研究レポート

オプション売買高の時間推移に関する考察

田中泰明，土肥　正，高木繁行，海生直人，尾崎俊治

1.　はじめに

株式オプションは先物取引と並んで投資家にとって有力なリスク・ヘッジの手段である．投資家は原株の売買とオプションを組み合せて効果的なポートフォリオを組むことにより株式相場のさまざまな変動に対応することが可能となる．わが国においても1989年6月の大阪証券取引所を皮切りに，東京，名古屋の各証券取引所において株価指数を対象としたオプション市場が開設されている．現在までに数多くのオプションに関する研究［1］—［3］が報告されているが，それらの大部分はオプション評価モデルすなわち市場の均衡に基礎を置いてオプションのリリース時における妥当なプレミアム値を算出するための数学的モデルを取り扱ったものである．このモデルの特徴として(i)オプションは純粋なリスク・ヘッジの手段として取り扱われていること(ii)オプションは権利行使により決済されるかあるいはその権利が放棄されるかのいずれかであるという点が仮定されていることなどが挙げられる．

しかしながらオプションは権利行使だけではなくオプション証券そのものの売買（いわゆる転売や買い戻し）によっても決済することが可能である．すなわち現実のオプション市場において投資家は常に権利行使と権利の売買という2つの決済方法から成る利得を念頭に置いており，特に転売，買い戻しにより利得を得ようとする取引が積極的に行なわれているのが現状である．一例として名証25オプション（1989年12月物）売買高の時間変化を**図1**に示す．これによれば満期日に至るまでのある時期において売買高にピークが存在していることがわかる．一般にオプションの売買高は種々の要因により複雑に変動するが，このような傾向は株式以外の他のオプション市場においてもよく見受けられるものである．

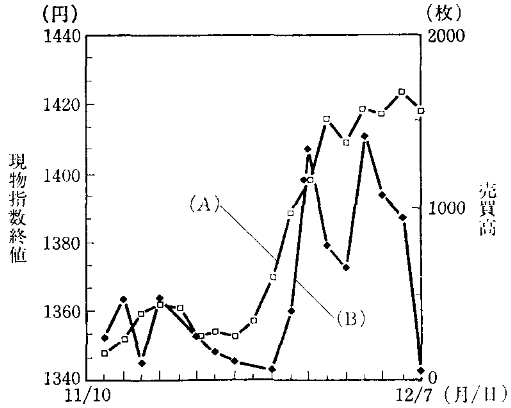


図 1　現物指数終値とコール・オプション売買高の例（名証25オプション，1989年12月物）
(A)現物指数終値　　(B)オプション売買高

オプションの取引高が高くなる時期は権利の売買により利得を得ようとする投資家にとって格好の機会であり当然その時期を知ることは投資戦略上非常に重要である．またオプションの転売による利得を知ることは従来のオプション評価モデルにおいては評価され得なかった付加価値を評価することであり，初期リリース時においてオプションを購入するか否かを決定する上で重要な情報となり得る．このような実状にもかかわらず従来のオプションに関する研究においては売買高の時間推移を取り扱うような数学モデルはほとんど議論されていない．特に注意しなければならないのは市場の完全性と均衡条件の下に構築された従来のオプション評価モデルにおいては転売行為そのものが実現し得ない点である．

こういった点を鑑み本論文ではヨーロピアン・コー

たなか　ひろあき　広島大学工学部第二類（電気系）†
どひ　ただし　広島大学大学院工学研究科†
たかぎ　しげゆき　広島大学大学院工学研究科†
かいお　なおと　広島修道大学商学部管理科学科††
おさき　しゅんじ　広島大学工学部第二類（電気系）†
†　〒724 東広島市西条町下見
††　〒731-31 広島市安佐南区沼田町大塚1717
受　理　平成2年7月16日

