事例研究

最適クラス編成問題

――東京工業大学におけるケース・スタディー――

今野　浩，朱　喆

1.　問題の背景

東京工業大学では，約1200人の1年生全員が一般教育科目の「総合A」を履修することになっている．これは，人文社会科学系の教官によって運営されているもので，例年12～15クラス分の講義が開講されている．年度のはじめに各クラスの担当教官が授業内容について説明を行なった後，学生は第1，第2，第3志望のクラスを指定する．教務担当教官は，これらの志望にもとづき学生のクラス分けを行なう．各クラスには，あらかじめ決められた定員があり，この枠の中でなるべく学生の満足度が大きくなるようクラス分けしたい，というのがここでの問題である．

この問題を解決するにあたって，従来用いられてきたのは次のような素朴な方法であった．まず各クラスごとに箱を設け，定員分のカードをその箱に入れる．ついで学生を適当な順番に並べて志望を調べる．第1志望のクラスの箱の中にカードが残っている場合は，そのカードを1枚抜き取り学生をそのクラスに（暫定的に）所属させる．第1志望の箱が空になっているときには，第2志望の箱を見て，そのカードが残っていればそのクラスに所属させる．第1，第2志望ともカードがないときは第3志望を見る．このようにして，すべての学生が第3志望までに納まればそれをもって最終クラス分けとする．

一方，このやり方で第3志望までに入り切らない学生が出たとき（例年100人を越える）は，暫定的に所属の決まった学生の中で，まだ定員に余裕のあるクラスを第3志望までに指定している者を探し出し，その学生の所属を変更し，その替わりに当該学生を当てはめる…….

こんの　ひろし　東京工業大学　工学部
ZHE ZHU　同
〒152 目黒区大岡山2丁目1－1
受　理　平成2年7月27日
再受理　平成2年11月9日

この方法は，予想されるとおり大変手間のかかるものであり，2人の教務担当教官が2日程度の猶予時間以内にこの作業を終えることはなかなかの難事であった．その結果，いくつかのクラスの定員を大幅に増やすことによって解決せざるを得なくなり，特定の教官に過大な負担を強いることになった．またこのような処置を行なっても，第3志望に回される学生は，例年全体の1割以上に達した．このため，毎年教官，学生の間に多くの不満が残ることとなったが，その主なものを列挙すると

(a)　大幅な定員増が必要となった場合に，“定員増以外に方法がない”という明確な根拠を示すことができないため，教務担当教官が率先して多くの学生を引き受けざるを得なくなる．

(b)　定員増を要請された教官は，最終的にはそれに応ずることとなるが，その結果，クラスの運営に数々の不都合が生じる．

(c)　第3志望に回される学生数が多くなると，クラス所属変更への要求が多くなり，さらにいくつかのクラスの定員増が必要となる．特にあるクラス（たとえばクラスA）への所属を強く希望していた学生が，第2，第3志望に回された場合，第2志望であったにもかかわらず，クラスAに配属された学生が存在することを知った場合には，この不満はかなり大きなものとなる．

(d)　学生の志望のみを考慮したクラス編成は，場合によってはいくつかの過疎クラス（定員の半数に満たないクラス）を生み出すことになり，教官の間に不公平感を生む．

数年前には900名程度であった学生数はこの数年増加をつづけている．しかし，その一方でクラス定員の総数は，利用可能な教室数等の制約によって頭打ちの傾向にあるため，何らかの対策なしには，遠からず学生の不満が許容限度を越えることが懸念されている．

そこで筆者らは，この問題を抜本的に解決するため，数理計画法によって問題をモデル化し，平成2年度のク

ラス編成に応用した．その結果きわめて望ましいクラス編成が可能となったので，以下それについて報告する．

2. 問題の定式化

一般的にクラスの数を m とし，$a_i(i=1,\cdots,m)$ をクラス i の定員とする．また学生は n 人いるものとして，一連番号 $j(j=1,\cdots,n)$ を振る．

ついで，nm 個の変数

$$(2.1)\quad x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に割り当てるとき}\\ 0, & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に割り当てないとき}\end{cases}$$

を導入する．この時すべての学生 j がどれか1つのクラスに所属するためには，条件：

$$(2.2)\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1,\quad j=1,\cdots,n$$

が成立しなくてはならない．また各クラスが定員を越えないためには，

$$(2.3)\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqq a_i,\quad i=1,\cdots,m$$

となる必要がある．

(2.1)(2.2)(2.3)の3つの条件は「輸送型線形計画問題」の条件式を構成している．ここでもしクラス編成の望ましさを表わす目標関数を x_{ij} の1次式で表現することができれば，その目標関数を最大化する問題は線形計画法によって解くことができる．

［モデル1］

これは昭和60年度に採用したもので，学生の第1志望，第2志望，第3志望をそれぞれ(天下り的に)70点，30点，0点とし，それ以外を-10^8点とする方式である．すなわち，

$$(2.4)\quad p_{ij}=\begin{cases}70 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第1志望としているとき}\\ 30 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第2志望としているとき}\\ 0 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第3志望としているとき}\\ -10^8 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を志望していないとき}\end{cases}$$

