故障のある機械における スケジューリング問題

木島　正明

本稿では，1台の機械により仕事を処理する場合に，どのようにして，処理すべき仕事を選ぶかという問題(single-machine scheduling problem)を考える．この問題を扱っている多くの論文では，機械は時間に関して同一の処理能力で，連続的に稼働するものと仮定されている．しかし，この仮定は実際問題においては，非現実的であると言わざるをえない．なぜならば，「機械は稼働中に故障を起こし，修理または取り替えによって再び稼働状態に戻る」というサイクルを繰り返すからである．また，時間により違う処理能力を持っていると考えた方が，より現実的である場合が多い．たとえば，機械は動いてはいるが，時間とともに，摩耗・劣化によりその能力が衰える場合や，修理してもその性能が完全には回復しない場合などがある[1]．逆に，初期故障を起こす原因が徐々に取り除かれてゆき，使用とともにより高い性能が発揮されるという場合もある．このような，より現実に近い仮定の下でのスケジューリング問題を扱った論文が，最近少しずつ発表されているので，本稿では，最近の結果のサーベーを行なってみたい．これまでこの問題があまり扱われていなかった最大の原因は，その難しさであるが，なぜこの問題が難しいのかということも，例を通して考察してみたい．

1.　問題の定式化：

$R(t)$ を時点 t における，この機械の処理率とする．つまり，時間区間[a, b]の間には，$\int_a^b R(x)dx$ という要求量の処理をすることができる．区間[a, b]のすべての時点で $R(t)=0$ ならば，この機械は区間[a, b]で故障していると考える．ここでは，$R(t)$は時間とともに確率的に変動しているとする[2]．特に$R(t)$が0か1しかとらない場合を，文献[1, 2, 3, 5, 6, 11]などでは，故障(break-down)モデルと呼んでいる．

きじま　まさあき　筑波大学　経営システム科学
〒112　文京区大塚3―29―1

いま，最初の時点（時点0とする）でK個の仕事があり，S_k を仕事kの処理要求時間を表わす確率変数とする．要求時間の列 $\{S_k\}$ は互いに独立であり，$\{R(t)\}$とも独立とする．さらに，これらの確率構造は，どのようなスケジューリングをしたかには依存しないとする．ここでは簡単のために，新しい仕事は到着しないと仮定しよう．到着がある場合には，待ち行列の範疇で議論される．サーバーに故障のある待ち行列を扱った文献は，たとえば[8, 12]などであるが，根本的なアイデアは文献[7]による．また，割り込みを許さない政策[3]のみを考えることにする．

機械は同時に1つの仕事しか処理できないとし，処理しないという政策は考えないことにする[4]．さらに，$\mu_k^{-1}=E[S_k]<\infty$と仮定する．すべての仕事の処理を終了する時点を表わす確率変数をτとする．τは処理要求時間の総量を表わし，どういったスケジューリング政策をとるかには依存しないで決まる確率変数である．いま，c_kを仕事kの保留コストとし，$X_k(t;\pi)$を政策πを採ったときの時点tでの仕事kの数[5]を表わす確率変数とする．このとき，政策πによる総期待コストは

(1)　$J(\pi)=E[\int_0^\tau \sum_{k=1}^K c_k X_k(t;\pi)dt$

で与えられる．ここでの目的は，$J(\pi)$ を最小にするスケジューリング政策πを決定することである．

政策πの下で，i番目に処理される仕事を $\pi(i)$ と書く．ある仕事の処理が終わった時点で，それまでの履歴の情報を使って，次にどの仕事を処理するのかを決定できるので，あらかじめ$\pi(i)$が何であるかを知ることはできない[6]．よって，$\pi(i)$ は確率変数である．いま，

(2)　$G(s)=\inf\{t:\int_0^t R(x)dx\geqq s\}$

とおく．$G(s)$ は，処理要求時間の総和がsであるときに，すべての処理を終了するために必要な時間の長さを表わしている．よって，政策πの下での，i番目の仕事の処理の終了時間$T_i(\pi)$は

