待ち行列の点過程モデルと率保存則

宮沢　政清

1. まえがき

待ち行列モデルを解析する大きな目的の1つは，モデルの特性を調べてシステムの設計などに役立てることにある．このために数学モデルを作り解析する．待ち行列の特徴は，現象がランダムな要素を含むことと，時間的に変化することである．したがって，数学モデルとして確率モデルの1つである確率過程モデルが用いられる．このとき，どのような確率過程モデルを選べはよいであろうか？ 普通は，現象をマルコフ過程（またはマルコフ連鎖）としてモデル化を行なうマルコフモデルを用いることが多い．これは，マルコフモデルが，数学的に解析可能なほとんど唯一のモデルであることによる．

マルコフモデルは，強力な方法ではあるが，モデル化のさいに，待ち行列固有の特徴が失われてしまう面もある．たとえば，待ち人数過程 $\{l(t)\}$ を考えてみよう．ここに，$l(t)$は，時刻tでの待ち人数である．この場合の標本関数（$l(t)$をtの関数と見る）は，階段型関数であり，単純な形をしている．しかし，$\{l(t)\}$に適当な補助変数，たとえば，次の客が到着するまでの時間など，をつけてマルコフ過程を作ったときには，標本関数の単純な構造が必ずしもマルコフ過程の単純化には結びつかない．たとえば，平衡状態において，客の到着直前の系待ち人数の分布は，客の退去直後の系待ち人数の分布に一致することは，標本関数から簡単に得られる結論であるが，これを，マルコフ化された待ち人数過程の分布を計算して証明することは容易でない．

そこで，待ち行列を，標本関数の単純な構造に注目してモデル化することが考えられる．これから述べる点過程モデルは，そのようなモデルの1つである．ここに，点過程とは，客の到着時点や退去時点などの特定の事象が起こった時刻の列を表わす確率過程である．本論では，点過程モデルの考え方を紹介し，それを平衡状態における待ち行列モデルの解析にどのように役立てるかを解説する．

みやざわ　まさきよ　東京理科大学　理工学部
〒278 野田市山崎2641

2. 点過程モデル

点過程モデルでは，できる限り一般的条件の下で，モデルを作る．これは，独立性や指数分布を仮定して，なるべく単純なモデル化を行なおうとするマルコフモデルと逆の行き方である．当然のことながら，このようなモデル化では，十分な解析はできないので，後から解析に必要な仮定を加えていく．結局，平衡分布などが得られるモデルの範囲は，マルコフモデルと変わらない．しかし，モデルの仮定がなぜ必要なのか，仮定をゆるめるとどんな結果が得られるかなどを論じることができる．このことから，点過程モデルは，モデルの比較，特性量についての近似式や不等式を得るのに役立てることができる．

点過程モデルでは，最初から系の状態が定常であると仮定する．すなわち，点過程モデルでの連続時間型確率過程は，定常過程である．普通，定常状態とは，時間が十分に経過した後に実現する状態であるから，この仮定は強い．しかし，マルコフモデルでさえ，待ち行列系の一時的状態変化の解析が非常に困難であることを考えれば，これは妥当な仮定である．この場合，目的に合う定常過程が存在するかどうかが，問題となる．これについては，主要な待ち行列モデルに対して，一般的な条件が得られている（[4] などを参照）．点過程モデルでは，確率空間$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上で次の3つの確率過程を考える．

$\{t_n\}$…時刻を表わす確率変数列で，$t_n<t_{n+1}$，$t_0\leqq 0<t_1$ とする，

$\{X(t)\}$…任意時点で定義された連続時間型の確率過程，

$\{Z_n\}$…離散時間型確率過程，ここに，Z_n は，t_n で定義された量である．

ここに，$X(t)$, Z_n は，ベクトルであってもよいが，以下では，実数値を取るとする．$\{t_n\}$ を $R=(-\infty,+\infty)$ 上のランダムな整数値測度Nとして表わしたものを点過

