待ち行列の制御問題2題：

——負荷分散と経路選択の最適化をめざして——

大西　匡光

1.　はじめに

近年，複数のプロセッサから構成される並列・分散型の情報処理システムへの関心が高まっている．

これらのシステムにおいては複数のプロセッサへの負荷分散(Load Balancing あるいは Load Sharing)の方法がシステムの性能を大きく左右するため，さまざまな負荷分散の方法に関する研究が活発になされている．

本稿では負荷分散の最適化に関連した2種の基本的な待ち行列の制御問題：

　並列待ち行列への到着客の最適割り当て問題，

　並列サーバへの客の最適割り当て問題

を解説し，これらに関し，現在までに得られている主要な理論的結果を紹介する．

これらの問題は回線交換網やパケット交換網などの通信網におけるメッセージの経路選択(Routing)の最適化にも関連し，基本的で重要なものである．

2.　並列待ち行列への到着客の最適割り当て問題

サービス時間が各々分布関数 $F_1, F_2, \cdots, F_N$ にしたがう N 人のサーバが各々の待ち行列を持つ待ち行列システムを考える．客はある点過程にしたがい到着する．到着した客は即座にいずれかの待ち行列に割り当てられ，いったん待ち行列に割り当てられた客を後に改めて他の待ち行列に移すことは許されないものとする．さらに客の到着過程とサービス過程とは確率的に独立であると仮定する．

並列待ち行列への到着客の最適割り当て問題とは所与の費用構造のもとで規定の評価規範を最適化するような客の割り当て政策，すなわち，各室の到着時刻において，その時点で利用可能な情報（過去の客の到着・割り当て過程，サービス過程，待ち行列過程，客の退去過程などの内の一部もしくはすべて）にもとづき，到着した客をどの待ち行列に割り当てるかを（確率的に）定める規則 π を求めることである．

この問題はモデルに含まれる以下の要素によりさまざまな分類ができる：

a　到着過程，

b　サービス時間分布，

c　到着客の割り当てのさいに利用可能な情報，

d　費用構造および評価規範．

2.1　同種サーバの場合

Winston [19] は

a　Poisson 過程，

b　同種サーバ，指数サービス時間分布．

c　過去の履歴のすべてが利用可能な情報

の場合を議論した．その結果，各客の到着時刻においてその到着客をその時点で最小長の待ち行列（サービス中の客も含める）に割り当てる政策 (Send-to-the Shortest Queue Policy：SSQ-政策，あるいは Join the Shortest Queue Rule：JSQ-規則）は任意の有限な時刻 T に対し，T までにシステムから退去する客の割引き率 $\alpha(\geq 0)$ で割引かれた総数，すなわち，

$$\int_0^T e^{-\alpha t} dD(t)$$

を（通常の）確率順序 ((Ordinary) Stochastic Ordering：付録参照) $\leq_{st}$ に関して最大化することを示した．ただし $(D(t)\,;\,t\geq 0)$ は時刻 t までにシステムから退去する客の総数を表わす計数過程である．

Weber [17] は Winston [19] のモデルを

a　一般の点過程，

b　同種サーバ，ＩＦＲサービス時間分布(付録参照)，

c　過去の履歴のすべてが利用可能な情報（サービス中の客のサービス経過時間を含む）

と一般化し，各客の到着時刻においてその到着客をその時点で最小長の待ち行列，すなわち，期待遅延が最小の待ち行列に割り当てる政策 (Send-to-the Shortest Expected Delay Queue Policy：SSEDQ-政策)は任

おおにし　まさみつ　京都大学　工学部
〒606 京都市左京区吉田本町

意の有限な時刻Tに対しTまでにシステムから退去する客の総数$D(T)$を確率順序$\leq_{st}$に関して最大化することを示した.