ル・オプションを例にとり，その転売問題について考察し現実のオプション市場における売買高の時間推移をオプションのリリース時に推測し得るようなモデルの構築を試みる．

2. オプション価格の指標

現実のオプション市場での取引においては，投資家のさまざまな思惑と駆引きによりオプションの売買価格は複雑に変動するが，解析を進めるにあたってはその価格についてなんらかの指標を定める必要がある．

本論文では，オプションの価格が株価と時刻の確定関数として定まると仮定し，株価の不規則変動の間接的な影響を受けることによりプレミアムが不規則に変動するものと考える．

2.1 株価の不規則変動の確率モデル

時刻 t における株価を $X(t)$ と表わし，この時間変動は次の Itô 型確率微分方程式 [1][4][5] により記述されるものとする．

$$dX(t)=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)X(t)dt+\sigma X(t)dW(t). \quad (1)$$

ここで μ は株式の平均収益率，σ はボラティリティー(volatility) と呼ばれる定数であり，$W(t)$ は1次元標準 Wiener 過程である．式(1)を初期条件 $X(0)=x_0$ のもとで Itô の公式 [4][5] を用いて解けば，

$$X(t)=x_0\exp[\mu t+\sigma W(t)], \quad (2)$$

となるので，初期株価 x_0 が既知のもとでの $X(t)$ の推移確率分布は，次のような対数正規分布となる．

$$F_X(x,t|x_0,0)\equiv\Pr[X(t)\le x|X(0)=x_0]$$
$$=\Phi\left[\frac{\log\frac{x}{x_0}-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right] \qquad (t\ge 0). \quad (3)$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数であり，次式で定義される．

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]dy. \quad (4)$$

また，任意時刻 $t=\tau(0<\tau)$ における株価 $X(\tau)\equiv x_\tau$ が既知であるという条件下での，株価の推移確率分布も同様に

$$F_X(x,t|x_\tau,\tau)\equiv\Pr[X(t)\le x|X(0)=x_\tau]$$
$$=\Phi\left[\frac{\log\frac{x}{x_\tau}-\mu(t-\tau)}{\sigma\sqrt{t-r}}\right] \qquad (t\ge\tau), \quad (5)$$

という対数正規分布となる．

2.2 市場に対するいくつかの仮定

本論文では考察の対象とする市場の“完全性”の仮定を必要としないが，解析を簡単にするために次の3点は仮定できるものとする．

(i)原株やオプションの取引における手数料は不要である．(ii)空売りに対するペナルティーは存在せず，原株の配当は考えない．(iii)市場には無危険資産が存在し，その短期利子率 r は既知の定数である．

また仮定(iii)にもとづき，利得はすべてこの利子率 r による時間価値の推移を考えて評価するものとする．

2.3 オプション価格の指標

時刻 t，株価 x のときの，コール・オプションの売買価格を $C(x,t)$ で表わし，リリース時刻 $t=0$ から満期時刻 $t=T$ に至るまで，この価格で売買されるものとしよう．したがって，オプションのリリース価格は初期株価を x_0 として $C(x_0,0)$ と表わすことができる．時刻 $\tau(0<\tau<T)$ での原株の価格 x_τ が既知のもとでの，満期における株価を $X(T|x_\tau)$ とし，この時刻での株価が既知のもとでの，オプション保有者が満期 $t=T$ において得ることのできる利得を $G_1(x_\tau)$ と表わすと，オプション保有者は，満期において株価が権利行使価格を上回った場合にのみオプションの権利を行使するので，

$$G_1(x_\tau)=\max[X(T|x_\tau)-K,0]-C(x_0,0)e^{rT}, \quad (6)$$

と表わすことができる．ここで，式(6)中の $X(T|x_\tau)$ は，式(5)で与えられる確率分布にしたがう確率変数であるから，$G_1(x_\tau)$ も確率変数となる点に注意しよう．一方，オプション保有者が満期まで待つことなく，この時刻 $t=\tau$ において第三者にオプションを転売したときに得られる利得の満期における価値を $G_2(x_\tau)$ とすると，