(3)　$T_i(\pi)=G(\sum_{k=1}^i S_{\pi(k)})$

で与えられる．よって目的関数は

(4) $J(\pi)=\sum_{i=1}^{K} E[c_{\pi(i)} G(\sum_{k=1}^{i} S_{\pi(k)})]$
で与えられる．

2. 直感的背景

まず，$R(t)=1$ の場合を考えてみよう．これは，「この機械は，どの時点でも1単位の処理能力を持っている」ことを意味している．このとき，(4)式は

(5) $J(\pi)=\sum_{i=1}^{K} E[c_{\pi(i)} \sum_{k=1}^{i} S_{\pi(k)}]$

となる．残っている仕事の中で，$\{c_i\mu_i\}$ のいちばん大きな仕事から処理する政策を「$c\mu$ ルール」と呼ぶが，

定理1：$R(t)=1$ のときは，$c\mu$ ルールが（動的最適化の意味で）最適である：

ことが知られている．実際，この事実は次の「交換の議論」という考え方にもとづいて証明できる（[7] とそこでの参考文献参照）．以下では，簡単のため，

$$c_1\mu_1 \geqq c_2\mu_2 \geqq \cdots \geqq c_K\mu_K$$

と仮定する．

定理1の証明の概略：

政策を決定できる時点 t において，$A(t)$ を残っている仕事の集合とする．時点 t では，すべての履歴 F_t を使って決定を下すことができる．時間軸をずらすことにより，$t=0$ と仮定してよい．π^*を $c\mu$ ルールとし，π_jを最初に j を処理し，それ以降は $c\mu$ ルールにしたがうという政策とする．さらに，π' を π_j において，最初の2つの順番を交換した政策とする．このとき，$c\mu$の大きさの仮定より，

$$\begin{aligned} J(\pi')-J(\pi_j) &= E[c_1S_1+c_j(S_1+S_j)|F_0] \\ &\quad -E[c_jS_j+c_1(S_1+S_j)|F_0] \\ &= E[c_jS_1-c_1S_j|F_0] \leqq 0 \end{aligned}$$

を得る．同様の交換の議論から，$J(\pi^*)\leqq J(\pi_j)$を示すことができるので，最適性の原理から，π^*が最適であることが示される．□

「$c\mu$ ルールの最適性」は，最初に確定的なモデルに対して示されたもので（スミスのルールという），定理1の結果は，確定的な場合に成立する簡単な最適政策が，処理時間を確率変数とした場合にもあてはまるということを言っており，これは応用上も重要である．なぜならば，仕事の処理時間が確率的に変動するものであっても，管理者はあらかじめ全仕事を「$c\mu$ルール」にしたがって並べておけば，以降この処理の過程がどのような経緯をとったとしても気にする必要はないわけで“implementation”という意味で非常に簡単だからである．

では，$R(t)$ が時間とともに変化する場合でも，$c\mu$ ルールの最適性がつねに保証されるのであろうか？　これを見るために，次のような簡単な例を考えてみよう．いま，2つの仕事があり，処理時間は確定的で，$S_1=1$，$S_2=2$ とする．また，コストを $c_1=1$，$c_2=1.5$とし，

$$R(t)=\begin{cases}0, & 2.5\leqq t\leqq 2.5+\mathrm{a} \\ 1, & \text{その他}\end{cases}$$

とする．$c_1\mu_1=1>0.75=c_2\mu_2$ であるから，このときの$c\mu$ ルールによるコストは1.5a+5.5であるが，逆に，最初に仕事2を処理する場合は，コストが a+6 となり，a>1 のときは，$c\mu$ ルールは最適ではない．$R(t)$が一定でない場合には，このような簡単なケースでも，$c\mu$ ルールの最適性が崩れてしまうわけである[7]．しかし，上で述べた理由により，$c\mu$ ルールが最適である問題の範囲がわかれば，応用上も大変ありがたいので（それ以上に数学の問題としておもしろいので），いつ$c\mu$ルールが最適になるかという問題が深く研究されているのである．

3. $R(t)$ が任意の場合

ここでは，$\{R(t)\}$ はある種の正規化条件以外は，任意の確率過程であるとし，特別の構造は仮定しないとする．たとえば新しく設置された機械では，その処理能力に関する統計的な情報は少ないので，この場合の$\{R(t)\}$は「神のみぞ知る」という状況であるから，$\{R(t)\}$に次節で述べるような構造を仮定するには少々無理がある．よって，なるべくゆるい仮定の下で，スケジューリング問題を考えることも重要である．$\{R(t)\}$ が任意の場合には，[8] において次のような結果が示されているが[8]，これからの一層の研究が待たれるところである．

定理2：処理時間 S_k がすべて指数分布にしたがっていれば，$c\mu$ ルールが最適である．

定理3：$c_k=1$ とする．$S_1\leqq_{st}\cdots\leqq_{st}S_K$であれば[9]，処理時間の短い仕事から処理するルール（$c_k=1$ であるから，これは $c\mu$ ルール）が最適である．

上の2つの定理の証明は，基本的には，交換の議論で行なわれる．

4. 故障モデル

ここでは，多くの論文で扱われている故障モデルについて考える．つまり，$R(t)$ は0か1の値しかとらず，その区間の長さはすべて独立で，状態0と1を繰り返すとする．$R(t)=0$ のときが機械の故障状態，$R(t)=1$ のときが稼働状態を表わしていると考える．U_i を i 回目の稼働時間の長さで$U_i(i\geqq 2)$は，それぞれ，同一分布に