Ephremides, Varaiya and Walrand[4]は

a　一般の点過程,

b　2人の同種サーバ，指数サービス時間分布,

c.1 過去の履歴のすべてが利用可能な情報

の場合を扱い，各客の到着時刻においてその到着客をその時点で短い方の待ち行列に割り当てる政策(Send-to-Shorter Queue Policy：SSQ-政策)は任意の有限な時刻Tに対し

$$E_x\left[\sum_{i=1,2}\left\{\int_0^T X_i(t)dt+\frac{1}{2\mu}X_i(T)(X_i(T)+1)\right\}\right]$$

を最小化することを示した．ただし

$X_i(t)$：時刻tでの待ち行列iの長さ,

μ：共通のサービス率

である.

さらに彼らは

c.2 待ち行列過程が観測できず過去の客の到着・割り当て過程のみが利用可能な情報である場合

をも議論し，初期の2本の待ち行列長が等しい場合に，到着客をそれらに交互に割り当てる政策が上記の評価規範のもとで最適であることを示した.

Hirota, Ohnishi and Ibaraki[5]と大西，茨木，広田[20]の証明方法にしたがえばEphremides, Varaiya and Walrand[4]の前半の結果は，次のように一般化することができる(Walrand[16]も見よ).

a　一般の点過程,

b　N人の同種サーバ，指数サービス時間分布,

c.1 過去の履歴のすべてが利用可能な情報

の場合，SSQ-政策は任意の有限な時刻Tにおいて

$$E_x[\phi(X_1(T),X_2(T),\cdots,X_N(T))]$$

を最小化する，ただし，$\phi(:\mathscr{X}_+{}^N\to\mathscr{R})$は任意の非減少Shur-Convex関数である(付録参照).

一方，Ephremides, Varaiya and Walrand[4]の後半の結果は，Nakade, Ohnishi, Ibaraki and Ohno[11]により，次のように一般化されている.

a　一般の再生過程，集団到着,

b　N人の同種サーバ，指数サービス時間分布,

c.2 待ち行列過程が観測できず過去の客の到着・割り当て過程のみが利用可能な情報

である場合，初期待ち行列長$X_i(0)(i=1,2,\cdots,N)$が互いに確率的に独立で，$(1,2,\cdots,N)$のある順列$(i_1,i_2,\cdots,i_N)$に対し

$$X_{i_1}(0)\leq_{st}X_{i_2}(0)\leq_{st}\cdots\leq_{st}X_{i_N}(0)\leq_{st}X_{i_1}(0)+1,$$

を満たすなら,

$i_1,i_2,\cdots,i_N,i_1,i_2,\cdots$

と巡回して到着客を割り当てる政策(Circular Assignment Polcy)は，任意の有限な時刻Tにおいて

$$E_x\left[\sum_{i=1}^N f(X_i(T))\right]$$

を最小化することを示した．ただし，$f(:\mathscr{X}_+\to\mathscr{R})$は任意の非減少凸関数である.

さらにNakade, Ohnishi, Ibaraki and Ohno[12]は上述のモデルにおいて

a　一般の再生過程，単一到着,

と限定すると，初期待ち行列長$X_i(0)(i=1,2,\cdots,N)$が互いに確率的に独立であるならば，$(1,2,\cdots N)$の任意の順列$(i_1,i_2,\cdots,i_N)$に対し

$i_1,i_2,\cdots,i_N,i_1,i_2,\cdots$

と巡回して到着客を割り当てる政策(Circular Assignment Polcy)は無限計画期間上の平均期待費用：

$$\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}E_x\left[\int_0^T\sum_{i=1}^N f(X_i(t))dt\right]$$

を最小化することを示した．ここで，$f(:\mathscr{X}_+\to\mathscr{R})$は任意の非減少凸関数である.

また，Johri[6]は，次のように，各サーバが自己の待ち行列長に依存したサービス率を持つ場合を議論した：

a　Poisson 過程,

b　同種サーバ，待ち行列長が$j(\in Z_+)$の時のサービス率がμ_j,

c　過去の履歴のすべてが利用可能な情報.

