

AHPにおけるコピーまがいの代替案への現実的対処法

刀根 薫

0. はじめに

AHP(階層化意思決定法)の欠点としていわゆるランクの逆転現象がしばしば指摘される。この点に配慮することなくAHPを用いると誤った結論に導かれることがある。この現象は代替案の中に、評価基準に関して同一スコア(一対比較値)をもつもの(コピー)が含まれていたり、ほぼ同一のもの(コピーまがい)が含まれている場合に発生し、コピーやコピーまがいの属する案の重要度が不当に歪められて誤った結論に達することがある。

この研究ノートでは、第1節においてコピーやコピーまがいの起こす弊害について考察する。第2節では、重要度計算において固有ベクトル法と幾何平均法がほぼ同じ値を与えることを示す。第3節では幾何平均法を用いて、コピーまがいのものが重要度に与える影響の大きさを分析する。第4節では相対誤差と絶対誤差の関係について調べる。第5節では重要度の計算値からコピーまがいのものを発見する方法を提案する。第6節ではここに提案した方法の実務上の使い方について具体的に述べる。

1. コピーやコピーまがいの代替案とその弊害

ある評価基準Cに関する n コの代替案 A_1, \dots, A_n の一対比較行列を $A=(a_{ij})$ とする。 A は n 次の正方行列で次の性質をもつ。

$$(1.1) \quad a_{ii}=1(i=1, \dots, n), \quad a_{ij}=1/a_{ji}(i, j=1, \dots, n), \\ a_{ij}>0(i, j=1, \dots, n).$$

a_{ij} の値は通常 $1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9$ のスケールの中から A_i と A_j の価値に関する一対比較によって選ばれる。以下この値をAHPスケールと呼ぶことに

とね かおる 埼玉大学大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255
受理：2年9月10日

する。

いま、 A の行ベクトルのうち2つのもの(それを一般性を失うことなく第1行と第 n 行とする)が同一であるとき互いに“コピー”であるという。(1.1)の2番目の関係式から2つの列も同一である。このとき A の右固有ベクトルを $w=(w_1, \dots, w_n)$ とすれば

$$(1.2) \quad w_1=w_n$$

となる。また2つの行がほぼ同一であるとき互いに“コピーまがい”と呼ぶことにする。後ほどこの近さについてはより詳細に検討するが、コピーまがいの行に関しても w_1 と w_n の値はほぼ等しい値となる。

コピーやコピーまがいの代替案が混入しているときAHPによる結論が誤りになることがある。それを刀根[6]から引用する。

“ある企業の採用担当者にA氏とB氏がいて、その力関係は0.68対0.32でA氏の方が強いとする。候補者としてはX君とY君があるが、A氏は2対1でX君を好み、B氏は1対3でY君を好むとする。そのときAHPによる評価は下のようになる。

	A氏(.68)	B氏(.32)
X君	.666	.25
Y君	.333	.75

総合評価は $X=.666 \times .68 + .25 \times .32 = .533$, $Y=.333 \times .68 + .75 \times .32 = .466$ となってX君の方が有利である。

ここでX君型の人(コピー)がもう1人応募してきたとする。それを X_1 君としよう。A氏、B氏の好みはX君のケースと同じとする。そのとき評価は次のようになる。

	A氏(.68)	B氏(.32)
X君	.4	.2
X_1 君	.4	.2
Y君	.2	.6

各氏とも、XタイプとYタイプに対する評点の差が前に比べて減少したことに注意したい。その結果、総合得点では $X=X_1=.4 \times .68 + .2 \times .32 = .336$, $Y=.2 \times .68$

$+ .6 \times .32 = .328$ となって X, X₁ 君と Y 君の差は僅少となる。

ここで X 君型の人がさらに 1 に人応募してきたとする。それを X₂ 君としよう。A 氏, B 氏の好みは X 君の場合と同じとする。そのとき評価は次のようになる。

