連載講座

ファイナンス理論の概要

――動的ポートフォリオ理論と ICAPM――

Chi-fu Huang†, 浦谷　規*

1. はじめに

伝統的に，不確実性の下での多期間経済における投資家の最適消費とポートフォリオ決定問題，すなわち**動的ポートフォリオ理論**は確率的ダイナミックプログラミングによって発展してきた．Merton (1971) がこの分野の基本的論文である．しかしながら本文では，伝統的アプローチの代わりに連載第3回に紹介した**条件付証券の価格理論**が投資家の最適消費とポートフォリオ戦略の分析にいかに有用かを構説しよう．特に，投資家の最適政策は条件付証券の価格理論の線形偏微分を解くことによって求められることを示そう．

投資家の最適消費とポートフォリオ政策の特徴がわかってしまえば，代表的投資家の存在する経済における各資産の期待収益率間の均衡関係について結論が容易に導ける．これが Merton(1973)の **Intertemporal Capital Asset Pricing Model** である．

2. 最適解消費とポートフォリオ政策

まず Black-Sholes モデルにおける投資家の最適消費とポートフォリオ政策から始めよう．そしてBlack-Sholesモデルの結果をいかに一般化するかについて述べる．

2.1 Black-Scholes モデル

この節の設定は，連載第3回の第2節と同一であり，詳しくはそこを参照していただきたい．2つの永続証券として，危険証券と無危険証券が存在し，危険証券の価格は次の幾何ブラウン運動にしたがい，

$$S(t)=\exp\left\{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma w(t)\right\},$$

これを微分で表わすと，

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dw(t),$$

となる．ただしwは確率Pの下での標準ブラウン運動である．また無危険証券の価格は時刻tで$B(t)=\exp\{rt\}$とする．ただし$r>0$は定数である．無危険証券は瞬時に一定の金利rを受ける預金と考えられる．投資家が時刻tに与えられる情報は，時刻0からtまでの危険証券の価格の履歴である．この情報を$\mathscr{F}_t$と記す．

この経済における投資家は，時刻Tにおける富の期待効用を最大化する危険証券と無危険証券のポートフォリオとなる**自己充足戦略**[1](α,θ)を用いるものとする．$\alpha(t)$および$\theta(t)$はそれぞれ危険証券と無危険証券の時刻tにおける保有数である．連載第3回と同様に，自己充足戦略(α,θ)を次の条件の下で考える．

$$E\left[\int_0^T|\theta(t)S(t)|^2dt\right]<\infty.$$

この自己充足戦略を許容取引戦略 (Admissible Trading Strategies) と呼び，$H^2(P)$と記す．連載第3回の3.2節から$H^2(P)$には裁定取引機会が存在しないことがわかっている．

$L^2(P)$を$\mathscr{F}_T$に依存する確率変数の空間とすると，投資家は次の問題を解くことになる：

$$\begin{aligned}&\sup_{(\alpha,\theta)\in H^2(P)} E[V(W_T)]\\ &\quad \text{s.t.}\quad \alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)=W_0,\\ &\qquad\qquad W_T=\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)\in L^2(P), \quad (1)\\ &\qquad\qquad W_T\geq 0\ \ P-\text{a.s.}\end{aligned}$$

ただし$V(\cdot)$は時刻Tの投資家の富に対する効用関数，$E[\cdot]$はPの下の期待値そして，$W_0>0$は投資家の初期の富とする．Vは連続な増加関数で厳密に凹関数で，かつ微分可能な関数である．

連載第3回の3.2および3.3節より，Black-Sholes モデルでは市場は動的に完備であるから，すべての$x\in L^2(P)$はある戦略$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$でファイナンスされ，その戦略$(\alpha,\theta)$でファイナンスされる条件付証券の時刻$t$

† マサチューセッツ工科大学

* 静岡県立大学

[1] 自己充足戦略の定義は連載第3回を参照

における価値は，

$$E^*[e^{-r(T-t)}x|\mathscr{F}_t], \tag{2}$$

である．ただし$E^*[\cdot|\mathscr{F}_t]$は一意な同値マルチンゲール測度Qの下での時刻tの条件付期待値を表わす．一意な同値マルチンゲール測度Qは次のように定義される．

$$Q(A)=\int_A \eta(T)P(dw),$$

$$\eta(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\kappa^2 t+\kappa w(t)\right\},$$

$$\kappa\equiv-\frac{\mu-r}{\sigma},$$

ただしAは$\mathscr{F}_T$のすべての要素とする．確率PとQは同値なのでこの両方の確率に対して“ほとんど確実に(almost surely)”として単に a.s.を用いる．