彼は問題をUniformization Techniqueを用いて(非有界な費用を持つ)離散時間のMarkov決定過程として定式化し，その結果，μ_jがjに関し上に有界な非減少凹関数であるならばSSQ-政策は，任意の有限な時刻Tに対し，Tにおけるシステム内客数

$$\sum_{i=1}^N X_i(T)$$

を確率順序$\leq_{st}$に関して最小化することを示した．たとえば，並列な待ち行列システムの各々が同一の$\cdot/M/c$-待ち行列であるなら，サービス率に関する上述の条件は満たされている.

一方，Whitt[18]はSSQ-政策，あるいはSSEDQ-政策が必ずしも最適ではないことを反例を挙げることにより示している.

2.2　異種サーバの場合

サーバが異種の場合に対する問題については，今のと

ころ十分な結果は得られていない．

Bell and Stidham [2] は

a　強度 λ の Poisson 過程，

b　異種サーバ，一般サービス時間分布，ただしサーバ $i(=1,2,\cdots,N)$ のサービス時間 S_i は

$$E[S_i]=\mu_i^{-1},$$

$$E[S_i^2]=b\mu_i^{-2} \quad \text{for some} \quad b(\geq 1)$$

を満たす（したがって，各サービス時間の変動係数は $(b-1)^{1/2}$ で同じ），

c　実時間の情報は利用せず，

各待ち行列への客の割り当て確率ベクトル（$p_1, p_2, \cdots, p_N$）（$p_i \geq 0, i=1,2,\cdots,N, \sum_{i=1}^{N} p_i=1$）を定める（よって $\lambda_i=p_i\lambda, i=1,2,\cdots,N$ として各待ち行列への到着率ベクトル（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$）を定める）問題を議論した．

彼らは，待ち行列 k での客1人の単位時間当りの待ち費用を h_i,（一般性を失うことなく）

$$\frac{h_1}{\mu_1} \leq \frac{h_2}{\mu_2} \leq \cdots \leq \frac{h_N}{\mu_N}$$

と仮定し，以下の結果を得た．

d.1　社会最適化（Social Optimization）：システムの無限計画期間上の平均期待費用を評価規範として用いれば最適解は

$$\lambda_i^*(\alpha^*)=\max\left\{0, \mu_i-\mu_i\left(\frac{b}{b+2\alpha^*\frac{\mu_i}{h_i}-2}\right)^{1/2}\right\},$$

ただし α^* は

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^*(\alpha^*)=\lambda$$

により決定される．

d.2　個人最適化（Individual Optimization）：各客を意思決定者と考え，各々が自己の期待待ち費用を最小化するべく行動するとして，Nash 均衡解を求めると

$$\lambda_i^+(\alpha^+)=\max\left\{0, \mu_i-\mu_i\left(\frac{b}{b+2\alpha^+\frac{\mu_i}{h_i}-2}\right)\right\},$$

ただし α^+ は

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^+(\alpha^+)=\lambda$$

により決定される．

さらに以上の結果を用いて

$$\lambda_i^*(\alpha^*)>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_i^*(\alpha^*)}{\mu_i} \geq \frac{\lambda_j^*(\alpha^*)}{\mu_j} \quad \text{for } i<j$$

$$\lambda_i^+(\alpha^+)>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_i^+(\alpha^+)}{\mu_i} \geq \frac{\lambda_j^+(\alpha^+)}{\mu_j} \quad \text{for } i<j$$

$$\lambda_i^*(\alpha^*) \geq \lambda_i^+(\alpha^+) \quad \Rightarrow \quad \lambda_j^*(\alpha^*) \geq \lambda_j^+(\alpha^+) \quad \text{for } i<j$$

などを示した．特に最後の関係式は個人最適解のもとでは，社会最適解に比較して，番号の小さいサーバに，より負荷がかかることを意味している．

3.　並列サーバへの客の最適割り当て問題

サービス時間が各々分布関数 $F_1, F_2, \cdots, F_N$ にしたがう N 人のサーバが1本の待ち行列を共有する待ち行列システムを考える．客はある点過程にしたがい到着する．到着した客はいずれかのサーバに割り当てられるまでその共通の待ち行列で待ち，いったんあるサーバに割り当てられた客のサービスは中断したり，他のサーバに移すことは許されないものとする．さらに客の到着過程とサービス過程とは確率的に独立であると仮定する．