$$G_2(x_\tau)=C(x_\tau,\tau)e^{r(T-\tau)}-C(x_0,0)e^{rT}, \quad (7)$$

と表わされることになる．

さて市場における個々の投資家に注目すれば，ある投資家はその行動により利益を上げ，またある投資家は損失を被るであろう．しかし市場全体としては無危険資産による時間価値の推移という点を除けばゼロ・サムの状態が成立していると考えられる．このような状態のもとでは時刻 $t=\tau$ におけるオプションの売却による利得の満期価値 $G_2(x_\tau)$ と満期における利得の期待値が等しくなる，すなわち，

$$E[G_1(x_\tau)]=G_2(x_\tau), \quad (8)$$

が成立することが予想できる．式(8)が成立することを本論文では“中立的”であると呼ぶことにする．確率分布式(5)を用いて，式(8)を具体的に評価し，この結果を $C(x_\tau,\tau)$ について解くことにより，

$$C(x_\tau,\tau)=x_\tau\exp\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)(T-\tau)\right]\Phi(d)$$
$$-Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-\tau})), \quad (9)$$

$$d=\frac{\log\frac{x_\tau}{K}+(\mu+\sigma^2)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}, \qquad (10)$$

を得ることができる.

この関係式は,転売を行なおうとする時刻τを固定する毎に成立するから,結局満期までの任意の時刻において,コール・オプションの“中立的な”売買価格は式(9)で与えられることになる.これは澤木ら[6]の提案するアメリカン・コール・オプションの最適停止問題における合理的価格と一致するという点は興味深い.このことはヨーロピアン・コール・オプションの満期までの転売の可能性がアメリカン・コール・オプションの,満期までの任意時刻における権利行使の可能性と同等の“価値”を有するであろうことを示唆している.さらに市場において,

$$\mu+\frac{1}{2}\sigma^2=r, \qquad (11)$$

の関係が成立するとき式(9)はよく知られた Black and Scholes のオプション評価モデル[1]に帰着されることになる.以下ではプレミアムの売買価格の指標,すなわちオプション市場における売買価格の指標として式(9)を用いて転売問題を考察する.

3. 転売成立条件の定式化

本節では,実際のオプション市場において転売が成立するための条件を数学的に定式化する.

前節で導出したオプション価格は,先に述べた意味で中立的な価格であるから,オプションの保有者全員が一様に中立的な,すなわち期待値にもとづいた判断基準を有しているならば,第三者に転売しようとする者は現われないことになる.このことは転売を受けようとする側(以降買い手と呼ぶ)から見ても同様である.実際,時刻 $t=\tau$ でオプションを購入した買い手の,満期日での利得を $G_3(x_\tau)$ とすると,

$$G_3=\max[X(T|x_\tau)-K,0]-C(x_\tau,\tau)e^{r(T-\tau)}, \qquad (12)$$

となるのでオプション価格の評価式(9)を代入すれば,

$$E[G_3(x_\tau)]=0, \qquad (13)$$

となることは容易に確かめられる.このような数学的背景にもかかわらず現実の市場において実際にオプションが売買取り引きされているのは保有者と買い手がともに全体として中立的でない判断基準にもとづいた投資政策を有しているためであると考えることができる.このことを数学的に表現するために本論文では以下に述べるような下限確率を導入する.

3.1 オプション保有者の判断基準

オプションの保有者は式(6)の $G_1(x_\tau)$ と式(7)の $G_2(x_\tau)$ との比較において後者が前者を下回らない確率がある定数 $p_1(0<p_1<1)$ を上回ったとき,すなわち,

$$\Pr[G_1\leq G_2]\geq p_1, \qquad (14)$$

が成立する場合にのみ,転売を決意すると考える.p_1は,保有者からみて転売により利得が得られる確率の下限値を表わす.満期株価 $X(T|x_\tau)$は式(5)で与えられる確率分布にしたがうので,式(14)は標準正規分布関数を用いて,

$$\Phi\left[\frac{\log\frac{K+e^{r(T-\tau)}C(x_\tau,\tau)}{x_\tau}-\mu(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}\right]\geq p_1, \qquad (15)$$

と表わすことができる.