定理

もし(α,θ)が(1)の解であるならば，$W_T{}^*=\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)$ a.s.は次の問題の解である．

$$\sup_{W_T\in L^{2+}(P)}\ E[V(W_T)]$$

$$\text{s.t.}\quad E^*[e^{-rT}W_T]=W_0. \tag{3}$$

逆に，$W_T{}^*$を(3)の解とすると，$W_T{}^*$はある戦略$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$が存在し，$(\alpha,\theta)$が(1)の解となる．

証明

(α,θ)，(1)がの解であるとしよう．$W_T{}^*=\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)\in L^{2+}(P)$a.s. が(3)の解であることを示す．$E^*[e^{-rT}W_T{}^*]=\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)=W_0$であるから，$W_T{}^*$が(3)の可能解である．もしも$W_T{}^*$が(3)の解でないとすると，(3)の可能解で$E[V(\hat{W}_T)]>E[V(W_T{}^*)]$を満たす$\hat{W}_T$が存在する．動的に完備な市場だから，$\hat{W}_T$は$(\hat{\alpha},\hat{\theta})\in H^2(P)$かつ$\hat{\alpha}(0)B(0)+\hat{\theta}(0)S(0)=E^*[e^{-rT}\hat{W}_T]$を満たす戦略でファイナンスされる．そこで$\hat{W}_T$は(1)の時刻$T$の可能解である．これは，$(\alpha,\theta)$が(1)の解である仮定に矛盾する．

次に$W_T{}^*$を(3)の解であるとしよう．$W_T{}^*\in L^2(P)$は連載第3回の3.2節と定理3より，$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$でファイナンスされ，次の条件を満たす．$\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)=E^*[e^{-rT}W_T{}^*]=W_0$. かくして$W_T{}^*$は(1)の時刻$T$の可能解である．いま$(\alpha,\theta)$が(1)の解でないと仮定しよう．すると，ある戦略$(\hat{\alpha},\hat{\theta})\in H^2(P)$が(1)の可能解であり，

$$E[V(\hat{W}_T)]>E[V(W_T{}^*)],$$

を満たす．ただし$\hat{W}_T=\hat{\alpha}(T)+\hat{\theta}(T)S(T)P-$a.s. $\hat{W}_T$は取引戦略$(\hat{\alpha},\hat{\theta})\in H^2(P)$でファイナンスされるので，連載第3回の3.2節より

$$E^*[e^{-rT}\hat{W}_T]=\hat{\alpha}(0)B(0)+\hat{\theta}(0)S(0)=W_0.$$

となる．かくして$\hat{W}_T$は(3)の可能解となる．これは$W_T{}^*$が(3)の解である仮定に矛盾するので，(α,θ)が(1)の解であることがわかる．(証明終り)

定理は(1)の複雑な動的最適化問題と標準的な静的最適化問題(3)の同値関係を示している．今後，(3)の解は存在すると仮定し，$W_T{}^*$と記す．詳細に興味のある読者は Cox and Huang (1986) を参照されたい．

さて，投資家の最適ポートフォリオ政策を構成してみよう．これは，いまから見るように連載第3回の条件付証券の複製戦略の構成と変わるところがない．

(3)に解が存在するなら，ラグランジェ法より$\lambda>0$となるラグランジェ定数が次の条件を満たす．

$$V'(W_T{}^*)\leq\lambda e^{-rT}\eta(T)\quad \text{a.s.},$$

ただし等号は$W_T{}^*>0$のとき成り立つ．また，V'はVの微分を表わし，次の等式を用いた．

$$E^*[e^{-rT}W_T{}^*]=E[e^{-rT}W_T{}^*\eta(T)].$$

次のプロセスを考えてみよう．

$$\xi(t)=\lambda e^{-rt}\eta(t),\quad t\in[0,T],$$

ただしV'の逆関数を$f(y)=\inf\{x\geq 0: V'(x)\leq y\}$とする．すると$W_T{}^*=f(\xi(T))$と表わせる．$\eta(0)=1$のとき$\xi(0)=\lambda$となり，

$$\xi(t)=\xi(s)\exp\left\{-\left(r+\frac{1}{2}\kappa^2\right)(t-s)+\kappa(w(t)-w(s))\right\}\quad \forall t\geq s.$$

となるから，標準ブラウン運動は独立で定常的増分をもつので，$\xi(t)\,(t\geq s)$の時刻sにおける条件付確率は$\xi(s)$で完全に決まる．したがって，確率Qの下でのξのダイナミックスである次の微分表現が有効になる．

$$d\xi(t)=-\xi(t)(r-\kappa^2)dt+\xi(t)\kappa dw^*(t)\quad t\in[0.T],$$

ただし，

$$w^*(t)\equiv w(t)-\kappa t\quad t\in[0,T]$$

はQの下での標準ブラウン運動である(連載第3回の定理1参照)．

時刻Tの最適な富の時刻tにおける価値は，

$$\begin{aligned}E^*[e^{-r(T-t)}W_T{}^*|\mathscr{F}_t]&=E^*[e^{-r(T-t)}f(\xi(T))|\mathscr{F}_t]\\&=\frac{E[e^{-r(T-t)}f(\xi(T))\eta(T)|\mathscr{F}_t]}{\eta(t)}\\&=\frac{E[f(\xi(T))\xi(T)|\xi(t)]}{\xi(t)}\equiv F(\xi(t),t),\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ただし第2の等式はQの定義とベイズの条件付確率の公式から導かれ，第3の等式は$\xi(t)$が与えられると，$\xi(T)$の条件付確率は完全に決定することからえられる．