並列サーバへの客の最適割り当て問題とは所与の費用構造のもとで規定の評価規範を最適化するような客の割り当て政策，すなわち，遊休中（サービス完了直後を含む）のサーバがいる各時刻において，その時点で利用可能な情報にもとづき，待ち行列内の客を遊休中のサーバのいずれかに割り当てるか否か，もし割り当てるとするならどのサーバに割り当てるかを（確率的に）定める規則を求めることである．

この問題も，前節の問題と同様，モデルに含まれる要素によりさまざまな分類ができる．しかしながら現在までのほとんどすべての研究で

a　新たな客の到着がないか，Poisson 過程にしたがい到着，

b　指数サービス時間分布

であることを仮定しているため，以下では特に述べない限り，これらを仮定する．

いま $\mu_i(i=1,2,\cdots,N)$ をサーバ i のサービス率とし，（一般性を失うことなく）

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_N,$$

すなわち，番号が小さいサーバほどサービス速度が“速い”と仮定する．

3.1　到着がない場合

Agrawala, Coffman, Garay and Tripathi [1] は新たな客の到着がない場合に期待フロータイム（Expected Flow Time）

$$E_\pi\left[\sum_{j=1}^{M} C_j\right]\left(=E_\pi\left[\int_0^{+\infty} X(t)dt\right]\right)$$

を最小化する問題を議論した．ただし

M：初期時刻0でのシステム内客数

$C_j(j=1,2,\cdots,M)$：客 j のサービス完了（よって退去）時刻，

$(X(t);t\geq 0)$：時刻 t でのシステム内客数を表わす確率過程 $(X(0)=M)$

である．その結果，この問題を完全に解き，次に述べるしきい値型政策 π^* が最適であることを示した：任意の時刻において遊休中のサーバで最も速い（最も番号の小さい）サーバを n，その時点における待ち行列長を $k(\in\mathscr{Z}_+)$ とすると

$$k>t_n$$

の時，そしてその時に限り，待ち行列内の客をサーバ n に割り当てる．ただし待ち行列のしきい値 $(t_n;n=1,2,\cdots,N)$ は

$$t_n:=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\mu_n}-n$$

で定義される．

上述の問題は Righter [13] により期待重みづけフロータイム(Expected Weighted Flow Time)最小化問題，すなわち，各客 $j(=1,2,\cdots,M)$ が固有の単位時間当りの待ち費用 w_j を持つとして，

$$E_\pi\left[\sum_{j=1}^{M}w_jC_j\right]$$

を最小化する，より一般化された問題に拡張され，議論された．その結果，上述の政策 π^* を以下のように修正したしきい値型政策 π^+ が最適であることを示した：任意の時刻において客をその待ち費用の大きさの順に

$$w_{j1}\geq w_{j2}\geq\cdots\geq w_{jm}$$

と番号づけし，遊休中のサーバで最も速いサーバを n とすると

$$k>t_n\geq k-1$$

の時，そしてその時に限り，客 $j_k(k=1,2,\cdots,m)$ をサーバ n に割り当てる，ただし客の番号づけは客の割り当てごとに行なうものとする．

Coffman, Flatto, Garey and Weber [3] は上述の問題の評価規範として期待メークスパン（Expected Makespan)，すなわち，

$$E_\pi\left[\max_{1\leq j\leq M}C_j\right]$$

を最小化する問題を議論した．その結果，サーバ数 N が2もしくは3の時は最適政策のもとでは（各サーバが稼働中か否かを記述する）状態に依存したしきい値が存在して，待ち行列長がそれを超える時，そしてその時に限り，待ち行列内の客を遊休中の最も速いサーバに割り当てることを示した．

3.2 到着がある場合

新たな到着がある場合については現在のところ $N=2$ の場合しか解決されていない．

Lin and Kumar [9] は

a　強度 λ の Poisson 過程，

b　$N=2$

の場合を扱った．評価規範としてはシステム内客数を単位時間当りの費用として，

d.1 無限計画期間上の総期待割引き費用規範：

$$E_\pi\left[\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}X(t)dt\right],$$