	A 氏 (.68)	B 氏 (.32)
X 君	.286	.167
X ₁ 君	.286	.167
X ₂ 君	.286	.167
Y 君	.143	.500

各氏とも, X タイプと Y タイプに対する評点の差が前に比べてさらに減少したことに注意したい。その結果, 総合得点では $X = X_1 = X_2 = .286 \times .68 + .167 \times .32 = .248$, $Y = .143 \times .68 + .500 \times .32 = .258$ となって Y 君の方が有利になり逆転する。これを代替案の追加による順位の逆転と呼ぶ。”

この例ではコピーを追加していったが, 最初からコピーやコピーまがいが入っているかもしれない。そのような場合 AHP による結論は誤りとなりかねない。このような現象が発生する可能性があることは AHP の欠点として AHP 批判派から強く非難されている (たとえば Dyer [1])。

そこでこのようなコピーやコピーまがいのものが一対比較行列に含まれているかどうかを調べる必要がある。それを, 一対比較行列上で行なうとすれば nC_2 回の行比較を必要とし, さらに評価基準が複数個ある場合 (それが普通である) には, その数倍の比較を行なわねばならない。そこでむしろ行列の事前検査をやめて, 通常の方法で総合的重要度を計算し, その値の近さから逆にコピーやコピーまがいと思われる代替案 (群) を発見する方法を考える。もし 2 つの代替案が互いにコピーならば総合的重要度は同一になる。コピーまがいの場合にはほぼ等しい値になる。しかし逆は成立しないので, ほぼ等しい重要度もつ 2 つの代替案がコピーまがいであるかどうかの最終的な判定は一対比較行列 (通常複数個) に戻って調べねばならない。しかしその手間は, 全部を事前に調べる手間よりはずっと少ないはずである。

実は, この現象に関する研究としては Saaty [5] がある。それによれば重要度が 10% 程度異なる代替案はコピーまがいの可能性があるとしている。Saaty の解析方法とここで述べる方法は全く異なるし, それから得られた結論も若干違う点があることにまず注意したい。

次節では, まず固有ベクトル法と幾何平均法の関係に

ついて述べる。

2. 固有ベクトル法と幾何平均法

固有方程式

$$(2.1) \quad Aw = \lambda_{\max} w$$

を満足する実最大固有値 λ_{\max} とその固有ベクトル w を求め, 固有ベクトルの要素の和が 1 になるように正規化して (以後正規化とはこの操作を指す), 重要度 w を求める方法を固有ベクトル法と呼ぶ。それに対して A の各行要素の幾何平均からなるベクトルを求め, それを正規化して重要度 g を求める方法を幾何平均法という。すなわち

$$(2.2) \quad \left(\prod_{j=1}^n a_{1j} \right)^{1/n}, \left(\prod_{j=1}^n a_{2j} \right)^{1/n}, \dots, \left(\prod_{j=1}^n a_{nj} \right)^{1/n}$$

を正規化して g_1, g_2, \dots, g_n とする方法である。

容易にわかるように, 行列 A が完全に整合性をもつとき, すなわち

$$(2.3) \quad a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$$

がすべての i, j, k について成立するならば

$$(2.4) \quad w = g$$

となる。いわゆる整合度 (CI) や整合比 (CR) が小さい場合に両者が近接することは容易に想像されることであるが, それをモンテカルロ実験で確かめたのが表 2.1 である。

その実験は次のように行なった。

1. A の第 1 行を次のように決める。 $a_{11} = 1$ とし, $a_{1j} (j=2, \dots, n)$ を $1/9, \dots, 9$ の AHP スケールからランダムに選ぶ。
2. 以下, A の第 2 行 ~ 第 $(n-1)$ 行の右上半分, すなわち $a_{ij} (i=2, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n)$ を次のように決める。