したがって，$F(\xi(t),t)$はTに$f(\xi(T))$を支払う“条件付証券”の時刻tにおける価値である．マルチンゲールの方法によってFが満たす偏微分方程式を示そう．

$F(\xi(t),t)$は時刻 t における条件付証券であるから，$e^{-rt}F(\xi(t),t)$ は同値マルチンゲール測度Qの下でマルチンゲールである、伊藤の補題より，Qのもとでは，

$$d(e^{-rt}F(\xi(t),t)) = e^{-rt}\overbrace{\left[\frac{1}{2}F_{\xi\xi}\xi^2\kappa^2 - F_\xi(r-\kappa^2)\xi - rF + F_t\right]}^{\text{time trend}} + F_\xi\xi\kappa\frac{1}{\sigma S(t)}dS^*(t), \tag{5}$$

ただし$S^*(t)=S(t)/B(t)$であり，連載第3回の(6)を用いた．(5)の左辺はQのもとでは，マルチンゲールであるから，右辺の時間的変化の項は零でなければならない．かくして次の偏微分方程式がえられる：

$$\frac{1}{2}F_{\xi\xi}\xi^2\kappa^2 - F_\xi(r-\kappa^2)\xi - rF + F_t = 0, \tag{6}$$

この偏微分方程式は後述することとして，(5)の積分を考えてみよう．

$$e^{-rt}F(\xi(t),t) = F(\xi(0),0) + \int_0^t \theta(t)dS^*(t),$$

となる．ただし

$$\theta(t) = F_\xi\xi\kappa\frac{1}{\sigma S(t)}.$$

$\alpha(t)=(F(\xi(t),t)-\theta(t)S(t))/B(t)$とすると，連載第3回の定理3の証明と同様にして，$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$ かつ W_T^*は初期の富W_0でこの戦略でファイナンスされる．

次にW_T^*の複製戦略を考えてみよう．$S(t)$と$\xi(t)$には1対1の写像が存在するので，任意の時刻 t におけるこの複製戦略は，$\xi(t)$の値と t に依存する．最適制御理論では通常，制御プロセスの関数のコントロールは**フィードバックコントロール**となる．ここでは，制御されるプロセスはポートフォリオ価値の時間的変化，すなわち投資家の富の変化である．この**最適制御**(α,θ) が投資家の富と時間の関数として記述できることを示そう．

第1に，時刻 t における最適ポートフォリオの価値を，$W(t)=\alpha(t)\ B(t)+\theta(t)\ S(t)$ とする．Fの定義から，$W(t)=F(\xi(t),t)$である．fは減少関数でかつ定数ではないので，Fはξの厳密に減少関数である．したがって$\xi(t)=F^{-1}(W(t),t)$である．ただし$F^{-1}(\cdot,t)$は$F(\cdot,t)$の逆関数である．第2に，時刻 t における最適戦略は$\xi(t)$と t だけの関数であり，また$\xi(t)=F^{-1}(W(t),t)$であるから，最適戦略は富と時間の関数として表わせる．かくして最適取引戦略は**フィードバックコントロール**として表現できた．

上記の最適戦略の構成においては，関数Fとラグランジェ乗数λがわかっていると仮定されている．応用においては，これを計算する必要がある．もし任意の$\xi(0)$に対するFの条件付期待値が解析的にわかっていれば，容易にである．なぜならλは$F(\lambda,0)=W_0$を満たすから，$\lambda=F^{-1}(W_0,0)$ と定義し，$\xi(0)=\lambda$とする．そこでプロセスξは定義され，最適取引戦略が求められる．

Fに対する解析的解が存在しないときには，次のように少々複雑になる．(6)の偏微分方程式を境界条件が$F(\xi,T)=f(\xi)$かつ，すべての t に対して$\lim_{\xi\to\infty}F(\xi,t)=0$となる数値解を求めなければならない．$\xi(0)$の種々の可能な値に対して$F(\cdot,0)$が求められれば，ラグランジェ乗数は$\lambda\equiv F^{-1}(W_0,0)$として求められる．かくして最適取引戦略が決定される．