およびその $\alpha\downarrow 0$ での極限に対応する

d.2 無限計画期間上の平均期待費用規範：

$$\lim_{T\to+\infty}\sup\frac{1}{T}E_\pi\left[\int_0^T X(t)dt\right]$$

の2種を考察した．彼らは問題を Uniformization Technique を用いて(非有界な費用を持つ)離散時間の Markov 決定過程として定式化し，いずれの評価規範のもとでも，次に述べるようなしきい値型政策のクラスの中に最適政策があることを，逐次近似法と政策反復法を用いて，解析的に示した：

P1 待ち行列に客がいる限り，速いサーバ1には常に客が割り当てられ，

P2 あるしきい値が存在して，待ち行列長がそれを超える時，そしてその時に限り，遅いサーバ2にも客を割り当てる．

Walrand [15] は Lin and Kumar [9] と同じ問題を扱い，上述の性質 P1, P2 のいずれかを満たさない政策は改良され得ることを Coupling (あるいは Sample-Path-Wise Comparison) と呼ばれる確率論的方法を用いて別証明を行なった．

Walrand [15] の証明方法にしたがえば，サーバ数が一般の N の場合に対しても，任意の（到着率 λ と）割引率 α に対する最適政策のもとでは

Q1 もし客をサーバに割り当てるのであれば，利用可能なサーバのなかで最も速いものに客を割当て，

Q2 待ち行列内に客がいる限り，最も速いサーバには常に客を割り当てる

ことを示すことができる．

Rosberg and Makowski [14] はサーバ数が一般の N の場合を議論し，(Walrand [15] の方法により示し得る）性質 Q1, Q2 の別証明を与え，さらに

Q3 割引率 α が十分0に近い（ある値を下回る）と十分待ち行列長が長い（α に依存しないある長さを越え

る）時にはすべてのサーバに客を割り当てることが最適である

ことを示した．この結果，割引率αの小さい（平均期待費用規範に近い）時には有限個の状態でのアクションのみが問題となることから，

$\alpha\downarrow 0,\ \lambda\downarrow 0,$

とする極限移行ができ，

Q4 到着率λが十分小さければ，到着がない場合の期待フロータイムを最小化する政策π^*が平均期待費用規範のもとでも最適となる

ことを示した．

一方，Kumar and Walrand［8］は

a 任意の到着過程，

b 一般のN

の場合に，客の各々がサービスを受けるサーバを選択することができるが，待ち行列の前に位置する客ほど優先権が高いという設定での個人最適化の問題を考察した．その結果，待ち行列内で先頭から数えて第$k(\in Z_+)$番目に位置する時にサーバの選択権を得た場合，遊休中のサーバで最も速いサーバをnとすると

$k>t_n$

の時，そしてその時に限り，そのサーバnを選択するという政策（あるいは戦略）は個人の期待遅延を最小化するという意味で最適であることを示した．ただし待ち行列のしきい値$(t_n\,;n=1,2,\cdots,N)$は政策π^*を定義したものと等しい．したがって，政策π^*は各客個人の期待遅延を最小化するという意味で，個人最適である．

なお，並列サーバへの客の最適割り当て問題を最初に取り扱ったのは，筆者の知る限りでは，Kleinrock［7］である．彼は

a Poisson 過程，

b 一般のN

の場合に，やや雑な議論ではあるが，政策π^*は各客個人の期待遅延を最小化するという意味で個人最適であることを示している．

4. おわりに

本稿では，並列・分散型情報処理システムにおける負荷分散の最適化，および通信網におけるメッセージの経路選択の最適化に関連した基本的でかつ重要な2種の待ち行列の制御問題を解説し，現在までに得られている主要な理論的結果を紹介した．

残念ながら，これらの結果の多くはきわめて限定された問題に対してのものであり，一般的問題の解決はまだまだはるか彼方といった感がある．

この小文が読者諸氏の興味を喚起することができ，多くの残された問題の解決の一助となれば幸いである．

参 考 文 献

［1］ Agrawala, A.K., Coffman, E.G. Jr., Garey, M.R. and Tripathi, S.K.(1984), *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-33. pp.351-356.