$x = a_{1j}/a_{1i}$ を計算し

- (1) $x > 9$ ならば, $a_{ij} = 9$ とする。
- (2) $x < 1/9$ ならば, $a_{ij} = 1/9$ とする。
- (3) $1/9 \leq x \leq 9$ ならば $1/9, \dots, 9$ のうち x に直近の値を求める。直近の値が唯一に定まらない場合はそのなかからランダムに選ぶ。直近値を中央として含む前後 5 コの値のなかから, ランダムに a_{ij} を決める。たとえば $x = 1.666$ ならば, $1/2, 1, 2, 3, 4$ のなかからランダムに選ぶ。ただし $1/9$ や 9 に近い場合には $1/9$ や 9 を必要な数個分繰り返し用いる。たとえば $x = 8$ ならば $6, 7, 8, 9, 9$ のなかからランダムに選ぶ。

3. A の左下部分は逆数関係 $a_{ji}=1/a_{ij}$ によって決める。

4. $a_{ii}=1 (i=2, \dots, n)$ とする。

5. A の固有ベクトル w を求める。CI, CR も求める。 A の幾何平均ベクトル g を求める。

以上の手順によって w と g を計算し、 $CI \leq 1$ または $CR \leq 1$ を満たすものについて $|w_i - g_i| (i=1, \dots, n)$ の平均値

$$(2.5) \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |w_i - g_i|$$

を計算する。

以上のモンテカルロ実験を各 n につき 1000 回繰り返して平均値 μ の平均、標準偏差 (σ) を求めた結果が表 2.1 である。平均の回りで 2σ 以内に入る μ の割合はすべての場合に 95% 以上であった。 n 次の行列の場合、重要度の平均が $1/n$ であることから見れば表 1 の μ 当りの w_i と g_i の差は無視できる程度であることが分かる。ほぼ同様のことが Golden と Wang [3] によっても確かめられている。そこで以下の解析ではもっぱら幾何平均法を対象とする。

表 2.1 固有ベクトル法と幾何平均法の差

n	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	0.002	.003	.004	.003	.003	.003	.003	.003
σ	0.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001

3. コピーまがいの重要度

A の第 1 行に対して第 n 行がコピーまがいであるとすると、そして第 n 行の各要素は第 1 行の各要素と以下の関係があるとする。

$$(3.1) \quad a_{nj} = a_{1j}(1 + \varepsilon_j) \quad (j=1, \dots, n-1)$$

ただし

$$(3.2) \quad a_{nn} = 1, \quad a_{n1} = 1/a_{n1} = (1 + \varepsilon_1)^{-1}$$

である。

ここに ε_j は a_{nj} が a_{1j} に対してもっている相対誤差あるいは摂動とみることが出来る。ただし ε_j は小で $1 + \varepsilon_j > 0$ とする。ここで幾何平均法を用いて g_1 と g_n を求める。

$$(3.3) \quad g_1 = \left(\prod_{j=1}^n a_{1j} \right)^{1/n} = \left((1 + \varepsilon_1)^{-1} \prod_{j=2}^{n-1} a_{1j} \right)^{1/n}$$

$$(3.4) \quad g_n = \left(\prod_{j=1}^n a_{nj} \right)^{1/n} = \left((1 + \varepsilon_1) \prod_{j=2}^{n-1} a_{1j} (1 + \varepsilon_j) \right)^{1/n}$$

よって

$$(3.5) \quad g_n/g_1 = (1 + \varepsilon_1)^{2/n} \prod_{j=2}^{n-1} (1 + \varepsilon_j)^{1/n}$$

となる。

この操作により $\{a_{1j}\}$ や $\{a_{nj}\}$ の値は g_n/g_1 に直接関係しなくなったことに注意する。 ε_1 は他の $\varepsilon_j (j > 1)$ より影響度強いこともわかる。 $\{\varepsilon_j\}$ は一対比較を実行する者の精緻度を示すものである。以下 $\{\varepsilon_j\}$ が互いに独立に確率分布するものとして、いくつかの場合を考察する。