3.2 買い手側の判断基準

オプションの買い手の利得は,式(12)で与えられる $G_3(x_\tau)$が正となった場合に発生するから,その確率が,ある定数 $p_2(0<p_2<1)$ を上回った場合,すなわち,

$$\Pr[G_3(x_\tau)>0]\geq p_2, \qquad (16)$$

を満足する場合に,オプション証券を買い受けると考える.同様にして式(16)も標準正規分布関数を用いて

$$\Phi\left[\frac{\log\frac{K+e^{r(T-\tau)}C(x_\tau,\tau)}{x_\tau}-\mu(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}\right]\leq 1-p_2, \qquad (17)$$

と表わすことができる.p_2は買い手からみて転売の買い受けにより利得が得られる確率の下限値を表わす.

3.3 転売成立条件

転売が成立するためには売り手,買い手両者の思惑が一致することが必要である.したがって式(15)と式(17)から

$$p_1\leq\Phi\left[\frac{\log\frac{K+e^{r(T-\tau)}C(x_\tau,\tau)}{x_\tau}-\mu(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}\right]\leq 1-p_2, \qquad (18)$$

が成立するとき,売買が成立すると考えることができる.ただし,式(18)が意味を持つのは,$p_1+p_2<1$ が成立している場合であり,もし $p_1+p_2\geq 1$ であるならば,売り手と買い手の思惑が相反することになるため,転売行為は成立し得ないことになる.

3.4 転売成立確率

本節で提案した転売条件式(18)は,転売時刻 $t=\tau$ での株価 x_τ が既知であるならば決定論的なものとなる.しかしながら,初期株価 x_0 だけが既知の場合,x_τ は確率分布 $F_X(x_\tau,\tau|x_0,0)$ にしたがう確率変数であるから,式(18)が成立するか否かは確率的にしか判断し得ない.式(18)を満たす x_τ の領域を D_τ とすると,