程と呼ぶ．すなわち，時間区間Bに対して，Bに入るt_nの個数を$N(B)$とする．

$$N(B)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_B(t_n)$$

である．ここに，I_Bは，集合Bの指示関数とする．定義より，Nは単純である．すなわち，1点で2以上の重みを持つことはない．点過程モデルでは，Nは，有限の強度$\lambda\equiv E(N((0,1]))$を持つと仮定する．ここに，$E$は，$P$に関する期待値である．待ち行列モデルにおいては，$N=\{t_n\}$は，客の到着や退去の時刻を表わす．$N$は単純であるから，同時に2人の客が到着したり退去することはない．また，$\{X(t)\}$は，待ち人数などのような任意時刻で定義された量で時間特性量と呼ばれる．一方，$\{Z_n\}$は，待ち時間などのように客毎に定義された量で客特性量と呼ばれる．

これら3つの確率過程は，同一の時間軸上で定義されているとする．この仮定は，当然すぎて内容がないように思うかも知れないが，点過程のモデル化においては，重要である．この仮定を数学的に表わすために，標本空間Ωの要素ωは，時間軸上に定義された関数であると考えてみよう．このとき，ωの時間をsだけ進めたものを$\theta_s(\omega)$と表わし，$\theta_s(\omega)\in\Omega$とする．$\theta_s$は，$\Omega$から$\Omega$への関数，すなわち，$\Omega$上の作用素と考えることができ，$\theta_s(\theta_t(\omega))=\theta_{s+t}(\omega)$であるから，

(2.1)　$\theta_s\circ\theta_t=\theta_{s+t}$

が成り立つ．ここに，$f\circ g(x)=f(g(x))$である．一般に，(2.1)を満たすΩ上の作用素の集まり$\{\theta_s\}$を，作用素群と呼ぶ．

点過程モデルでは時間軸を表わすΩ上の作用素群$\{\theta_s\}$が存在すると仮定する．さて，$\{Z_n\}$を時間軸と結びつけるために，t_nとZ_nを組にした確率過程$\{(t_n,Z_n)\}$を考える．この確率過程は，マーク付点過程と呼ばれる．この時，3つの確率過程が時間軸を共有することは，

$$X(t)\circ\theta_s=X(s+t)$$
$$\{(t_n,Z_n)\}\circ\theta_s=\{(t_n-s,Z_n)\}$$

と表わすことができる．ここに，2番目の式の等号は，時間軸上のマークの位置と大きさが一致することを表わす．すなわち，これらの位置の番号nは，無視する．次に，確率測度Pは，$\{\theta_s\}$に関して定常であると仮定する．すなわち，$A\in\mathscr{F}$に対して，$\theta_sA=\{\omega|\theta_s(\omega)\in A\}$とするならば，$P(A)=P(\theta_sA)$が任意の$A\in\mathscr{F}$と任意の$s$に対して成り立つ．このとき，$\{X(t)\}$と$\{(t_n,Z_n)\}$は，連続な時間軸上に定義された同時に定常な確率過程である．逆に，それらが同時に定常な確率過程ならば，作用素群$\{\theta_s\}$を持った確率空間を構成することができることは明らかであろう．

3. パルム分布

点過程モデルでは，同時に定常な確率過程を定義するために，確率空間や作用素群を用いた．これらの概念を持ち出したのには理由がある．それは，連続時間に対して，定常となる確率過程を定義したときに，客特性量Z_nのPによる期待値$E(Z_n)$を定常状態における期待値とみなすことができないためである．これは，一見不思議に思われるかも知れないが，たとえば，一般に，$E(Z_0)$と$E(Z_1)$は異なる．すなわち，$\{Z_n\}$は，Pに関して定常ではないことによる．点過程モデルでは，この困難を除くために，確率空間$(\Omega,\mathscr{F},P)$と作用素群$\{\theta_s\}$を使って，$\{Z_n\}$を定常な列とするような確率測度を$(\Omega,\mathscr{F})$上に作る．すなわち，

(3.1)　$P_N(A)=\dfrac{1}{\lambda t}E\left(\sum_{0<t_i\leq t} I_A\circ\theta_{t_i}\right)$　$(A\in\mathscr{F})$

