\right\}.$$

さらに，$\kappa(Y,t)$が上の式を満たすように選ぶと，

$$Q(A)=\int_A\zeta(\omega,T)P(d\omega)$$

が，状態変数Yから得られるすべての事象Aに対して，Pに同値な確率となる．そこで，割引債の価格は，次式となる．

$$S(Y(t),t;T_i)=B(t)E_t{}^*[1/B(T_i)]$$
$$=E^*[\exp\{-\int_t^{T_i}r(Y(s),s)ds\}|Y(t)],$$

ただし，$E_t{}^*[\cdot]$はQの下での時刻tにおける条件付き期待値であり，第2の等号はYのマルコフ性から得られる．そこで，容易に$S(t;T_i)/B(t)$がQの下で$S(T_i;T_i)=1$を満たし，マルチンゲールになることがわかる．以上のように定義されたすべての満期に対する割引債は，かくして無裁定価格システムをなすことになる．もちろん，SはYとtに関して滑らかな関数であり，$S(Y,t;T_i)$は，境界条件$S(Y,T_i;T_i)=1$を満たす(5)の解となる場合である．

1単位の割引債の価格に対して，満期前の時刻$t<T_i$の第i債券に対する最終利回り（yield-to-maturity）$R(Y,t;T_i)$を次のように定義する．

$$S(Y,t;T_i)=\exp\{-R(Y,t;T_i)(T_i-t)\}.$$

したがって，$R(Y,t;T_i)=\dfrac{-\ln S(Y,t;T_i)}{T_i-t}$であり，時刻$t$の最終利回り曲線(yield curve)すなわち，時刻tにおける“金利構造”は，状態変数Yが与えられたときの種々の満期T_iに対する関数$R(Y,t;T_i)$にすぎない．

通常の利付き債は，割引債のポートフォリオにすぎないので，割引債の価格がわかれば利付き債の価格は容易に計算できる．

3. Cox-Ingersoll-Ross モデル

Cox, Ingersoll, Ross(1985)の金利構造のCIRモデルは前節で概説した裁定アプローチの応用である．状態変数Yは1次元で，瞬時の安全利子率$r(t)$と仮定する．さらに，rは次のような平均復元（mean reverting）プロセスにしたがうと仮定する．

$$r(t)=r(0)+\int_0^t\kappa(\theta-r(s))ds+\int_0^t\sigma\sqrt{r(s)}dw(s), \tag{6}$$

ただし，wは1次元の標準ブラウン運動で，$k>0$, $\theta>0$およびand $\sigma>0$がその3つのパラメータである．θはrの“長期的平均”を表わし，現在の利子率が長期的平均より低いときには，すぐにrをこの平均の方へ引き上げる．同様に現在の利子率が長期的平均より上にあるとき，すぐにrをこの平均の方へ引き下げる．kは平均復元の強さを表わす．平均復元の時間的変化はブラウン運動のランダム ショックによっても影響を受ける．ランダム ショックのばらつきは，利子率の平方根とσに比例する．利子率が高いときには，利子率の動きにより大きな不確実性が伴う．

均衡理論から，CIRモデルは次のように定める．

$$\kappa(r,t)=-\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r},$$

ただしλは正負いずれでもよい値である．利子率のプロセスはマルチンゲール測度の下では次のようになる．

$$r(t)=r(0)+\int_0^t(k+\lambda)\left(\frac{k\theta}{k+\lambda}-r(s)\right)ds$$
$$+\int_0^t\sigma\sqrt{r(s)}\,dw^*(s). \tag{7}$$

これもまた，長期的平均を$k\theta/(k+\lambda)$とする平均復元プロセスとなる．確率Qの下では，確率Pの下での3つのパラメータに加えて，さらにλがあることに注意され

たい．

(5)の偏微分方程式から

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rS_{rr}(r,t;T_i)+S_r(r,t;T_i)[k(\theta-r)-\lambda r]+S_t(r,t;T_i)-rS(r,t;T_i)=0, \tag{8}$$