次のように記号を定める。

$$(1 + \varepsilon_1)^{2/n} \text{ の平均と分散を } m_1 \text{ と } \sigma_1^2$$

$$(1 + \varepsilon_j)^{1/n} \text{ の平均と分散を } m_j \text{ と } \sigma_j^2 (j=2, \dots, n-1)$$

$$g_n/g_1 \text{ の平均と分散を } M \text{ と } V \text{ とする。}$$

そのとき簡単な計算により次の命題が成立する。

【命題 1】

(3.5) 式の右辺において各 ε_j が独立に確率分布するとき

$$(3.6) \quad M = \prod_{j=1}^{n-1} m_j$$

$$(3.7) \quad V = \prod_{j=1}^{n-1} (m_j^2 + \sigma_j^2) - \prod_{j=1}^{n-1} m_j^2$$

である。

(1) 正規分布にしたがうとき

ε_j が $N(0, \sigma^2)$ にしたがうものとする。ただし $-1 < \varepsilon_j < 1$ とし、正規分布をこの範囲に打ち切ったものとする。いま $\sigma^2 = 0.05 (\sigma = 0.2236)$ および $\sigma^2 = 0.01 (\sigma = 0.1)$ のときの M および標準偏差 $S = V^{1/2}$ の値を数値計算により求めた結果を表 3.1 に示す。

(2) 一様分布にしたがうとき

ε_j が区間 $[-\delta, \delta]$ の一様分布にしたがうときを同様に調べる。 $\delta = 0.4$ のときの一様分布の分散 σ^2 は 0.0533 ($\sigma = 0.2309$) である。 $\delta = 0.2$ のときの一様分布の分散 σ^2 は 0.0133 ($\sigma = 0.1155$) である。2つの場合の M および S の値を表 3.2 に示す。

(3) 三角分布にしたがうとき

ε_j が $[-\delta, \delta]$ の三角分布にしたがうとき、ただし ε_j は 0 を軸に対称な分布とする。 $\delta = 0.5$ のとき三角分布の分散 σ^2 は 0.0417 ($\sigma = 0.2041$) である。 $\delta = 0.25$ のとき三角分布の分散 σ^2 は 0.0104 ($\sigma = 0.1021$) である。両方の場合の M および S の値を表 3.3 に示す。

これらの結果をみると M や S は $\{\varepsilon_j\}$ の分布の型にあまり左右されず、標準偏差 σ によってほぼ決まることがわかる。 $1/n$ 乗という演算がこのような結果を生んだものと思われる。

4. 相対誤差と絶対誤差の関係

これまで ε_j を a_{nj} が a_{1j} に対してもつ相対誤差として定義したが、そのとき絶対誤差は $a_{1j}\varepsilon_j$ ある。仮にで

表 3.1 正規分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.988	.983	.981	.979	.978	.977	.977	.976	.976	.975
	.998	.997	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.995	.995
S	.169	.140	.122	.109	.099	.092	.086	.081	.076	.073
	.075	.061	.053	.047	.043	.040	.037	.035	.033	.031

注：上段が $\sigma^2=0.05$ ($\sigma=0.2236$) のとき，下段が $\sigma^2=0.01$ ($\sigma=0.1$) のときの値

表 3.2 一様分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.988	.983	.980	.979	.977	.977	.976	.976	.975	.975
	.997	.996	.995	.995	.995	.994	.994	.994	.994	.994
S	.173	.143	.123	.110	.100	.092	.086	.081	.076	.073
	.086	.071	.061	.055	.050	.046	.043	.040	.038	.036

注：上段が $\delta=0.4$ ($\sigma=0.2309$) のとき，下段が $\delta=0.2$ ($\sigma=0.1155$) のときの値

表 3.3 三角分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.990	.987	.984	.983	.982	.982	.981	.981	.981	.980
	.998	.997	.996	.996	.996	.996	.995	.995	.995	.995
S	.153	.127	.110	.100	.089	.082	.077	.072	.068	.065
	.076	.063	.054	.048	.044	.041	.038	.036	.034	.032