とする．定常性の仮定により，右辺はtに依存しない．また，P_Nが確率測度であることも容易に確かめることができる．このP_NをPのNに関するパルム分布と呼ぶ．(3.1)より，

(3.2)　$E_N(X(0))=\lambda^{-1}E\left(\sum_{0<t_i\leq 1} X(t_i)\right)$

である．ここに，E_Nは，P_Nに関する期待値を表わす．

(3.1)の定義で，$t\downarrow 0$とすれば，P_Nを原点にNの点がある（すなわち，$t_0=0$）という条件の下でのPの条件つき確率とみなすことができる．したがって，パルム分布を使えば，客の到着直前の待ち人数などを簡単に表わすことができる．なお，$\{Z_n\}$が，P_Nに関して定常となることも注意しておこう（[4] 参照）．

点過程モデルでは，パルム分布P_Nを標本空間$(\Omega,\mathscr{F})$上の確率測度とみなす．このとき，同じ標本空間上に2つの確率測度P, P_Nを考えることになる．これは，これまでの確率モデルとは異なるため，理解しにくい点であろう．しかし，この点こそが点過程モデルの本質である．一般に，確率モデルを作るときに，標本空間は，現象に即してある程度決まってしまうが，確率分布は，解析を考えた選択を行なっていることを思い出して欲しい．したがって，1つの標本空間上に複数の確率測度を考えることは，特別なことではない．しかし，モデルとして選択されるのは，1つの確率測度である．点過程モデルでは，Pが主でP_N（または，逆に，P_Nが主でP）は補助的役割を果たすと考えればよい．この場合，$E_N(Z_0)$

のような量は，確率空間$(\Omega, \mathscr{F}, P)$においてどのように解釈すればよいであろうか？　これに対する解答が次の関係式である．任意の非負値関数fに対して，

$$(3.3) \qquad E\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(Z_n)\right]=E_n(f(Z_0))$$

が成り立つ．なお，(3.3) にエルゴード性は必要ない．これより，$E_n(Z_0)$は，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$において長時間にわたる平均を表わしているので，定常状態での期待値であるとみなしてよいことがわかる．これに対して，$E(Z_0)$は，一般に，$E_N(Z_0)$ とは異なり，定常状態での期待値とみなすことはできない．一方，$\{X(t)\}$ は，Pについて定常であるから，$E(X(0))$ を定常状態での時間特性量 $X(t)$ の期待値とみなすことに問題はない．

4.　率保存則

点過程モデルは，定常状態の解析であるから，定常分布を求めることが中心的課題である．このためには，定常分布が満たす方程式，いわゆる，定常方程式を立てることが必要である．確率過程が離散的状態を持つマルコフ過程であれば，

(4.1)　　(他の状態から j への推移の率)
　　　　　$=$(状態 j から他の状態への推移の率)

により，定常方程式を求めることができる．方程式(4.1)は，状態 j への流出率と流入率が一致することを表わしているので，一種の平衡方程式であり率保存則と呼ばれる．ここに，率とは，単位時間当たりの状態変化の平均回数である．(4.1) は，確率過程が定常であれば成り立つので，マルコフである必要はない．しかし，マルコフでなければ，率の計算が困難である．また，状態空間が連続のときには(4.1)を直接適用することはできない．この2つの困難を解決するために考えられたのが，Cohen の Level crossing([3])，König[4] らによる生成作用素型の率保存則，Miyazawa[6,7]の微分型の率保存則などである．

一方，定常状態では，標本間の関係から得られる一般的関係式がある．たとえば，Little の公式がその典型である．Little の公式は，Brumelle[2]らにより一般化され $H=\lambda G$ と名づけられた．点過程モデルでは，この式を Campbell の公式と呼ぶ (Franken[4])．これらの公式も定常状態で成り立つという意味では，定常方程式と見なすことができる．実際，それらを含め多くの定常方程式を微分型率保存則から導くことができる．以下では，この微分型率保存則について説明する．

はじめに，待ち行列に表われる時間特性量の確率過程の標本関数は，客の到着などの時点を除けば，滑らかな関数であることに注目する．そこで，標本関数の微分を計算しその期待値をとれば，定常性から，期待値が0に等しいことが期待される．これが，微分型率保存則の原理である．ただし，標本関数が不連続な点では，微分ができないので，パルム分布を使って，この問題を解決する．次の2つの条件を仮定する．