いかにして投資家が最適取引戦略を構成するかは，条件付証券に対する複製戦略からのアナロジィから明らかである．時刻Tの投資家の最適な富は条件付証券であり，その支払いは(3)の静的な最大化問題によって決定される．そこで，最適取引戦略はこの条件付証券の複製戦略を見い出すことに帰着する．このためにまず，この条件付証券Fの価値をすべての時間に対して求める．そして最適取引戦略はFの微分によって決定される．もしもFが解析的に表わせないなら，線形2階の偏微分方程式を数値解法で求める．

この場合の偏微分方程式と連載第3回で述べた条件付証券の偏微分方程式には次の明らかに異なる点がある．連載第3回の(16)と(18)の偏微分方程式には，危険資産の瞬時の期待収益率が含まれない．一方，(6)はκを通してμに依存する．これはFがξの関数であり，そのダイナミックスがQの下でのκに依存するからである．さて，すべての t に対して，$\xi(t)$と$S(t)$に1対1対応が存在する．そこで，この写像を$h(S(t),t)=\xi(t)$と表わすと，この写像がμに依存することを確かめられる．さらに，$G(S(t),t))=F(h(S(t),t),t)$とすると，$G(S(t),t)=F(\xi(t),t)$となる．したがって，$G$が連載第3回の(16)偏微分方程式を満たすことが容易に確認できる．(16)はμには依存しない．しかし$t=T$でのGの境界条件である$G(S,T)=f(h(S,T))$はμに依存する．このことにより，オプションの価格理論におけるμの情報は，オプラョンの支払がμに依存しないために，必要としない．しかしながら，投資家の時刻Tの最適な富はμに依存する$\xi(T)$の関数であるから，μの情報は時刻Tの最適な富を求めるために必要である．もしも，投資家が危険資産の期待収益率を知ることができないなら，彼の期待効用を最大化する最適ポートフォリオを求めることは不可能になる！

2.2 モデルの一般化

前節で構成した投資家の最適取引戦略を，さらに一般的なプロセスの経済に拡張しよう．N種の危険証券と1つの無危険証券が存在し，これらの証券は時間$[0, T]$には配当を支払わないものとする．第n危険証券は時刻tには価格$S_n(t)$で売買される．$S(t)=(S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t))^{\mathrm{T}}$とする．ただし$^{\mathrm{T}}$は"転置"を表わす．この危険証券ベクトル$S(t)$は，次の関係を満たすものとする．

$$S(t)=S(0)+\int_0^t I_S(t)\mu(Y(t), t)dt$$

$$+\int_0^t I_S(t)\sigma(Y(t), t)dw(t) \quad t\in[0, T],$$

ただしwはN-次の標準ブラウン運動，$I_S(t)$は$N\times N$の対角行列で第nの対角要素が$S_n(t)$である，$\mu(Y, t)$は$N\times 1$ベクトルでその要素がN種の危険資産の瞬時の期待収益率$\sigma(Y, t)$は$N\times N$行列で$\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$が時刻$t$における危険資産の瞬時の期待収益率の分散共分散行列である．Yは次のようなM次の拡散過程であり，$M\leq N$を満たすものとする：

$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t \beta(Y(t), t)\,dt$$

$$+\int_0^t g(Y(t), t)dw(t) \quad t\in[0, T],$$

ただしβとgはそれぞれ$M\times 1$ベクトルと$M\times N$行列である．また$\sigma(Y(t), t)$と$g(Y(t), t)$はすべての$Y(t)$とtに対してフルランクとする．

便宜上今後，$\mu(t)$と$\sigma(t)$でそれぞれ$\mu(Y(t), t)$と$\sigma(Y(t), t)$を略記する．同様に$\beta(t)$と$g(t)$はそれぞれ$\beta(Y(t), t)$と$g(Y(t), t)$の代わりである．また，無危険資産の瞬時の収益率$r(Y(t), t)$も単純に$r(t)$と記す．したがって，時刻tにおける無危険資産の価格は$B(t)=\exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}$と表わす．

さて，次のように定義しよう．

$$\kappa(Y(t), t)=-\sigma(Y(t), t)^{-1}(\mu(Y(t), t)-r(Y(t), t)),$$

ただし$|\kappa(t)|^2\equiv \mathrm{tr}\,(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})$はすべての時間および標本点に対して一様に有界であるとする．また，これは価格システムが次の同値マルチンゲール測度をもち，

$$Q(A)=\int_A \eta(w, T)P(dw) \quad A\in\mathscr{F}_T,$$

ただし，

$$\eta(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t|\kappa(s)|^2ds+\int_0^t\kappa(s)^{\mathrm{T}}dw(s)\right\}$$

$$t\in[0, T];$$

であることを意味する（詳しくは Cox and Huang (1986) を参照）．

次に$\alpha(t)$と$\theta_n(t)$をそれぞれ無危険証券および第n危険証券の時刻tの保有数とする．$\theta(t)$を$(\theta_1(t), \ldots\theta_n(t))^{\mathrm{T}}$とする．取引戦略$(\alpha, \theta)$は次の条件を満たすとき許容可能(**Admissible**)と呼ぶ；