注：上段が $\delta=0.5$ ($\sigma=0.204$) のとき，下段が $\delta=0.25$ ($\sigma=0.102$) のときの値

表 4.1 絶対誤差とスケール

a_{ij}	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
当該 (1)	1/9	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/3	1/2	1	2	3	4	4	5	6	7	8
	1/8	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4							5	6	7	8	9
			1/7	1/6	1/5									6	7	8	9
当該 (2)	1/9	1/9	1/9	1/7	1/6	1/5	1/4	1/2	1	2	3	3	4	5	6	6	7
	1/8	1/8	1/8	1/6	1/5	1/4	1/3						4	5	6	7	7
			1/7	1/7	1/5	1/4								5	6	7	8
			1/6														9

表 5.1 コピーまがいの範囲

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2.S	.15	.13	.11	.10	.09	.08	.07	.07	.07	.07

e_j が正規分布 $N(0, 0.1^2)$ にしたがう場合には e_j が区間 $[-0.2, 0.2]$ に生ずる確率は約95%であるが， a_{ij} の値に応じて絶対誤差の95%の区間は表 4.1 のようになる。すなわち，その区間に含まれる AHP スケールは表の当該 (1) のようになる。また区間 $[-0.25, 0.25]$ に生起する確率は約99%であるがそこには表の当該 (2) の AHP スケールが含まれる。

ここで相対誤差の大きさについて考えてみよう。相対誤差 $\sigma=0.1$ (10%) というのは AHP のスケールがほぼ10点法にしたがっていることから，妥当な値であると思われる。仮に AHP が100点法のスケールを用いているならば $\sigma=0.01$ (1%) 位にすべきであろうが，それほど厳しくすることは人間の能力を越えている判定ではなかろうか。表 4.1 でみると絶対誤差のカバーするスケールが中央の 1/2, 1, 2, 3 の所で若干厳し過ぎるようにも見えるが，この辺の値に対しては人間の感覚が十分敏感に対応すると思われる。これらの理由から $\sigma=0.1$ (10%) という相対誤差を以下では採用する。

5. コピーまがいの検出法

相対誤差 e_j の分布として $\sigma=0.1$ を採用した場合，コピーまがいを検出する方法を次に提案する。 $\sigma=0.1$ に対する g_n/g_1 の平均と標準偏差は表 3.1 のとおりであった。この表から $M=1$ としても実用上は支障がない。そこで標準偏差の2倍の範囲を考慮して次表を得る。

すなわち重要度が比率で上記の範囲内にあるものはコピーまがいとする。

具体的には重要度 w_1, w_2, \dots, w_n を大きい順に並べた上で上位のものから下位のものを見てその比率が $1-2S$ の範囲にあるものを上位のもののコピーまがいとしてゆく。先にも述べたように，最終的な判定は一対比較表 (通常複数) を見ながら実行しなければならない。仮に k

個の評価基準 C_1, \dots, C_k がであるとして，その重要度を c_1, \dots, c_k とするとき，非常に小さい重要度の評価基準上で一対比較値が異なっても，コピーまがいとして検出される場合があることに注意したい。そのような2つの代替案

はその一対比較行列上ではコピーまがいでない判定されるだろうが、実質的にはコピーになっている場合があることを示唆する。コピーまがいの判定には評価基準の重要度まで考慮しなければならない。