(a)　$\{X(t)\}$ は，不連続点を除いて微分可能な標本関数を持つ．

(b)　$\{X(t)\}$ のすべての不連続点は，Nの点に含まれる．

このとき，$X(t)$ の変化が，連続的部分と不連続の部分からなることに注目すると，

$$(4.2) \qquad X(1)-X(0)=\int_0^1 X'(s)ds + \sum_{0<t_i\leq 1}(X(t_i+)-X(t_i-))$$

が得られる．ここに，$X(t+)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}X(t+\varepsilon)$, $X(t-)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}X(t-\varepsilon)$ とする．(4.2) の両辺の期待値をとれば，$\{X(t)\}$ と $\{X'(t)\}$ が定常過程であること，および(3.2)から，

$$(4.3) \qquad E(X'(0))=\lambda E_N(X(0-)-X(0+))$$

を得る (Miyazawa[7])．ただし，(4.3)の両辺の期待値は，ともに有限であるとする．(4.3) を微分型率保存則と呼ぶ．

微分型率保存則を複数の点過程 $N_1, \cdots, N_n$ に拡張しておくと便利である．たとえば，直列型待ち行列で，N_i を第 i 段目の入力とすれば，各段での客の到着直前での待ち人数などを考えることができる．(4.3) を適用するために，Nを複数の点過程 $N_1, \cdots, N_n$ の重ね合わせ，すなわち，$N=N_1+\cdots+N_n$ とする．このとき，N_1 の強度を λ_i，P の N_i に関するパルム分布を P_i とすれば，定義より，

$$\lambda P_N(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i(A) \qquad (A\in\mathscr{F})$$

であるから，(4.3) より，Nが単純ならば，

$$(4.4) \qquad E(X'(0))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E_i(X(X(0-)-X(0+))$$

が得られる (Miyazawa[6])．

5.　待ち行列への応用

微分型率保存則を用いて，待ち行列の関係式を導こう．$\{l(t)\}$ を系待ち人数過程，N_1，N_2 を，客の到着，退去を表わす点過程とする．すなわち，$l(t)$ は，N_1 の点で1だけ増加し，N_2 の点で1だけ減少する．また，

λ_1, λ_2 を到着率，退去率とする．なお，サービス窓口数やサービス規律などについては，何も仮定しない．

はじめに，Little の公式を導く．$U_n(t)$をn番目の客の時刻tでの系内残余滞在時間，W_nをその客の系内待ち時間とする．ただし，系内にいない客に対しては，$U_n(t)=0$とする．このモデルで，$N_1=\{t_n\}$に対して，$\{(t_n, W_n)\}$が定常なマークつき点過程であると仮定する．これがこのモデルを論じるさいの唯一の確率的仮定である．このとき，

$$U_n(t)=(W_n-(t-t_n))I_{\{t_n\leqq t<t_n+W_n\}}$$

であるから，

$$X(t)=\sum_i U_i(t)$$

とおくと，$\{X(t)\}$は，$\{(t_n, W_n)\}$と同じ時間軸を持つ確率過程であり，条件(a)，(b)を満たす．一方，$X'(t)=-l(t), U_n(0+)=W_n, U_n(0-)=0$であるから，(4.3)より，Little の公式

(5.1) $\quad E(l(0))=\lambda_1 E_1(W_0)$

が得られる．微分型保存則を用いると Little の公式を容易に2次モーメントの場合に拡張することができる．$V(t)=\sum_i U_i(t)$とおく．このとき，$X(t)=l(t)V(t)$とすれば，$X'(t)=-(l(t))^2$であるから，(5.1)と同様にして，

(5.2) $\quad E((l(0))^2)=\lambda_1 E_1((l(0-)+1)W_0+V(0-)) -\lambda_2 E_2(V(0-))$

