通信システムに現われる待ち行列モデル

——バースト入力について——

高橋　敬隆

1.　まえがき

待ち行列理論は，A. K. Erlang（アーラン）の電話トラヒックの研究から開始され，その後，交換，情報，通信，交通，生産などのサービスシステムに応用され発展をとげてきた．本稿では，通信の分野に的を絞り，最近話題になっている待ち行列の中から，バースト入力モデルを紹介し，そのアプローチについて言及する．

バースト入力のバーストとは英語の burst（=come forth suddenly）で，何か突然に生じるイメージを表わす．しかし，突然に生じるトラヒックという時，いったい何を基準にして突然なのだろうか？　バーストを明確に定義した文献は見当らないようである．ここでは，ポアソン入力に対し突然か否かを判定しよう．すなわち，バースト入力とは，変動係数（=到着間隔の標準偏差／到着間隔の平均）が1より大きく，到着間隔列が独立でない（相関がある）時をいうことにする．

以下，バースト性の最も高いと思われる集団入力モデルを皮切りに，具体的に見てゆく．

2.　集団入力モデル

集団入力とは文字どおり，客が集団（group, bulk, batch）で系に加わる入力をいう［3］．通信系には，実際，集団入力モデルがしばしば用いられる．たとえば，ファクシミリ通信方式では，同報呼（複数宛先を持つ通信要求）の受付時に，主メモリのメモリ・ユニット（サーバ）を同報呼の宛先数だけ一斉に捕捉する．1人の客が1つのサーバによって扱われると見做すと，一斉捕捉現象は集団入力モデルで記述される．受付処理が即時式（loss system）の場合，同報呼の到着流をポアソン過程で記述すると，この主メモリ系は $M^X/G/c/c$(注1)で表現される．ここで，M^X とは，集団の到着過程がポアソン(M)，集団サイズ分布がXであることを示す．

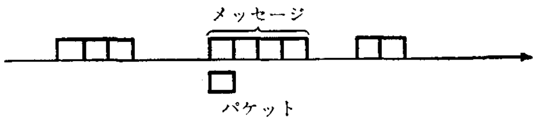


図 1　パケット到着流

状態方程式の数値解法という立場からは,「個別入力の結果を集団入力のある場合に拡張する」ことはあまり困難ではない．たとえば，集団ポアソン入力即時式（$M^X/M/c/c$）モデルとポアソン入力即時式（$M/M/c/c$）モデルとにおける数値計算上の手間は本質的に同じである．したがって，客の集団到着現象が見られる時には，（個別入力モデルより）集団入力モデルを用いる方がよい．そうでないと，算出結果が，危険側に出てしまうことがある［39］．

集団入力モデルがファクシミリ通信方式に用いられていることを述べたが，パケット通信にも用いられる時がある．パケット通信方式では，1つのメッセージが複数からなるパケットで構成されており（図1），網内ノードにおける受信バッファ（待ち行列）には「パケット(客)がくる時には，一定間隔で到着があり，メッセージがきていない時には，客の到着はない」入力が加わることになる．また，同一の網内に複数種類のトラヒック（音声パケット，データメッセージ，バルクデータ（ファイル），ファクシミリ，送達確認などの信号情報，等）が流れる．このため，各呼源からのバッファへのパケット到着流はバースト入力となる．近年，AT&Tベル研究所の Whitt ら［6］は，この種のパケット待ち時間評価には，再生入力モデル（QNA法）よりもむしろ複数クラスの集団ポアソン入力 $\vec{M}^X/\vec{G}/1$ モデルが適していることを，重負荷極限定理の立場から明らかにした．