$$P_R(\tau)=\int_{D_\tau}dF_X(x,\tau|x_0,0), \qquad (19)$$

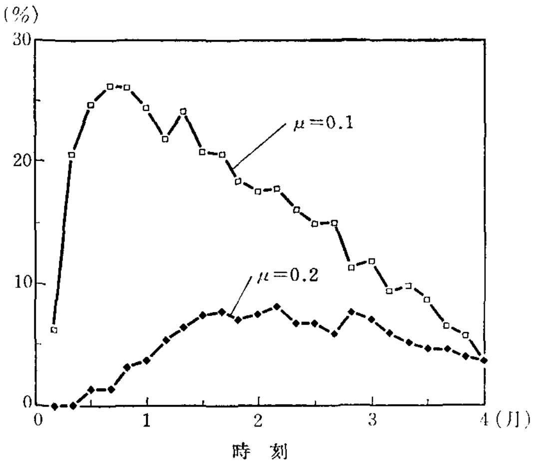


図 2　$\sigma=0.1$(一定)のもとでの転売成立確率の時間推移

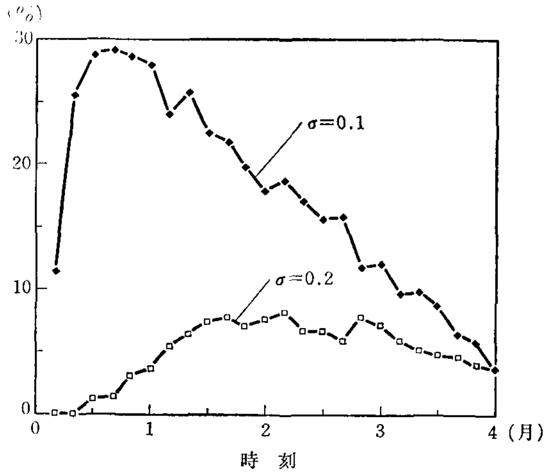


図 3　$\mu=0.2$(一定)のもとでの転売成立確率の時間変化

は初期株価が既知のもとでの，時刻τでの転売成立確率を表わすことになる．

4.　数値例と考察

ここでは満期$T=0.33$[年](＝4カ月)，行使価格$K=40$[ドル]のヨーロピアン・コール・オプションを例に取り，数値計算により転売成立確率の時間推移の考察を行なう．式(19)の積分はモンテ・カルロ法[7]により5[日]間隔で数値評価し，各時刻での発生サンプル数は1000個とする．また初期株価x_0は40[ドル]，利子率rは年利率で0.05であるものとする．

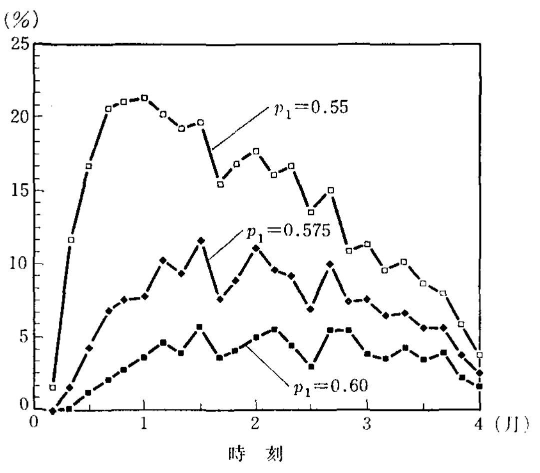


図 4　オプション保有者の姿勢の変化と，転売成立確率の時間推移の関係

図2は$\sigma=0.1$にしたとき，$\mu=0.1$，$\mu=0.2$の2通りについて式(19)で表わされる転売成立確率の時間推移を示したものである．ただし下限確率値は$p_1=60$[%]，$p_2=30$[%]に設定してある．一方**図3**は同じ下限確率値について　$\mu=0.2$ のときの転売成立確率の時間推移を　$\sigma=0.1$，$\sigma=0.2$の2通りについて示したものである．これらの図から転売成立の確率は満期までのある時期においてピークを示すことがわかる．株価の変動を支配するパラメータがおよぼす影響を見てみると，σが同じ値であるならばμが大きい方が，またμが同じ値ならばσが小さい方が転売成立確率は小さくなりピークの位置は満期に近い時刻に移動することがわかる．これは原株の価格の上昇が確実に見込める状況下ではオプションの保有者が売却を決意しにくいためであり，逆に株価の平均的上昇率に比べてそのまわりのばらつきが大きい場合にはリリース直後において原株の収益に大きな期待が持てないので売却を決意しやすいためであると考えることができる．

次に**図4**は$\mu=0.2$，$\sigma=0.1$，$p_2=0.35$のとき，保有者側の下限確率 p_1 のいくつかの値について転売成立確率の時間推移を示したものである．この結果から転売成立確率はp_1の変動にかなり敏感に反応し，p_1が大きくなるほど成立確率は小さくなり，ピークの位置は満期側に移動することがわかる．したがってオプション保有者が慎重な意思決定を行なう場合ほど売買のピークが満期に近い時期に訪れるであろうことがリリース時に推測できる．