が得られる (Miyazawa [9])．

次に，待ち人数の分布について考えてみよう．この場合の確率的仮定は．$\{l(t)\}$が定常過程であることだけである．このとき，非負の整数jに対して，

$$X(t)=I_{\{l(t)\geqq j\}}$$

とおき，(4.4)を適用すると，$X'(t)=0$であるから，$l(0+)-l(0-)=1$ a.s. P_1, $l(0+)-l(0-)=-1$ a.s. P_2 より，Finch の公式

(5.3) $\quad \lambda_1 P_1(l(0-)=j)=\lambda_2 P_2(l(0+)=j)$

を得る．この$l(t)$に補助変数として，次の変化が起こるまでの時間$r_i(t)=\inf\{s>0|N_i((t,t+s])=1\}$, $(i=1, 2)$を加えた確率過程$\{(r_1(t), r_2(t), l(t))\}$を考えよう．ただし，$l(t)=0$のときは，$r_2(t)=0$とする．$r_1(t)$は，残余到着時間，$r_2(t)$は，残余退去時間である．$j\geqq 0$に対して，

$$X(t)=e^{-(\theta_1 r_1(t)+\theta_2 r_2(t))}I_{\{l(t)=j\}}$$

とおく．このとき，$\{X(t)\}$は，$N=N_1+N_2$に対して，条件(a)，(b)を満たす．また，$r'_i(t)=-1 (i=1,2)$より，$X'(t)=(\theta_1+\theta_2 I_{\{l(t)>0\}})X(t)$である．したがって，

$$\phi(\theta_1,\theta_2,j)=E(e^{-(\theta_1 r_1(0)+\theta_2 r_2(0))}I_{\{l(0)=j\}})$$
$$\phi_1(\theta_1,\theta_2,j)=E_1(e^{-(\theta_1 r_1(0+)+\theta_2 r_2(0))}I_{\{l(0-)=j\}})$$
$$\phi_2(\theta_1,\theta_2,j)=E_2(e^{-(\theta_1 r_1(0)+\theta_2 r_2(0+))}I_{\{l(0+)=j\}})$$

また，$\delta(j)=I_{\{j\geqq 1\}}$とおけば，(4.4)より，

(5.4) $\quad (\theta_1+\theta_2\delta(j))\phi(\theta_1,\theta_2,j)=\lambda_1[\phi_1(0,\theta_2,j) -\phi_1(\theta_1,\theta_2,j-1)\delta(j)] +\lambda_2[\phi_2(\theta_1,0,j-1)\delta(j)-\phi_2(\theta_1,\theta_2,j)]$

が得られる．ここで，待ち行列モデルが$GI/GI/1$であるとすれば，$\{(r_1(t), r_2(t), l(t))\}$は，マルコフ過程である．このとき，(5.4)は，コロモゴロフの微分方程式のラプラス変換に他ならない．すなわち，微分型率保存則からコロモゴロフ型の定常方程式が得られる．この型の微分型率保存則は，時に，Basic equation と呼ばれる．同様にして，かなり広いクラスのマルコフ過程 (GSMP など) に対して，微分型率保存則で定常分布を特徴づけることができる (Miyazawa [8])．このように，微分型率保存則は，マルコフ型の過程に対しては，定常方程式と同値であるが，その表現は柔軟性に富んでいる．また，マルコフ性を持たない場合へ容易に拡張することもできる．

6. 率保存則の拡張

微分型率保存則を使うとき，点過程Nが単純であるという仮定は，制約が強い．たとえば，Littleの公式は，集団到着でも個々の客に対して成り立つ．また，Finch の公式では，到着と退去が同時に起こるときどうなるであろうか？ このような場合，(4.3)，(4.4)は，適用できない．しかし，パルム分布の定義を拡張することにより，点過程Nが単純でない場合にも，(4.3)，(4.4)が成り立つようにできる(Miyazawa[9])．すなわち，Nが単純であるという仮定は，取り除くことができる．ただし，同時に複数の事象が起こったときには，それらに順序をつけておくことが必要である．たとえば，到着と退去が同時に起こった時には，退去が先に起こり次に到着が起こると約束する(逆でもよい)．このとき，到着した客の見る待ち人数からは，退去した客が除かれる．