従っているとし，D_i を i 回目の故障時間の長さで $D_i(i \geqq 1)$は，それぞれ，同一の分布にしたがっているとする．**動的最適化**[6] を考えるために，時点0で機械は稼働状態にあるとし，それまでにすでに x 時間稼働していたとする．このとき，$\{U_i,\ D_i\}$ は遅れのある交代再生過程(delayed alternating renewal process)となる．$\{N_x(t)\}$を，

$$N_x(t)=\max\{n:U_1+\cdots U_n\leqq t\}$$

により定義される確率過程とし，$H_x(t)=E[N_x(t)]$ を対応する再生関数とする．以下でみるように，この問題では，再生関数の性質が重要な鍵となる．$G(s)$ を思いだしてみると，$G(s)-s$ は，処理要求時間の総和 s を処理する間の，機械の故障時間の総和であるから，

$$J(\pi)=\sum_{i=1}^{K}E[c_{\pi(i)}\sum_{k=1}^{i}S_{\pi(k)}] + \sum_{i=1}^{K}E[c_{\pi(i)}\sum_{k=1}^{N_x(\sum_{k=1}^{i}S_{\pi(k)})}D_k] \tag{6}$$

となる．上式右辺の第1項は(4)式と同じであるから，上式における第2項目が故障による影響であるよって，第2項が無視できるくらいに小さければ，この故障モデルにおいても $c\mu$ ルールが最適である．ではどのような状況下で，$c\mu$ ルールが近似的に最適となるのであろうか？または，$c\mu$ ルールと最適政策との差はどれくらいあるのであろうか？ 文献[2,3,6,8]などでは，こういった問題も考えられている[10]．

ここでは，経験的に，いつ$c\mu$ルールが最適になるかという問題を考えてみよう．(6)式における$\pi(i)$は確率変数であったから，このままでは第2項の計算が進まないので，

$$\sum_{i=1}^{K}E[c_{\pi(i)}\sum_{k=1}^{N_x(\sum_{k=1}^{i}S_{\pi(k)})}D_k] =\eta\sum_{i=1}^{K}E[c_{k(i)}H_x(\sum_{k=1}^{i}S_{\pi(k)})] \tag{7}$$

と近似する．(7)は $\pi(k)$ が確率変数でない場合[11] には成立する．ここで，η は平均故障時間を表わす．この近似の下では，次の経験則が成立するであろう．まず，

①故障時間が稼働時間に比べて十分小さければ，$c\mu$ ルールがよい：

また，十分大きな t に対して，再生関数は

$$H_x(t)-H_x(t-h)\sim h/E[U_2]$$

を満たすので，

②総処理要求時間が，1回の稼働時間に比べて十分に大きければ，$c\mu$ ルールがよい：

さらに，定理2から，

③処理要求時間が指数分布に近ければ，$c\mu$ ルールがよい：

ということが考えられる．

最後に，静的最適化問題[11]における，興味のある結果について触れておこう．この場合には(7)が成立するので，故障による影響は，(7)式の右辺で与えられる．

定理4：$c_k=1$ とし，$S_1\leqq_{cv}\cdots\leqq_{cv}S_K$ とする[12]．もし，稼働時間 U_i がＤＦＲ[13] であれば，番号の小さいものから処理するのが最適である．

確率順序の関係 $S_1\leqq_{cv}\cdots\leqq_{cv}S_K$ は，

$$E[S_1]=\cdots=E[S_K]$$

であっても成立する．しかし，このときの $c\mu$ 指標は，どの仕事においても同じであるから，$c\mu$ ルールではこの問題は扱えない．実は，この仮定の下では，分散に関して，

$$V[S_1]\geqq\cdots\geqq V[S_k]$$

という順序がつくので，定理4から，稼働時間がＤＦＲであれば，処理時間の分散の大きな仕事から始めた方がよいことがわかる．故障のないモデルにおけるスケジューリングでは $c\mu$ 指標，すなわち処理時間の平均しか効いてこなかったが，故障モデルにおいては分散の影響が出てくるということに注意しよう．

ところで，定理4は，「U_i がＤＦＲであれば，それに対応する再生関数は凹関数である」([4, 10] 参照) という有名な結果による．ではＤＦＲと逆の性質であるＩＦＲを仮定すれば，定理4と逆の「分散の小さいものから処理した方がよい」という結果が得られるのであろうか？ 残念ながら，対応する再生関数が凸関数になるという条件は，一般には知られていないので，この結果を導き出すためには，再生関数に関する研究から始めなければならない．この問題は，数学的にも価値のある問題であるから，読者のみなさん，ぜひご一考を！