たかはし　よしたか　NTT　交換システム研究所
〒180 武蔵野市緑町3－9－11

（注1）　$A/B/c/d$ で，到着過程がA，サービス過程がB，サーバ数がc，系内許容客数がdなる待ち行列システムを表わす．

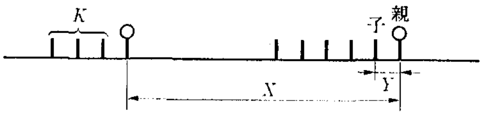


図 2 分岐ポアソン過程（BPP）

集団入力待ち行列モデルの解析は，数値計算上あまり困難ではないと述べたが，定性的性質や陽解導出については，わかっていない問題が多い．たとえば$M/M/c$モデルにおける待ち率，平均待ち時間が陽に与えられていることは周知のとおり（アーラン―C式）だが，集団入力$M^X/M/c$モデルにおける性能評価尺度は陽に与えられていない［3］．また，即時式$M/G/c/c$モデルにおける系内客数分布が$M/M/c/c$におけるそれと一致する（不変性，ロバストネスがある）ことは周知のとおりだが，集団入力$M^X/G/c/c$と$M^X/M/c/c$における系内客数分布に対する関係式は明らかにされていない．

3. 連続時間モデル

A．分岐ポアソン入力モデル

分岐ポアソン過程（Branching Poisson Process, BPP）とは，図2のように，親が子を生み出し，親の到着間隔(X)が指数分布，子の到着間隔(Y)が一般分布，生み出す子の数(K)が一般分布にしたがう時の，親と子の到着過程（計数過程）をいう．

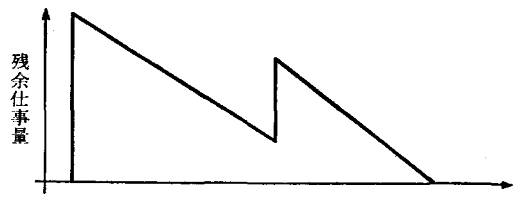
BPPは，もともと計算機システムの部品故障状況――一度故障すると続けて故障が発生する様子――をモデル化するさいに用いられた［20］．その後，呼源数が無限大の時のパケット到着流（図1）の近似モデルとして用いられてきた．$BPP/G/1$の厳密解は，特殊な場合を除いて知られていない．Closs［4］は拡散近似［9］を，村尾［29］は再生入力近似を，Miyazawa［27］はBenesの公式による近似法を提案しているが，それらの適用域や使いやすさにおいて解決すべき問題が多く残されている．

B．漸増入力モデル

漸増入力（gradual input）とは，通常の待ち行列のように離散的に客がくるのではなく，徐々に仕事量が系に到着し徐々に系外に退去するモデル（図3）をいう．このモデルは図1に示したパケット到着流において，メッセージ長に対して個々のパケットが充分に小さい時に有効である．漸増入力モデルに対しては，流体近似［32］が適用され，解析が行なわれている．

図1のように，各呼源がオン・オフを繰り返し，N呼

(a) 漸増入力（gradual input）モデル



(b) 通常入力（instantaneous input）モデル

図 3 漸増入力モデルと通常入力モデル

源のうちi呼源がオンとする．オン・オフ期間長がそれぞれ指数分布にしたがう時，

$P_i(t,x)\triangleq$Prob｛時刻tにおいてi呼源がオン，バッファ使用量$\leq x$｝

は，次式を満たす．

$$\frac{\partial P_i}{\partial t}+(i-c)\frac{\partial P_i}{\partial x}=(N-i+1)\lambda P_{i-1}+\{(N-i)\lambda+i\}P_i+(i+1)P_{i+1}\quad(1\leq i\leq N). \qquad (3.1)$$

ここで，平均オン期間長は1，平均オフ期間長は$1/\lambda$，cは出線容量である．

式(3.1)――流体方程式――の定常解はHashidaら［12］によって得られた．呼源数が無限大の時は，Cohen［5］，Anickら［1］により解析が行なわれている．また，Panら［33］は微分方程式によることなく，$M/M/1$における可逆性（reversibility）を用いてバッファ使用量のラプラス・スティルチェス変換（LST）を導出している．オン・オフ期間長が一般分布にしたがう時等の一般化が今後の課題である．

C．交代ポアソン入力モデル

2状態{1, 2}を持つマルコフ過程{$J(t)$}を考える．$J(\cdot)=1$の間は到着率λ_1，$J(\cdot)=2$の間は到着率λ_2の

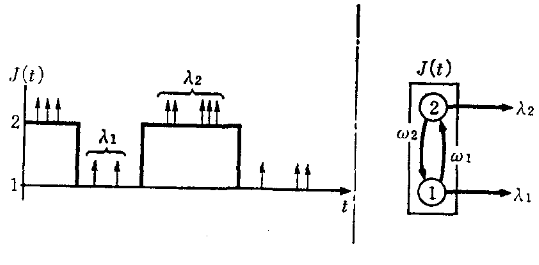


図 4 交代ポアソン過程（SPP）

ポアソン過程で客が生起する時（図４），その計数過程 $\{M(t)\}$ を交代ポアソン過程(Switched Poisson, Process, SPP）という．