が得られ，その境界条件は $S(r,T_i;T_i)=1$ である．この解は，次であることが確認できる．

$$S(r,t;T_i)=A(t,T_i)e^{-rG(t,T_i)},$$

ただし，

$$A(t,T_i)=\left[\frac{2\gamma e^{(k+\lambda+\gamma)(T_i-t)/2}}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma(T_i-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2k\theta/\sigma^2},$$

$$G(t,T_i)=\frac{2(e^{\gamma(T_i-t)}-1)}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma(T_i-t)}-1)+2\gamma},$$

$$\gamma=[(k+\lambda)^2+2\sigma^2]^{1/2}.$$

伊藤の補題を用いると，

$$dS(r,t;T_i)=r[1-\lambda G(t,T_i)]S(r,t;T_i)dt-G(t,T_i)S(r,t;T_i)\sigma\sqrt{r}\,dw(t).$$

が得られ，$\lambda<(>)0$ のとき，次の瞬間に満期になっていない割引債の瞬時の期待収益率は，r より大きい（小さい）．

時刻 t における満期が T_i の割引債の最終利回りは，

$$R(r,t;T_i)=[rG(t,T_i)-\ln A(t,T_i)]/(T_i-t),$$

となり，満期に近づくと，$R(r,t;T_i)$は r に収束する．また，非常に長い満期の時には，$R(r,t;T_i)$の極限は次のとおりである．

$$\lim_{T_i\to\infty}R(r,t;T_i)=\frac{2k\theta}{\gamma+k+\lambda}.$$

さらに，$r<\theta$ の時には最終利回り曲線は一様に上昇する．r が $k\theta/(k+\lambda)$ より大きいとき，最終利回り曲線は一様に下落する．両者の中間の値の時に，最終利回り曲線は瘤状になる．

このＣＩＲモデルは，たとえば２つの瘤を作れないなど，一見では応用が限られているようにみえる．したがって，実際に観測される最終利回り曲線をすべてこのモデルが解析できるようにはみえない．しかし，この欠点はパラメータを時間の関数にすることによって容易に解消する．たとえば，θ を時間の関数にすると，瞬時の利子率のプロセスは，

$$r(t)=r(0)+\int_0^t k(\theta(s)-r(s))ds+\int_0^t\sigma\sqrt{r(s)}dw(s), \tag{9}$$

となり，時刻 t における割引債の価格は，

$$S(r,t;T_i)=\hat{A}(t,T_i)e^{-G(t,T_i)r},$$

である．ただし，

$$\hat{A}(t,T_i)=\exp\left(-k\int_t^{T_i}\theta(s)G(s,T_i)ds\right).$$

そこで，最終利回り曲線は関数 $\theta(t)$ に依存して任意の形状をとりうる．

このモデルを応用するためには，無倒産債券の観測される価格からパラメータを推計する必要がある．

4. 金利感応証券の価格決定

金利構造の理論は割引債の価格決定ばかりでなく，一般の金利感応証券の価格決定にも有効である．いまからは，ＣＩＲモデルにしたがい，そのパラメータ k, θ, σ および λ が既知であるとしよう．

無倒産割引債のヨーロッパ型コールオプションを考える．債券の満期は T_i であり，コールオプションの満期と行使価格はそれぞれ $T<T_i$ と $K>0$ とする．コールオプションの時刻 t における価格を $C(t)$ と記す．利子率の不確実性を生むただ１つのブラウン運動に対して，多くの異なる満期の債券が存在するので，動的に完備な市場である．したがって，このオプションは裁定によって価格が決まる．裁定機会のない価格はマルチンゲールとなるので，

$$\begin{aligned}C(t)&=B(t)E_t^*[\max[S(r(T),T;T_i)-K,0]/B(T)]\\&=E^*\left[\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}\max[S(r(T),T;T_i)-K,0]\,|\,r(t)\right],\end{aligned}$$