ここ1年ほどの間に，微分型率保存則に関する理論的論文が盛んに発表されている([1],[3],[5],[9])．特に，Bremaud [1] は，点過程の基本公式が，微分型率保存則から得られることを示した．確率空間$(\Omega,\mathscr{F},P)$，作用素群$\{\theta_s\}$，点過程$N=\{t_n\}$を2節で定義したものとする．このとき，$T(t)=\inf\{t_n|t_n>t\}$とし，$A\in\mathscr{F}$に対して，

$$X(t)=\int_t^{T(t)} A_A \circ \theta_s \, ds$$

とおくと， $X'(t)=-I_A \circ \theta_t$, $X(0-)=0$, $X(0+)=\int_0^{t_1} I_A \circ \theta_s \, ds$ であるから，(4.3) より，

$$(6.1) \quad P(A)=\lambda E_N\left(\int_0^{t_1} I_A \circ \theta_s \, ds\right)$$

を得る．(6.1) は，(3.1) とは逆に，P が P_N から計算できることを示しているので，逆変換公式と呼ばれる．Miyazawa[9]は，Campbell の公式やその一般化も同様に微分型率保存則から得られることを示した．これから，Little の公式が微分型率保存則から得られたのは，当然であると言える．

7. あがとき

点過程モデルは，確率空間から作ななければならないという点で，教科書的モデルである．一般に，数学的厳密さを追及したモデルは，退屈になりがちであるが，点過程モデルは，実際に役立つ点で興味深い．ぜひ，微分型率保存則を待ち行列の解析に利用していただきたい．マルコフモデルとは異なった面白い結果が得られることが多い．なお，紙面の都合上，文献は最小限度に止めた．これらの文献から孫引きしていただければ幸いである．

参考文献

[1] Bremaud, P. An elementary proof of Sengupta's invariance relation and a remark on Miyazawa's conservation principle. to appear in *J. Appl. Prob.*

[2] Brumelle, S. L. *J. Appl. Prob.* 8, 508-520 (1971).

[3] Ferrandiz J. M. and Lazar, A. A. Rate conservation for stationary processes. to appear in *J. Appl. Prob.*

[4] Franken, P., König, D., Arndt, U. and Schmidt, V. Queues and Point Processes. Wiley(1982).

[5] Mazumdar, R., Kannurpatti, R. and Rosenberg, C. On rate conservation law for non-stationay processes. to appear in *J. Appl. Prob.*

[6] Miyazawa, M. *Adv. Appl. Prob.* 15, 874-885 (1983).

[7] Miyazawa, M. *J. Appl. Prob.* 22, 408-418 (1985).

[8] Miyazawa, M. The characterization of the stationary distributions of the supplemented Self-Clocking Jump Process. to appear in *Math. of OR.*

[9] Miyazawa, M. Derivation of Little's and related formulas by rate conservation law with multiplicity. preprint(1990).

2月会合記録

2月5日(火)	企業サロン委員会	8名
2月6日(水)	ＩＡＯＲ委員会	5名
2月18日(月)	編集委員会（ＯＲ誌）	11名
2月19日(火)	フェロー会議	15名
2月20日(水)	表彰委員会	9名
2月22日(金)	主査会議	12名

平成2年度版『会員名簿』発刊

先に，お知らせいたしておりました，平成2年版「会員名簿」が完成しました．ご予約いただいた方々には，すでに発送済ですが，わずかに残部がありますので会員の方々に限り，お頒けいたします．ご希望の方は，電話またはハガキで学会事務局までお申し出ください．

(価格2000円―送料込―)

名簿刊行委員会からのお願い

あなたの電子メイルのアドレスを登録しましょう．詳しくはイエローページをご覧ください．

連絡先：suzuki@gssm. otsuka. tsukuba. ac. jp

お詫びと訂正

前年（1990）12月号総目次〔特集〕の箇所に誤りがありましたのでお詫びして訂正いたします．

683頁4月号のタイトル「階層化意思決定法（ＡＨＰ）……4月号（156～180ページ）」とあるのは間違い．正しくは「土木建築のＯＲ……4月号（194～255ページ）」です．