自己充足戦略でかつ，

$$E^*\left[\int_0^T|\theta(s)^{\mathrm{T}}I_S(s)\sigma(s)|^2ds\right]<\infty.$$

そこで$H^2(P)$をこの許容可能戦略の空間とする．また条件付証券は$L^2(P)$の要素である．

Pagès(1989) は市場が動的に完備であるとき，$L^2(P)$の任意の要素はある$(\alpha, \theta)\in H^2(P)$でファイナンスされることを証明した．このことから，定理1は(3)の制約式を次の式で置き換えても成り立つことがわかる．

$$E^*\left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\}W_T^*=W_0,\right.$$

そこで，今後は(3)の解が存在する仮定しよう．前節と同様に，W_T^* (3)に対する時刻Tの最適な富とし，$\xi(t)=\lambda_e{}^{-\int_0^t r(s)ds}\eta(t)$と定義する．すると，

$$\xi(t)=\xi(s)\exp\left\{-\int_s^t\left(r(\tau)+\frac{1}{2}|\kappa(Y(\tau), \tau)|^2d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\int_s^t\kappa(Y(\tau), \tau)^{\mathrm{T}}dw(\tau)\right\} \quad \forall t\geq s, \tag{7}$$

が成り立つ．ところが，Black-Scholesのモデルと異なり，すべてのtに対して$\xi(t)$と$S(t)$の間に1対1の関係が成り立たない．実際，$\xi(t)$の値は時刻0から時刻tまでのYの実現値に依存する．しかしながら，Yは拡散過程であることと，(7)から，$s\leq t$の時刻sにおける$\xi(t)$の確率的特徴は$\xi(s)$と$Y(s)$)で完全に決定される．数学的には$(\xi(s), Y(s))$が同時に拡散過程を形成するという．

W_T^*に対する複製取り引き戦略を求めるために，W_T^*の各時点での価値を計算しよう．W_T^*は条件付証券であるから，時刻tにおける価値は

$$E^*\left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\}W_T^*|\mathscr{F}_t\right]$$

$$=E^*\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}f(\xi(T))|\mathscr{F}_t\right]$$

$$=\frac{E\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}f(\xi(T))\eta(T)|\mathscr{F}_t\right]}{\eta(t)} \tag{8}$$

$$=\frac{E[f(\xi(T))\xi(T)|\xi(t), Y(t)]}{\xi(t)}\equiv F(\xi(t), Y(t), t),$$

となる．ただし$f(y)\equiv\inf\{x\geq 0 : V'(x)\leq y\}$であることおよび$(\xi, Y)$が1つの同時拡散過程にしたがうことから導かれる．

ここまでくると，後は標準的手続きとなる．Qの下での$F(\xi, Y, t)$マルチンゲールの方法から，W_T^*に対する複製戦略とFが満たす偏微分方程式が計算できる．$\exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}F(\xi(t), Y(t), t)$にマルチンゲール測度

の下で伊藤の補題を用いると，時間的変化の項が零となるので，次の線形の2階の偏微分方程式が求められる：

$$\frac{1}{2}F_{\xi\xi}\xi^2|\kappa|^2+\frac{1}{2}\operatorname{tr}(F_{YY}gg^{\mathrm{T}})-F_Y{}^{\mathrm{T}}{}_{\xi}\xi gk^{\mathrm{T}}-F_{\xi}[r-|\kappa|^2]+F_Y{}^{\mathrm{T}}[\beta+g\kappa^{\mathrm{T}}]-rF+F_t=0. \quad (9)$$

さらに，

$$\exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}F(\xi(t),Y(t),t)=F(\xi(0),Y(0),0)+\int_0^t\theta(s)^{\mathrm{T}}dS^*(t),$$

である．ただし，

$$\theta(t)=-F_{\xi}(\xi(t),Y(t),t)\xi(t)I_{S-1}(t)(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}(\mu(t)-r(t))+I_{S-1}(t)(g(t)\sigma(t)^{-1})^{\mathrm{T}}F_y(\xi(t),Y(t),t), \quad (10)$$