注釈

注1) 最近，信頼性の立場から，不完全修理のモデル化がさかんに行なわれている．たとえば，[9] 参照．

注2) つまり，$\{R(t)\}$ が確率過程であるということ．

注3) いちど処理を開始したら，その処理がすべて終わるまで次の仕事を処理できないということ．

注4) 到着がないので，処理しないで待つという政策は最適でないことがすぐにわかるが，到着がある場合には，優先度の高い仕事がくるのを待った方がよいこともある([7] 参照)．この問題はすごく難しいようで，この問題を扱った論文は少ないようである．

注5) $X_k\ (t;\pi)$ は，k が未処理ならば1，終わっていれば0をとる．

注 6) このように，時間とともに動的に最適化を行なうことを動的最適化と呼ぶ.

注 7) $R(t)$ が確定的に変化する場合のスケジューリング問題は，文献[1]で扱われている.

注 8) ここでは紙面の制約のため，厳密な形では書かないが，若干の正規化条件が必要である.

注 9) $X \leqq_{\mathrm{st}} Y$とは，$P(X>t) \leqq P(Y>t)$のことである. 順序関係$\leqq_{\mathrm{st}}$は確率順序と呼ばれている. このとき，$E[X] \leqq F[Y]$ が成り立つ.

注10) 1991年1月に，カリフォルニア州モンテレーで行なわれた，応用確率論に関する特別会議でも，この問題に関するセッションがあった.

注11) 最初の時点でスケジューリング政策を確定してしまうという最適化を，静的な最適化問題という. このときは，もちろん $\pi(k)$ は確定的である.

注12) すべての単調増加で凹な関数 $f(x)$ に対して，$E[f(x)] \leqq E[f(Y)]$となるときに，$X \leqq_{\mathrm{cv}} Y$という. 順序関係$\leqq_{\mathrm{cv}}$は確率凹順序と呼ばれている.

注13) Xの分布関数を$F(t)$とし，密度関数を$f(t)$とする. Xの故障率は

$$r(t)=f(t)/(1-F(t))$$

で定義されるが，$r(t)$が単調減少であるとき，XはDFRであるという. 故障率$r(t)$は，tまで稼働してきたという条件の下で，次の瞬間に故障する率を表わしているので，DFRのときは，時間とともに故障しにくくなるわけである.

参考文献

[1] Baker, K.R. and Nuttle, H.(1980), "Sequencing Independent Jobs with a Single Resource, "*Naval Res. Log. Quart.*, Vol.27, 499-510.

[2] Birge, J., Frenk, J.B.G., Mittenthal, J. and Rinnooy Kan, A.H.G.(1990), "Single-machine Scheduling Subject to Stochastic Breakdowns" *Naval Res. Log.* Vol.37, 661-677.

[3] Birge, J. and Glazebrook, K. D. (1988). "Assessing the Effects of Machine Breakdowns in Stochastic Scheduling," *Oper. Res. Letters*, Vol.7, 267-271.

[4] Brown, M.(1980), "Bounds, Inequalities, and Monotonicity Properties for Some Specialized Renewal Processes," *Ann. Prob.*, Vol.8, 227-240.

[5] Glazebrook, K. D.(1984), "Scheduling Stochastic Jobs on a Single Machine Subject to Breakdowns," *Naval Res. Log. Quart.*, Vol. 31, 251-264.

[6] Glazebrook, K. D. (1987), "Evaluating the Effects of Machine Breakdowns in Stochastic Scheduling Problems," *Naval Res. Log.*, Vol. 34, 319-335.

[7] Hirayama, T., Kijima, M. and Nishimura, S. (1989), "Further Results for Dynamic Scheduling of Multiclass G/G/1 Queues," *J. Appl. Prob.*, Vol.26, 595-603.

[8] Hirayama, T. and Kijima, M.(1991), "Single Machine Scheduling Problom when the Machine Capacity Varies Stochastically," to appear in *Oper. Res.*

[9] Kijima, M. (1989), "Some Results for Repairable Systems with General Repair," *J. Appl. Prob.*, Vol.26, 89-102.

[10] Kijima, M.(1990), "On the Unimodality of Transition Probabilities in Markov Chains," *Austral. J. Statist.*, Vol.32, 1-10.

[11] Pinedo, M. and Rammouz, E. (1988), "A Note on Stochastic Scheduling on a Single Machine Subject to Breakdown and Repair," *Prob. Engin. and Inform. Sci.*, Vol.2, 41-49.

[12] Righter, R. and Shanthikumar, J.G.(1989), "Scheduling Multiclass Single Server Queueing Systems to Stochastically Maximize the Number of Successful Departures," *Prob. Engin. and Inform. Sci.*, Vol.3, 323-333.