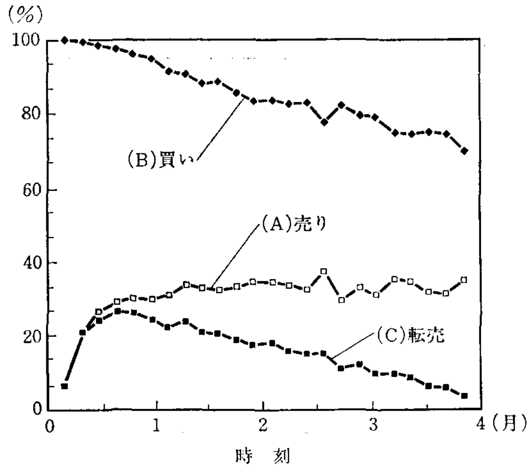


図 5　各条件式の成立確率の時間推移
($\sigma=0.1$,　$\mu=0.1$)

売買成立の可能性が，ある時期にこのようなピークを示す原因を明らかにするために，初期株価が既知のもと$(\mu, \sigma)=(0.1, 0.1)$，$(0.1, 0.2)$での場合について，(A)式(15)の成立確率(売りの確率)，(B)式(17)の成立確率（買いの確率)，および(C)転売成立確率P_R，の3種類の時間推移を図5および図6に示す．ただし，下限確率値は$p_1=60[\%]$，$p_2=30[\%]$としてある．

この結果から，買いの確率はリリース後から満期に向けて次第に低下していくが，売りの確率はσの大きさにより時間推移が定性的に異なってくることがわかる．これらの相乗効果により図5においては転売成立確率がピークを示すが，図6においては満期に向かってほぼ単調に減少していきピークを示さない．したがって成立確率にピークが発生するのは(i)オプションのリリース直後では満期までの時間が長いことから，転売による利得が得られるか否かの不確実性が大きく，オプション保有者の判断基準が成立しにくい，(ii)満期が近づくと先行きの不透明さがかなり浄化され，保有者，買い手共に取引を行なう意味がなくなるため，満期に向かって転売成立確率は減少していく，という2つの性質が，満期までのある時期における売り手と買い手の思惑の間に一種のトレード・オフを発生させるためであると考えられる．

さて図1で示されたように，実際のオプション取引では満期直前付近にピークが発生することが多いが，本モデルにおける結果では予想発生時期がリリース時に近い方に存在することになる．これは現実の市場においては売買高の高まりが売買高自身を高める方向へ働くこと，すなわち一種の正のフィード・バックの機能を有する点

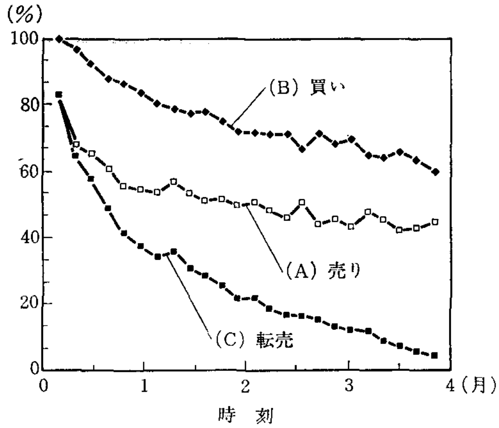


図 6　各条件式の成立確率の時間推移
($\sigma=0.2$,　$\mu=0.1$)

がモデルに取り入れられていないことに起因すると考えられる．

5.　おわりに

本論文ではヨーロピアン・コール・オプションを対象にその売買取引高の時間変化に注目し，これをオプションのリリース時刻において予測するモデルについて考察した．これはオプションの保有者と買い手の思惑の違いを下限確率の導入により数学的にモデル化したものであり，オプションをリリース時に購入した投資家は慎重な意思決定を行ない，逆にオプションをその後に購入しようとする投資家は野心的な意思決定を行なうと考えた場合に売買取引高の時間変化の様子を非常にラフではあるが定性的に予測し得ることを示した．すなわちこれらの思惑の相違の間の一種のトレード・オフにより実際の市場において売買が成立していると考えることができる．