である．また，$I_{S-1}(t)$は$N\times N$の対角行列でその第n対角要素は$S_n(t)^{-1}$に等しい．そこで，次のように設定すると，

$$\alpha(t)\equiv\frac{F(\xi(t),\ Y(t),t)-\theta(t)^{\mathrm{T}}S(t)}{B(t)},$$

(α,θ)が$W_T{}^*$に対する複製戦略となる．

Black-Scholesモデルと同様に，Fはξの減少関数である．Fに対する解析的表現が存在すれば，$\xi(0)=\lambda=F^{-1}(W_0,Y(0),0)$と設定できる．ただし，$F^{-1}$は$F$の第1項に関する逆関数である．そこで，プロセス$\xi$が定義可能となり，したがって複製戦略も同様になる．解析的表現が存在しないとき，Fは(9)の偏微分方程式を次の境界条件の下に求めることによってえられる：$\lim_{\xi\to\infty}F(\xi,Y,t)=0$ および $\lim_{t\to T}F(\xi,Y,t)=f(\xi)$．そこで$\xi(0)$は同様に設定される．

(10)に表われる最適取引戦略は($M+2$)ファンド分離の特徴，すなわち最適ポートフォリオは瞬時のポートフォリオフロンテア上のポートフォリオすなわち**瞬時のフロンテアポートフォリオ**と，その収益率が予測不可能な状態変数Yと完全に相関するM個のポートフォリオ，および安全証券に分離可能である．このことを確かめるために，第1に最適ポートフォリオにおける危険証券への投資比率に変換しよう．時刻tでの最適ポートフォリオにおける第n危険証券への投資比率を$A_n(t)$とする．ただし $A(t)=(A_1(t),\ldots,A_N(t))^{\mathrm{T}}$．$A(t)$は最適ポートフォリオにおける危険証券への投資比率ベクトルである．したがって，

$$A(t)=-\frac{F_{\xi}(\xi(t),\ Y(t),t)\xi(t)}{F(\xi(t),Y(t),t)}(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}(\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N)+(g(t)\sigma(t)^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{F_y(\xi(t),\ Y(t),t)}{F(\xi(t),Y(t),t)}, \quad (11)$$

ただし$\mathbf{1}_N$はN次の1だけのベクトル．時刻tにおける安全資産への投資比率は$(1-A(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{1})$である．簡便化のために$F(t)$は$F(\xi(t),\ Y(t),t)$を，また同様に$F_{\xi}(t)$および$F_Y(t)$は$F_{\xi}(\xi(t),\ Y(t),t)$と$F_Y(\xi(t),\ Y(t),t)$を表わす．

$A(t)$は$\xi(t)$と，$Y(t)$，およびtだけに依存するので，最適制御と考えられるから，$A(t)$は$\xi(t)=F^{-1}(W(t),Y(t),t)$によるフィードバック制御である．ただし，$W(t)=\alpha(t)B(t)+\theta(t)^{\mathrm{T}}S(t)$．

第2に，連載第2回の(12)式より，$(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}(\mu(t)-r(t))$は時刻$t$のフロンテアポートフォリオの危険証券のポートフォリオ比率に比例することが明らかである．ただし，ポートフォリオフロンテアは時刻tにおける瞬時の証券の期待収益率および瞬時の収益率の分散共分散行列によって生成される．かくして(11)の右辺の第1項は，**瞬時の**フロンテアポートフォリオすなわち危険証券のポートフォリオ比率に比例する．

第3に，$(g(t)\sigma(t)^{-1})^{\mathrm{T}}$の各列はポートフォリオの危険証券の比率と見なせるから，$(g(t)\sigma(t)^{-1})^{\mathrm{T}}$は$M$個のポートフォリオの危険証券への投資比率を表わす．次の明らかな関係より，

$$(g(t)\sigma(t)^{-1})\sigma(t)g(t)^{\mathrm{T}}=g(t)g(t)^{\mathrm{T}};$$

時刻tにおけるYの変化に対するM個のポートフォリオの分散共分散行列が，Y分散共分散行列に等しいことを示している．これが$(g(t)\sigma(t)^{-1})^{\mathrm{T}}$の第$m$列が時刻$t$における収益率が完全に$Y$に相関するポートフォリオの危険証券への投資比率に比例することを説明する．

以上をまとめると，投資家の最適ポートフォリオは$M+2$の要素からなる：安全証券，瞬時のフロンテアポートフォリオ，そしてYの変化と完全に相関する収益率をもつM個のポートフォリオである．これらの$M+2$の要素に投資した富の比率は，関数Fとその微分に表われる投資家の効用関数によって決定される．

このミュチュアルファンド分離の結果の意味するものは重要である．もしも，状態変数Yを知りえたなら，安全証券と$M+1$個のミュチュアルファンド（1つの瞬時のフロンテアポートフォリオ，およびすべての投資家に最適である収益率が完全にYに相関するMのポートフォリオ）だけが必要となる．もしMがNより小さいときには，必要なミュチュアルファンドの数が存在する証券の数よりずっと少なくなる．