ただし，第２の等号は r の Q の下でのマルコフ性からえられる．同値マルチンゲール測度の下での r の推移確率は知られているので（CIR, p. 391 を参照），上記の期待値は求めることができる．興味のある読者は，その式を（CIR, p. 396）を見られたい．

同じ原理で，"任意の"金利感応証券の価格を決定することができる．$\phi(t)$ を時刻０から t までの r の履歴に依存するランダムな時刻 t のキャッシュフローとする．単純化のために，$\phi(t)$ は，有限時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 以外では零であるとする．時刻 t での $\phi(t_i)$ の価格は，

$$E_t^*\left[e^{-\int_t^{t_i}r(s)ds}\phi(t_i)\right].$$

ただし，$t_i>t$ である．したがって，時刻 t のこの証券の価格は，

$$\sum_{t_i>t}E_t^*\left[e^{-\int_t^{t_i}r(s)ds}\phi(t_i)\right].$$

この一般的な金利感応証券の具体例は，モルゲージを集めたものに対する証券 Mortgage-Backed Securities である．この例では，集められたモルゲージの利息と元金の受取から発生するキャッシュフローが $\phi(t_i)$ であ

る．このような証券の価格を決定するためには，次の2つだけが必要である．確率Qの下での無倒産利子率のパラメータおよび集めたモルゲージが生むキャッシュフローの予測である．

5. 金利感応証券の先物および先渡価格

割引債の先物や先渡契約のような，連続的に変わる金融契約の価格について考えてみよう．議論を具体的に進めるために，ＣＩＲモデルを用いる．

先渡契約とは，ある財または証券を将来の決まった日“満期”に，現在の“先渡価格”で売買する契約である．満期には先渡価格は財または証券の現物価格に等しい．

満期がT_iの割引債に対して考えてみよう．この債券の売買を限月受渡日“満期”$T<T_i$に行なう先渡価格の時刻tにおける価格を$F(t)$とする．金銭の授受は先渡契約をする段階ではないので，時刻tの投資額は零である．したがって時刻Tにおける受取$S(r,T;T_i)-F(t)$の時刻tの価値は零でなければならない．数学的には，$F(t)$のこの条件は次のようにかける．

$$E_t{}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}(S(r(T),T;T_i)-F(t))]=0.$$

$S(t;T_i)/B(t)$はQの下でマルチンゲールであるから，$E_t{}^*[e^{-\int_t^s r(s)ds}S(r(T),T;T_i)]=S(r(t),t;T_i)$．また，$F(t)$は時刻$t$に決められているので，

$$E_t{}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}F(t)]=F(t)E_t{}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}]$$
$$=F(t)S(r(t),t;T),$$

となる．ただし，第2の等号は$S(r(T),T;T)=1$から得られる．時刻Tに割引債は満期になるからである．したがって，

$$F(t)=S(r(t),t;T_i)/S(r(t),t). \tag{10}$$

となる．かくして，時刻tの割引債に対する先渡価格はその時の債券価格で決定される．(10)から明らかなように，$F(t)$はパラメータTおよびT_i以外に$r(t)$とtの関数である．

さて，先物価格を考えてみよう．先物契約とは，ある財または証券を満期日に売買する契約であり，契約するときに“先物価格”で売買すると定める．満期日には先物価格は現物価格と等しい．契約時には，金銭の交換はない．しかし，その後先物価格の変動にしたがい，契約者間に支払義務が発生する．満期日の財または証券の売買は，その時点の現物価格で行なわれる．はじめの先物価格と現物価格の差の支払（受取）と契約期間中の清算された額がこの契約の金銭の授受となる．したがって，先物価格は残存期間中の支払が常に零になるように連続的に変化しなければならない．

$f(r,t)$を限月受渡日Tに1単位の割引債に対する時刻tの先物価格としよう．割引債の満期日は先物の満期日，つまり限月受渡日より長い，$T_i>T$と仮定する．さらに，$f(r,t)$を$r(t)$に関して2回微分可能でtに関して1回微分可能な関数とする．