音声パケット通信における各呼源からのパケット到着流は，図１のように「有音期間（talk spurt）中は，一定間隔でパケットが生じ，無音区間（silent period）にはパケットが生じない」特性がある．Heffes ら [14] は各呼源からのパケット到着流を多重化した時の重畳過程をＳＰＰで表現し，統計多重化装置を $SPP/G/1$ でモデル化している．彼ら [14] のアプローチは Ramaswami [35] による行列幾何解法 [30] の特殊な場合にすぎないが，実測の音声パケットデータから，ＳＰＰにおける４つのパラメータ($\lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2; w_i^{-1}$ は $J(\cdot)=i$ なる滞在時間の平均）を推定する方法まで言及しているところが実用的である．ＳＰＰにおけるパラメータ推定問題は，この他 Meier [25]，Rossiter [37] らが取り扱っている．

$SPP/G/1$ 待ち行列モデルに対して van Hoorn ら [42] のレベル横断法，Rossiter [38] の隠れマルコフ法による解析があるが，定常状態確率を求める計算手順はほぼ同様である．分岐ポアソン（ＢＰＰ）入力モデルに比べると計算が容易なためか，最近，相関性のある到着流をＳＰＰによりモデル化することがはやっている．

特に，ＳＰＰのうち，$\lambda_1=0$（または $\lambda_2=0$）の時，断続ポアソン過程（Interruptel Poisson Process, IPP）と呼ばれ，電話網における溢れ呼（即時式 $M/M/c/c$ モデルからのオーバーフロー）の到着流の記述に広く用いられている [11, 19]．ＩＰＰは Kingman の定理[17]より再生過程であり，その到着間隔分布は，超指数分布に等しい [8]．なお，状態 $i(i=1,2)$ の滞在時間は（マルコフ性により）指数分布にしたがうが，この滞在時間分布を一般化したものは一般化断続ポアソン過程（Generalized Interrupted Poisson Process, GIPP）と呼ばれている [23, 40]．

D．マルコフ変調ポアソン入力モデル

ＳＰＰのマルコフ過程 $\{J(t)\}$ の状態数を，２から一般の自然数 N にした時，計数過程 $\{M(t)\}$ をマルコフ変調ポアソン過程(Markov Modulated Poisson Process, MMPP）という．

実測データから，MMPP におけるすべてのパラメータを推定することはほとんど不可能に近い [25]．しかし，異種端末を統合し，個々の品質を規定する場合等，個々の入力構造が見えた時，その重畳過程に対して，

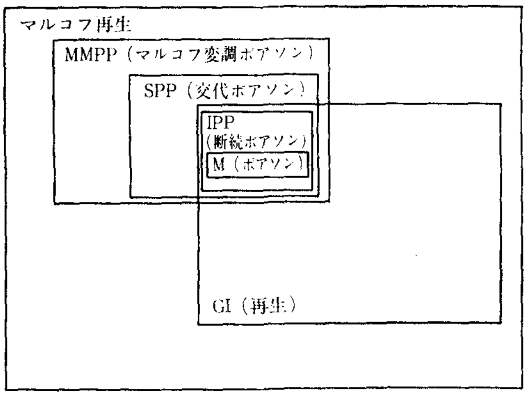


図 5 連続時間入力モデルの関係

MMPP でモデル化することはあり得る．実際，ＳＰＰを N 個重畳して得られる過程は $2N$ 状態のマルコフ過程に変調される MMPP となる．

$MMPP/G/1$ 待ち行列に対し，Ramaswami [35]が，行列幾何法により解析している．この他にも，重負荷／軽負荷定理 [2]，Wiener-Hopf 分解 [36]，摂動法 [18] などさまざまなアプローチが報告されている．