3. ICAPMモデル

前節では投資家が保有する最適ポートフォリオの特徴

を明らかにした．この節では，証券の瞬時の期待収益率の均衡関係における最適条件について考えてみよう．簡便化のために，証券の瞬時の収益率を単に収益率と呼ぶ．

モデルを単純化して，経済に代表的個人が存在し，安全資産にネットの供給は零と仮定する．この投資家の各時点での富$W(t)$は経済共体の富に比例し，彼の危険証券への最適証券への最適ポートフォリオ比率 $A(t)$ は市場ポートフォリオである．安全資産の供給はネットでゼロであるから，集計した富は市場均衡ではすべて危険証券に投資されなければならない．かくして，すべての時点tにおいて$A(t)^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_N=1$が成り立ち，時刻$t$における市場ポートフォリオの収益率は，

$$A(t)^{\mathsf{T}}dS(t)/S(t)=A(t)^{\mathsf{T}}\mu(t)dt+A(t)^{\mathsf{T}}\sigma(t)dw(t),$$

となる．(11)に前から$(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathsf{T}})$をかけると，

$$\boldsymbol{V}_{S,W}(t)\equiv(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathsf{T}})A(t)=\frac{-F_{\xi}(t)}{F(t)}[\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N]+\boldsymbol{V}_{S,Y}(t)\frac{F_Y(t)}{F(t)},$$

がえられる．ただし$\boldsymbol{V}_{S,W}(t)$は時刻tにおけるN種の危険証券の収益率と市場ポートフォリオの収益率との共分散行列であり，$\boldsymbol{V}_{S,Y}(t)=\sigma(t)g(t)^{\mathsf{T}}$は時刻$t$における$Y$の予測できない変化と$N$種の危険証券の収益率との共分散行列である．上記の関係を整理すると，

$$\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N=\frac{-F(t)}{F_{\xi}(t)}\boldsymbol{V}_{S,W}(t)+\boldsymbol{V}_{S,Y}(t)\frac{F_Y(t)}{F(t)}$$

$$=\boldsymbol{V}_{S,WY}(t)\begin{pmatrix}F(t)/F_{\xi}(t)\\F_Y(t)/F_{\xi}(t)\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

がえられる．ただし

$$\boldsymbol{V}_{S,WY}(t)=(\boldsymbol{V}_{S,W}(t),\boldsymbol{V}_{S,Y}(t)).$$

この関係から，危険証券の期待収益率は市場ポートフォリオの収益率と状態変数Yの予測できない変化との共分散に線形な関係にあることが明らかになる．これらの共分散の重みは，投資家の効用関数に依存する関数Fとその微分に依存して求められる．

さて，(12)式の$F(t)/F_{\xi}(t)$と$F_Y(t)/F_{\xi}(t)$とに観測値を代入できることを示そう．第1に，(12)に$A(t)^{\mathsf{T}}$を前からかけると，

$$\mu_W(t)-r(t)\equiv A(t)^{\mathsf{T}}[\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N]$$

$$=\boldsymbol{V}_{W,WY}(t)\begin{pmatrix}F(t)F_{\xi}(t)\\F_Y(t)/F_{\xi}(t)\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

がえられる．ただし，$\mu_W(t)$は時刻tの市場ポートフォリオの期待収益率であり，また$\boldsymbol{V}_{W,WY}(t)\equiv A(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}_{S,WY}(t)$．第2に，(12)に前から$g(t)\sigma(t)^{-1}$をかけると，

$$\mu_Y(t)-r(t)\mathbf{1}_M\equiv g(t)\sigma(t)^{-1}[\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N]$$

$$=\boldsymbol{V}_{Y,WY}(t)\begin{pmatrix}F(t)/F_{\xi}(t)\\F_Y(t)/F_{\xi}(t)\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

がえられる．ただし，$\mu_Y(t)$は時刻tにおけるYの予測できない変化と完全に相関するM個のポートフォリオの期待収益率ベクトルであり，$\mathbf{1}_M$はM次の1だけからなるベクトルである．

(13)と(14)を連立させて，$F(t)/F_{\xi}(t)$と$F_Y(t)/F_{\xi}(t)$について解くと，

$$\begin{pmatrix}-F(t)/F_{\xi}(t)\\F_Y(t)/F_{\xi}(t)\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}_{WY}(t)^{-1}\begin{pmatrix}\mu_W(t)-r(t)\\\mu_Y(t)-r(t)\mathbf{1}_M\end{pmatrix},$$

がえられる．この関係を，(12)に代入すると，

$$\mu(t)-r(t)\mathbf{1}_N=\boldsymbol{V}_{S,WY}(t)\boldsymbol{V}_{WY,WY}(t)^{-1}\begin{pmatrix}\mu_W(t)-r(t)\\\mu_Y(t)-r(t)\mathbf{1}_M\end{pmatrix}$$

$$\equiv\boldsymbol{\beta}_{S,WY}(t)\begin{pmatrix}\mu_W(t)-r(t)\\\mu_Y(t)-r(t)\mathbf{1}_M\end{pmatrix},$$