定義から，時間$[s,s+ds]$における先物契約から発生するキャッシュフローはその期間の先物価格の変化$df(r(s),s)$に等しい．初期の投資額は零であるから，すべての$s\in[t,T]$に対するキャッシュフローの時刻tにおける現在価値はまた零でなければならない．したがって，

$$E_t{}^*\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau}df(r(s),s)\right]=0.$$

fは連続関数で，利子率の実現値も時間の連続関数であるから，部分積分によって，

$$f(r(t),t)=E_t{}^*\left[e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}f(r(T),T)\right.$$
$$\left.+\int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau}r(s)f(r(s),s)ds\right], \tag{11}$$

が得られ，両辺に$e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$をかけ，$\int_0^t e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau}r(s)f(r(s),s)ds$を加えると，

$$e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau}f(r(t),t)+\int_0^t e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau}r(s)f(r(s),s)ds$$
$$=E_t{}^*\left[e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau}f(r(T),T)+\int_0^T e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau}\right.$$
$$\left.r(s)f(r(s),s)ds\right], \tag{12}$$

が得られる．上の式の右辺はフィクスされた確率変数の条件付き期待値であるので期待値のチェーンオペレイションにより，Qの下でマルチンゲールになる．したがって，左辺もまたQの下でマルチンゲールとなる．そこで左辺に伊藤の補題をもちい，さらにQの下でマルチンゲールであることから，これの時間変化の項は零でなければならない．したがって，

$$\frac{1}{2}f_{rr}(r,t)r\sigma^2+f_r(r,t)[k(\theta-r)-\lambda r]+f_t=0, \tag{13}$$

がfの満たす偏微分方程式となる．境界条件は先物契約の満期日に先物価格は現物価格に等しくなければならないことから得られる．すなわち，$f(r,T)=S(r,T;T_i)$である．容易にこの境界条件を満たす(13)の解は，

$$f(r(t),t)=E^*[S(r(T),T;T_i)\,|\,r(t)], \tag{14}$$

であることを確認できる．したがって，先物価格のプロセスは，マルチンゲール測度の下のマルチンゲールとなる．これは永続証券に対するマルチンゲールの結果，すなわち価格のプロセスは（安全資産で割った）Qの下でマルチンゲールになるという結果とは異なる．なぜな

ら，先物価格は永続証券の価格ではなく，それは，連続的に清算される金融契約の価格であるからである．

確率Qの下で，rの推移確率は知られているので，(14)の期待値は求められる．興味のある読者は試みられたい．この解析的な解は，はじめに仮定したようにrに関して2回微分可能で，tに関して1回微分可能な関数である．

6. おわりに

連載の最終回として，条件付き証券の裁定価格理論がいかに有効に利子率の動きや金利感応証券の価格決定に応用できるかを概説した．詳細は Huang(1989) を参考にされたい．

Cox, Ingersoll, Ross(1985) の金利構造のモデル以外にも，Brennan and Schwartz (1979), Heath, Jarrow, and Morton(1988), Ho and Lee(1986), Richard(1978), and Vasicek(1977)などがあり，興味のある読者はこれらも読まれると参考になる．

参考文献

[1] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. 1985. A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**:385–407.

[2] Brennan, M., and E. Schwartz. 1979. A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance* **3**:133–155.

[3] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. 1988. Bond Pricing and the term structure of interest rates: a new methodology. Unpublished manuscript, Cornell University.

[4] Ho, T., and S. Lee. 1986. Term structure movements and pricing interest rete contingent claims. *Journal of Finance* **41**:1011–1028.

[5] Huang, C., 1989, *Lecture Notes on Advanced Financial Economics*. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

[6] Richard, S. 1978. An arbitrage model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics* **6**:33–57.

[7] Vasicek, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* **5**:177–188.