［2］ Bell, C. E. and Stidham, S. Jr. (1983), *Management Science*, Vol.29, pp.831-839.

［3］ Coffman, E. G., Flatto, L., Garey, M. R. and Weber, R.R.(1987), *Advances in Applied Probability*, Vol.19, pp.177-201.

［4］ Ephremides, A., Varaiya, P. and Walrand, J.(1980), *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.AC-25, pp.690-693.

［5］ Hirota, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T. (1987), in *Queueing Theory and Its Applications*, Proceedings of the Seminar Held in Kyoto, Japan, May 11-13, 1987, pp.185-203.

［6］ Johri, P. K.(1989), *European Journal of Operational Research*, Vol.41, pp.157-161.

［7］ Kleinrock, L.(1964), *Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay*, McGraw-Hill, New York.

［8］ Kumar, P.R. and Walrand, J.(1985), *Journal of Applied Probability*, Vol.22, pp.989-995.

［9］ Lin, W. and Kumar, P. R.(1984), *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.AC-29, pp.696-703.

［10］ Marshall, A, W. and Olkin, I. (1979), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York.

［11］ Nakade, K., Ohnishi, M., Ibaraki, T. and Ohno. K..(1990), Technical Report No.90010, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto, Japan.

［12］ Nakade, K., Ohnishi, M., Ibaraki, T. and Ohno. K.(1990), Technical Report No.90011, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto, Japan.

[13] Righter, R. (1988), *Systems and Control Letters*, Vol. 10, pp. 211-216.

[14] Rosberg, Z. and Makowski, A. D. (1990), *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, pp. 789-796.

[15] Walrand, J. (1984), *Systems and Control Letters*, Vol. 4, pp. 131-134.

[16] Walrand, J. (1988), *An Introduction to Queueing Networks*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[17] Weber, R. R. (1978), *Journal of Applied Probability*, Vol. 15, pp. 406-413.

[18] Whitt, W. (1986), *Operations Research*, Vol. 34, pp. 55-62.

[19] Winston, W. (1977), *Journal of Applied Probability*, Vol. 14, pp. 181-199.

[20] 大西，茨木，広田(1987)，1987年度秋季研究発表会アブストラクト集，pp. 120-121.

A 付録

定義A.1 (確率順序$\leq_{st}$)実数値確率変数X, Yに対し，

$X \leq_{st} Y \ (Y \geq_{st} X)$

$\Leftrightarrow \ P(X \leq x) \geq P(Y \leq x)$ for all x

$\Leftrightarrow$ 任意の非減少関数$f(:R \to R)$に対して

$E[f(X)] \leq E[f(Y)]$. □

定義A.2 (IFR分布) 確率分布関数Fは，任意の$x(\geq 0)$に対し，$\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$が$t$に関して非増加である時，*IFR* (*Increasing Failure Rate* あるいは *Increasing Hazard Rate : IHR*) であることを言う (Fが密度関数fを持つ場合，その故障率関数$\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$が単調非減少であることと同値である). □

定義A.3 (Z_+^N 上の非減少 Shur-Convex 関数) [Marshall and Olkin [10]] 関数$\phi(Z_+^N \to R)$は以下の3性質を満たす時，非減少 *Shur-Convex* 関数であると言う：

(1) 任意の$N \times N$置換行列$\prod$に対して，

$\phi(x) = \phi(x\prod)$ for all $x \in Z_+^N$,

(2) $x, y \in Z_+^N$に対し

$x_i \leq y_i, \ i=1, 2, \cdots, N \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$,

(3) 任意の$x \in Z_+^M$に対して，

$(x_i - x_j)\{\phi(x+e^i) - \phi(x+e^j)\}$,

ただし

$e^i := (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0), \ i=1, 2, \cdots, N$. □