となる．これが，Merton(1973)およびCox, Ingersoll, and Ross (1985) の *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (*ICAPM*) と呼ばれるモデルである．危険証券の期待収益率は，市場ポートフォリオの収益および，状態変数の予測できない変化に完全に相関する収益率をもつM個のポートフォリオとに関する“ベータ”と線形な関係がある．これらのベータは，危険証券の期待収益率を市場ポートフォリオの収益および状態変数Yの変化に完全に相関する収益率をもつM個のポートフォリオとによる重回帰分析の係数になる．ベータの重みは，市場ポートフォリオおよびYに完全に相関するM個のポートフォリオとに対するリスクプレミアムである．

ICAPMモデルは，Sharpe(1964)，Lintner(1965)，およびMossin(1966)のCAPMモデルの一般化である．証券の均衡期待収益率は，市場ポートフォリオに関するベータに線形の関係にある．ICAPMモデルでは，収益率の分布が時間によって変化し，その変化が状態変数Yの変化によって決定するので，市場ポートフォリオに関するベータばかりでなく，さらにMのベータが表われる．これらのM個のベータが状態変数の変化の証券収益率に対する反応度 (sensitivity) をとらえる．

4. おわりに

条件付証券の価格理論が，投資家の最適消費とポートフォリオ政策の導出にいかに有効であるかを示した．議論を明確にするために，投資家は時刻Tでだけ消費し，証券取引は時刻Tまでの任意の時点で可能とした．時刻T以前の消費も可能とする一般化は簡単に導くことがで

きる．その詳細に興味ある読者は，Cox and Huang (1986, 1989)を参考にされたい．

ここでは，仮定した価格プロセスによって市場が動的に完備であることを保証している．しかし，この仮定は，連載第1回の第3節に紹介した伝統的なダイナミックプログラミングによる方法よりも，強い制約である．ここでの方法は，市場が動的に完備でない場合にも，一般化することができる．詳細は，He and Pearson (1989)および Pagès (1989)を参考にされたい．

今回は，Merton (1973) の *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (*ICAPM*) を導いたが，中間消費がある場合，同様の方法が可能で，連載第1回の第3節のBreeden(1979)による *Intertemporal Consumption Capital Asset Pricing Model* がえられる．詳細は，Huang(1989)を参照されたい．

ICAPM の導出にさいして，価格が決定される均衡の存在を仮定した．この均衡の存在およびそれの関係する問題は，Duffie (1986), Duffie and Huang (1985), および Huang(1985a, 1985b, 1987)を参考にされたい．

参考文献

[1] Breeden, D. 1979. An intertemporal capital pricing model with stochastic investment opportunities. *Journal of Financial Economics* **7** : 265–296.

[2] Cox, J., and C. Huang. 1986. A variational problem arising in financial economics. to appear in *Journal of Mathematical Economics*.

[3] Cox, J., and C. Huang. 1989. Optimal consumptio and portfolio policies when security prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory* **49** : 33–83.

[4] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. 1985. An intertemporal general equilibrium model of security prices. *Econometrica* **53** : 363–384.

[5] Duffie, D., and C. Huang. 1985. Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities. *Econometrica* **53** : 1337–1356.

[6] Duffie, D. 1986. Stochastic equilibria : Existence, spanning number, and the "no expected gain from trade" hypothesis. *Econometrica* **54** : 1161–1184.

[7] He, H., and N. Pearson. 1989. Consumption portfolio policies with incomplete markets and shortsale constraints: The inginite dimensional case. Mimeo. To appear in *Journal of Economic Theory*. Technology.

[8] Huang, C. 1985a. Information structure and equilibrium security prices. *Journal of Economic Theory* **35** : 33–71.

[9] Huang, C. 1985b. Information structure and viable price systems. *Journal of Mathematical Economics* **13** : 215–240.

[10] Huang, C. 1987. An intertemporal general equilibrium security pricing model : The case of diffusion information. *Econometrica* **55** : 117–142.

[11] Huang, C., 1989, *Lecture Notes on Advanced Financial Economics*, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

[12] Lintner, J. 1965. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics* **47** : 13–37.

[13] Merton, R. 1971. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory* **3** : 373–413.

[14] Merton, R. 1973a. An intertemporal capital security pricing model. *Econometrica* **41** : 867–887.

[15] Mossin, J. 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **35** : 768–783.

[16] Pagès, H. 1989. Three Essays In Optimal Consumption. Unpublished Ph. D. thesis. Massachusetts Institutes of Technology.

[17] Sharpe, W. 1964. Capital asset prices : A theory of capital market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* **19** : 425–442.