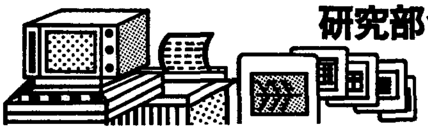
今後の課題としてオプションの売買価格の指標の再検討が挙げられる．本論文で用いたオプション価格の指標は時刻と株価の確定関数であると仮定されており，不規則変動は株価の不規則変動の影響を間接的に受けることにより発生するものである．実際にはオプション価格は市場における売買高の影響を受け，またその時間変動には固有の不規則性が存在するであろうと考えることができる．今後はこのような点を考慮に入れたよりよい価格モデルを検討する必要があろう．

参　考　文　献

[1]　F. Black and M. Scholes : "The Pricing of Option and Corporate Liabilities," *Journal of*

Political Economy, Vol.81, pp.637-654, 1973.
[2] R.C. Merton : "Theory of Rational Otion Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, pp.141-183, 1983.
[3] C.W. Smith : "Option Pricing : A Review," *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp. 3-51, 1976.
[4] 砂原義文編："確率システム理論II，" 朝倉書店，東京，1982.
[5] L. Arnold : "Stochastic Differential Equations:*Theory and Applications*," John, Wiley and Sons, New York, 1974.
[6] 澤木勝茂，田畑吉雄："ファイナンスにおける最適停止問題，" オペレーションズ・リサーチ，Vol.17, No.1, pp.24-29, 1989.
[7] たとえば，R.Y.Rubinstein:"*Simulation and the Monte Calro Method*," John Wiley and Sons, New York, 1981.

研究部会報告



◎最適化とその応用◎

・第5回

日時：平成2年11月27日(火) 14:00～17:00

場所：神戸商科大学 **出席者：**19名

テーマと講師：(1)「ファジイ推論を用いたフレキシブル生産スケジューリング～多様な目的への対応～」鳩野逸生（大阪大学工学部精密工学教室）

多様なスケジューリング目的に対応可能なフレキシブル生産スケジューリングのための知識ベースをファジイ推論を用いて構成する手法について考察した．

(2)「シミュレーションによる定量評価を含んだ物流制御エキスパートシステムとその実プロセスへの応用」高橋哲也（神戸製鋼所電子技術研究所）

エキスパート・システムによる定性的判断とシミュレータによる定量評価を組み合わせることにより，生産現場の物流を最適化するシステムについて議論し，それを製鉄所のビレット精整工程に応用した例が紹介された．

◎確立モデルにおける最適化◎

・第3回

日時：12月8日(土) 14:00～17:00

場所：東京工業大学 本館194号室 **参加者：**23名

テーマと講師：(1)「既存企業との価格競争を考慮した参入企業の施設配置問題について」劉威（東京工業大学）

発表された内容は，1つの既存企業があるときに1参入企業が総利益を最大にするように施設を配置する問題を扱っている．施設配置問題における目的関数ベクトル(α_{ij})—施設を候補地iに置いたときの市場jから得られる利益—を，市場jでの既存企業との価格競争による均衡価格から算出するというゲーム論的アプローチをとっている．

(2)「Game Theory における Implementation Problem について」渡辺隆裕（東京工業大学）

本発表では，社会的選択関数とその戦略的操作不可能性に焦点を絞ってのチュートリアルが行なわれた．内容としては，Gibbard-Satterthwaite の操作不可能性定理に始まり，Condorcet winner に関連した Moulin の定理等の紹介がなされた．

◎経営管理システム◎

・第33回

日時：平成2年12月8日(土) 14:00～17:00

出席者：8名 **場所：**中央区八丁堀 東京都勤労福祉会館

テーマと講師：「日本のこれからの経営管理システム：イノベーション」上田亀之助（上田イノベーション研究所・杉野女子大学）

わずか40年で世界の経済大国に成長した日本の経営管理システムは変転きわまりない世界のボーダレス化・グローバル化・多極化・情報化のなかでそれに積極的に順応してゆく必要があります．それには常にイノベーション（創新・新機軸）を推進してゆかなければなりません．