本章Ｃ，Ｄ節で紹介したＩＰＰ，ＳＰＰ，MMPP はいずれもマルコフ再生過程の部分集合である．これらの関係を図５に示す．

MMPP と再生過程（ＧＩ）の共通部分──「MMPP が再生過程になるための必要十分条件」──を求める問題がある [31]．また，最近になり，サービス中断 (interruption)，遊休時間（vacation time)，優先権 (priority) のある待ち行列モデルも検討され始めている [22, 34]．

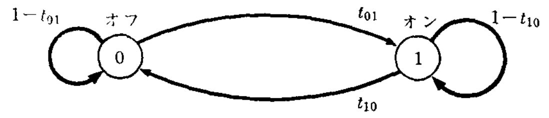
4. 離散時間モデル

この章では，時間軸がスロット化され，スロット時点でのみ客の到着・退去が起こる離散時間モデルについて紹介する．

離散時間待ち行列における入力がバーストとは，任意の２つのスロットに到着した客（集団サイズ）が互いに独立でない（相関を持つ）時をいうことにする．

Ushijima [41] は，スロットにおける到着客数がマルコフ連鎖をなす単一サーバモデルを解析した．Jarakiraman ら [16]，Morris [28] が扱ったパケット到着過程のモデル化は Ushijima の特殊な場合である．

サーバ数が m，待ち行列容量が c，スロット時点 n での到着客数を X_n とする．$\{X_n\}$ は X 上のマルコフ連鎖をなすとし，$\sigma: X \to \{0,1,2,\cdots\}$ を任意関数とする．時点 n



• オン期間中にパケットが発生

• オフ期間中はパケットは発生しない

図 6 離散時間版ＩＰＰ（断続ベルヌーイ過程）

における系内客数 Z_n に対し，Morris [28] は次の仮定をおいた．

$$Z_{n+1}=\min[(Z_n-m)^+ +\sigma(X_n), c] \qquad (4.1)$$

ここで，$(a)^+ \triangleq \max(a, 0)$

たとえば，各呼源からのパケットが図 6 に示すように離散時間版ＩＰＰでモデル化する（ポアソン到着の離散版はベルヌーイ到着に相当）と，N 呼源を多重化した時のパケット到着流は，式(4.1)を満たす．

$\{(Z_n, X_n)\}$ はこの時，マルコフ連鎖をなす．推移確率行列を適当に分解し［28］，定常状態確率 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\{Z_n=i, X_n=a\} \triangleq \pi_{ia}$ を効率的に求めることが工夫されている．

最近，ＡＴＭ交換法におけるトラヒック特性の解析にこの定式化が応用されている［15］．

Gopinath [10] らは，移動平均で表現されたバースト入力モデルを取り扱っている．すなわち，スロット時点 n における到着客数 X_n と待ち行列長 Z_n に関係式

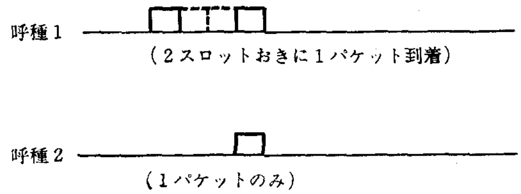
$$\left.\begin{array}{l} Z_{n+1}=(Z_n-1)^+ + X_n \\ X_n=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j{}^i \; x_{n-j}{}^i \\ \{(x_n{}^1, \cdots, x_n{}^l)\}_{n\geq 1} \text{が独立で同一分布} \\ \text{にしたがう}(i.i.d.) \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

を仮定して，$\{Z_n\}$ の定常分布を解析している．式(4.2)の具体例を考えよう．図 7 のように，2 呼種があり，呼種 1 は（発生すると）2 パケットからなり，その間隔が 2 スロット空いて到着し，呼種 2 は(発生すると) 1 パケットのみからなり，到着すると仮定する．この時，X_n（時点 n での到着客数）は，

$$X_n=x_n{}^1+x_{n-2}{}^1+x_n{}^2 \quad (\{(x_n{}^1, x_n{}^2)\}_{n\geq 1} \text{ は } i.i.d.)$$