注) Saaty の判定法との違いについて

ここで Saaty [5] の提案との違いについて説明しておきたい。Saaty は A の要素 a_{ij} を $a_{ij} \pm 0.5$ としてランダムに攪乱させた行列を作り、その行列の固有ベクトルを求めて、元の行列の固有ベクトルと比較している。具体的には $a_{ij} \geq 1$ のときは 0.5 と -0.5 をランダムに採用し、 $a_{ij} < 1$ のときは $1/a_{ij}$ に対して ± 0.5 をランダムに攪乱させてから元に戻しているようである (論文にはそのことは明示されていないが)。なお、 0.5 と -0.5 をランダムに取る場合と区間 $[-0.5, 0.5]$ の一様分布をする場合の両方をモンテカルロ実験している。その結論として重要度の差が10%以下のものをコピーまがいとしている。実験の結果は行列の次数 n に若干作用される (n が大になるほど、差の相対値は減少する) が本レポートで提案したように大きな変化はない。Saaty の方法と本方法の基本的な違いは次の点にある。Saaty は絶対誤差が AHP スケールのどの値でも一定であるという仮定をしている。それに対して本方法では相対誤差が一定であると仮定している。AHP スケールの中央付近での 0.5 の変化と端の 0.5 の変化とが感覚的に同じとするのが Saaty の場合であり、それを異なるとするのが本レポートの場合である。この点を解明することは今後の課題である。

6. ソフトウェア上での実現法

AHP のソフトウェアは対話型のものがほとんどである ([2], [4])。そこでそのようなソフトウェアに上記の手順を組み込む方法について提案する。

① まず、コピーまがいの検出が必要かどうかを使用者に聞く。必要と答えた場合には以下の処理を行なう。

② 通常の AHP の計算により最終的な代替案 A_1, \dots, A_n の重要度を求める。それを大きい順に並べて、大きい方から順に第5節に述べた方法によりコピーまがいのものを検出してゆく。仮に A_i と A_j がコピーまがいの疑いがあるとしよう。このとき重要度の大きい評価基準に関する A_i と A_j の重要度を調べ、その比率が表 5.1 の値の範囲外にあるものはコピーまがいの候補として、一対比較行列上の第 i 行と第 j 行の値を、評価基準の重要度とともに、画面上に出す。使用者はその値をみて A_i と A_j がコピーまがいに属するかどうかを決定する。

③ A_i と A_j がコピーまがいであると決定した場合、それをまとめて1つの代替案とし一対比較表のサイズを1つ小さくする。仮に A_i 行にまとめたとする。そのとき新 $a_{ii} = 1$, 新 $a_{ik} = (\text{旧 } a_{ik} \text{ 旧 } a_{jk})^{1/2} (k \neq i)$, 新 $a_{ki} = 1/\text{新 } a_{ik}$, 他の行列の要素は元のままとすればよい。

④ 縮小した一対比較表をもとに AHP の計算を実行する。

注1) コピーまがいのものは2つの代替案に限らない。3つ以上のものが互いにコピーまがいになっている場合もあり得る。

注2) ②でコピーまがいの疑いのあるものを重要度の大きい代替案について比較するとしたが、具体的には次のようにする。重要度の大きい順に累積重要度が .9(90%) に達するまでの評価基準について比較する。

注3) ③では新しい一対比較行列の当該行を旧表の幾何平均値で置き換えたが、使用者が再び一対比較をやり直すようにしてもよい。

7. おわりに

このレポートでは AHP の欠点としてしばしば指摘されているコピーまがいの代替案を検出する方法を提案した。またこの方法を用いるさいの実際的な取扱い方についても述べた。AHP を正しく使うためにこの方法がソフトウェアに組み込まれることを希望する。

参考文献

- [1] Dyer, J. S., "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science*, Vol. 36, No. 3(1990).
- [2] Expert Choice, Decision Support Software.
- [3] Golden, B.L. and Q. Wang, "An Alternate Measure of Consistency", in *The Analytic Hierarchy Process: Application and Studies*, Golden, B.L., E. Wasil and P. Harker (Eds), Springer, 1989.
- [4] 「ねまわしくん」, 日本科学技術研修所.
- [5] Saaty, T. L., "Rank Generation, Preservation, and Reversal in the Analytic Hierarchy Process", *Decision Sciences*, Vol. 18, No. 2 (1987).
- [6] 刀根薫, ゲーム感覚意思決定法—AHP 入門—, 日科技連出版, 1986.