と表現される．1 パケット転送時間をサービス時間と見做すと，この入力を持つ単一サーバモデル（における (Z_n, X_n)）は，式(4.2)を満たす．

さて，移動平均で表現されたバースト入力モデルの定常状態確率を解析するには，$(kl+1)$ 次元のマルコフ連鎖により定式化がなされるが，このままでは（大規模すぎて）実用的でないため，特殊な離散変数変換を導入した数値計算上の工夫が試みられている［7, 24］．



$X_n=x_n^1+x_{n-2}^1+x_n^2$（$\{(x_n^1, x_n^2)\}$：$i.i.d.$ 列）

図 7 移動平均で表現されるバースト入力例

この他，集団サイズが時刻依存する集団ベルヌーイ入力単一サーバモデルの解析が行なわれている［26］．また，Hashida [13] は，離散時間版ＳＰＰともいうべき，交代集団ベルヌーイ過程 Switched Batch Bernoulli Process, SBBP) をバースト入力モデルの 1 つとして提案し，*SBBP/G/1* 待ち行列モデルを取り扱っている．今後，時間軸がスロット化された離散時間システムが普及すればこのアプローチが注目されよう．

5. おわりに

分岐ポアソン過程（ＢＰＰ）入力，漸増 (gradual) 入力，交代ポアソン過程（ＳＰＰ）入力等，通信システムにおいて比較的頻繁に現われるバースト入力モデルについて簡単に紹介し，バースト入力待ち行列モデルに対する解析状況について言及した．

多くの相関入力，バースト入力モデルは図 1 に示したパケット到着流の重畳過程を記述するために提案されている．今後も複雑化・高度化するシステムの出現に応じて，多数のトラヒック問題が抽出されるであろう．ＯＲ学会における理論家（大学）と実践家（企業）の間の情報交換をさらに密なるものにすれば，新たなモデル化や各種アプローチが盛んに試みられ，今まで以上に待ち行列理論の進展に貢献するものと思われる．

参考文献

［1］ Anick, D., Mitra, D. and Sondhi, M. M.: Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources, *Bell Syst. Tech. J.*, 61 (1982) 1871-1894.

［2］ Burman, D. Y. and Smith, D. R.: An asymptotic analysis of a queueing system with Markov-modulated arrivals, *Operat. Res.*, 34 (1986) 105-119.

［3］ Chaudhry, M. L. and Templeton, J. G. C.: A First Course in Bulk Queues, John Wiley

& Sons, Inc., New York, 1983.

[4] Closs, F.: Packet arrival and buffer statistics in a packet switching node, *Proc. 3rd Data Commun. Symp.* (1973) 12-17.

[5] Cohen, J. W.: Superimposed renewal processes and storage with gradual input, Stoch. *Processes and their Applications*, 2 (1974) 31-58.

[6] Fendick, K. W., Saksena, V. R, and Whitt, W.: Dependence in packet queues, *IEEE Trans. Commun.*, 37 (1989) 1173-1183.

[7] Fraser, A. G., Gopinath, B., and Morrison, J. A.: Buffering of slow terminals, *Bell Syst. Tech. J.*, 57 (1978) 2865-2885.

[8] 藤木，雁部：通信トラヒック理論，丸善 (1980).

[9] Gelenbe, E. and Mitrani, I. (秋丸，橋田監訳)：計算機システムの解析と設計，オーム社 (1988).

[10] Gopinath, B. and Morrison, J. A.: Discrete-time single server queues with correlated inputs, *Bell Syst. Tech. J.*, 56 (1977) 1743-1768.

[11] Guerin, R. and Lien, L. Y.-C.: Overflow analysis for finite waiting room systems, *IEEE Trans, Commun.*, 38 (1990) 1569-1577.

[12] Hashida, O. and Fujiki, M.: Queueing models for buffer memory in store-and-forward systems, *Proc. 7th ITC* (1973), 323.

[13] Hashida, O., Takahashi, Y., and Shimogawa, S.: Switched batch Bernoulli process (SBBP) and the discrete-time SBBP/G/1 queue with application to statistical multiplexer performance, to appear in *IEEE J.* SAC-9 (1991).

[14] Heffes, H. and Lucantoni, D. M.: A Markov modulated characterization of packetized data traffic and related statistical multiplexer performance, *IEEE J.*, SAC-4 (1986) 856-868.

[15] 平野，渡部：ATM交換におけるバーストトラヒック多重化特性の解析，信学論，J72-B-1 (1989) 264-271.

[16] Janakiraman, N., Pagrek, B., and Neilson, J. E.: Multiplexing low-speed buffered data terminals. *IEEE Trans. Commun.*, 28 (1980) 1838-1843.

[17] Kingman, J. F. C.: On doubly stochastic Poisson processes, *Proc. Camb. Philo. Soc.* 60 (1964) 923-930.

[18] Knessl, C., Matkowsky, B. J., Shuss, Z. and Tier, C.: Markov modulated M/G/1 queue I: Stational distribution, *Queueing Systems*, 1 (1987) 355-374.

[19] Kuczura, A.: The interrupted Poisson process as an overflow process, *Bell Syst. Tech. J.*, 52 (1973) 437-448.

[20] Lewis, P. A. W.: A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns, *J. Royal Statist.* Soc., B26 (1964) 398-456.

[21] Lucantoni, D. M., Meier-Hellstern, K. S., and Neuts, M. F.: A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes, *Adv. Appl. Prob.*, 22(1990) 676-705.

[22] Machihara, F.: Completion time of service unit interrupted by PH-Markov renewal customers and its applications, *Proc. ITC*12, 5.4B.5 (1988).

[23] 町原文明：一般化断続ポアソン過程について，信学論，J72-B-1 (1989) 155-163.

[24] Massey, W. A. and Morrison, J. A: Calculation of steady-state probabilities for content of buffer with correlated inputs, *Bell Syst. Tech. J.*, 57 (1978) 3097-3117.

[25] Meier-Hellstern, K. S.: A fitting algorithm for Markov modulated Poisson processes having two arrival rates, *European J. Operl Res.*, 29 (1987) 370-377.

[26] Minh, D. L.: The discrete-time single-server queue with time-inhomogeneous compound Poisson input and general service time distribution, *J. Appl. Prob.*, 15 (1978) 590-601.

[27] Miyazawa, M.: Approximations for a single server queue with a branching Poisson arrival process, *Proc. ITC*11, 3.1A.1 (1985).

[28] Morris, R. J. T.: An algorithmic technique for a class of queueing models with packet switching applications, *Proc. ICC* '81, 41.2

(1981).

[29] 村尾　洋：分岐ポアソン入力待ち行列の近似解法について，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集 (1975), 55.

[30] Neuts, M. F.: Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1981.

[31] Neuts, M. F., Sumita, U., and Takahashi, Y.: Renewal characterization of Markov modulated Poisson processes, *J. Math. Simulation*, 2 (1989) 53–70.

[32] Newell, G. F.（森村，森訳）：待ち行列論の応用，サイエンス社 (1973).

[33] Pan, H., Okazaki, H. and Kino, I.: Analysis of a gradual input model for bursty traffic in ATM, to appear in *Proc. ITC* 13 (1991).

[34] Prabhu, N. U. and Zhu, Y.: Markov-modulated queueing systems, *Queueing Systems*, 5 (1989) 215–246.

[35] Ramaswami, V.: The N/G/1 queue and its detailed analysis, *Adv. Appl. Prob.*, 12 (1980) 222–261.

[36] Regterschot, G. J. K. and de Smit, J. H. A.: The M/G/1 queue with Markov modulated arrivals and services, *Math. Operat. Res.*, 11 (1986) 465–483

[37] Rossiter, M. H.: A switched Poisson model for data traffic, *Australian Telecommun. Res.*, 21 (1987) 53–57.

[38] Rossiter, M. H.: A switched Poisson process and the SPP/G/1 queue, *Australian Telecommun. Res.*, 22 (1988) 63–67.

[39] 高橋，町原：待ち行列のはなし，オペレーションズ・リサーチ，7月号 (1989) 372–374.

[40] Tran-Gia, P.: A class of renewal interrupted Poisson processes and applications to queueing systems, *ZOR*, 32 (1988) 231–250.

[41] Ushijima, T.: A queueing system with Markov arrivals, *JORSJ*, 15 (1972) 167–193.

[42] van Hoorn, M. H. and Seelen, L. P.: The SPP/G/1 queue: A single server queue with a switched Poisson process as input process, *OR Spektrum*, 5 (1983) 207–218.