とおくのである．するとクラス配属を表わす変数 x_{ij} に対して，学生 j のスコアは $\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}$ と書ける．これを学生全員について加え合わせたもの

$$(2.5)\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}$$

を条件(2.1)～(2.3)の下で最大化するのがモデル1である．この問題を解いて得られる最適解を $x_{ij}^1(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$としよう．この時もし $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}^1$ が負になっていれば，現行クラス定員の枠内では学生を第3志望までに収容することは不可能である．なぜなら，もし第3志望までに収容する組分けが可能であれば，すべての学生のスコア $\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}$ は0以上となり，その結果 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}$ も0以上となるからである．

一方，第3志望以外のクラスに配属される学生が1人でもいるときは，その学生のスコアは -10^8 点となり，残りのすべての学生$(m-1)$人がすべて第1志望に入っても総スコアは負になる．したがって「(2.5)を(2.1)～(2.3)の下で最大化する」ことは，「すべての学生を第3志望までに収容する」，という追加条件のもとで総スコアを最大化するのと一致することがわかるであろう．

ここで第1志望70点，第2志望30点，第3志望0点とする得点配分の根拠を説明しよう．まず第1志望を70点とし第3志望を0点とするのは，評価の原点と尺度をこのように設定したというだけで特に意味はない．本質的なのは，第2志望を第1志望と第3志望の中間点である35点よりやや悪い，と(天下り的に)決めたことである．実は，これは「学生を第2志望に回すことは，第1志望と第3志望の中間よりやや低いところに位置づけられる」という教官側の判断を，筆者らが「主観的に」数値化したものである．

［モデル2］

上記のモデルに対する学生の反応はおおむね好意的であったが，一部の学生の間には，教官中心のモデル化はやや問題であるという批判が散見された．

そこで平成2年度には，以下のような学生中心モデルを作り，2つのモデルの優劣を比較することにした．このモデルでは学生おのおのに100点の持ち点を与え，それぞれ第1～第3志望に好きなように配分させる．学生 j の第1志望クラス f への配点を q_{fj}，第2志望クラス s への配点を q_{sj}，第3志望クラス t への配点を q_{tj} とし

$$(2.6)\quad \begin{aligned}&q_{fj}+q_{sj}+q_{tj}=100\\ &q_{fj}\geqq q_{sj}\geqq q_{tj}\geqq 0\end{aligned}$$

が成り立っているものとする．第3志望までに含まれないクラスについては，モデル1と同様 $q_{ij}=-10^8$ と定義し，p_{ij} のかわりに q_{ij} を用いて

$$(2.7)\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} q_{ij}x_{ij}$$

を条件(2.1)～(2.3)の下で最大化する．

このモデルは，個々の学生の主観的判断を取り込んだものであるから，学生全体にとってはより満足すべきクラス編成が可能になるものと予想される（事実その通り

の結果が得られることは次節で詳しく述べる）．しかし，この方式には，コンピュータへのデータ・インプット量がモデル1に比べて倍増するという欠点がある．すなわち，モデル1では各学生ごとに3つのクラス番号をインプットするだけで済んだが，このモデルでは，さらに3つのデータをインプットしなくてはならないのである．

ちなみに，モデル1では6人の学生が約2時間半ずつ作業を行なうことが必要であったが，モデル2ではデータ入力とその検証のために，筆者の一方がさらに6時間ほど作業することとなった．（熟練した者が行なえば，1人で約8時間程度ですべての作業を終えることができるものと予想される）

3. モデルの一般化とその解法

3.1 定員増を考慮したモデル

モデル1またはモデル2を解いた結果，すべての学生が第3志望までのクラスに納まればクラス編成問題は一件落着である．しかし，クラス定員の設定が窮屈すぎる場合には，目的関数の最大値が負の値をとる可能性がある．この場合，前節で述べた通り，どのように工夫しても第3志望までに入り切れない学生が発生するのである．そこで，このような場合を考慮して，モデルを次のように拡張する．

$$P(t)\quad \begin{cases} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \text{条件} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i + y_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j=1,\cdots,n \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i = t \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \\ & y_i \text{ は非負整数}, \quad i=1,\cdots,m \end{cases}$$

ここで y_i はクラス i の追加定員を表わす変数で，t はその総数を表わす変数である．そこで $P(t)$ を解いた結果，その目的関数の値が正となる最小の t の値を t^* としよう（このような t^* は，プライマル・デュアル法によって求めることができる［3］）．するとこの t^* は，「すべての学生を第3志望までのクラスに配属させることを可能とする最小数の定員増」を表わしている．また，この方法では特定のクラスの定員のみが突出する可能性があるので，これを避けるためには，各クラスの定員増に上限を設けて

$$(3.1)\quad y_i \leqq u_i, \quad i=1,\cdots,m$$

という制約を加えておくことが必要となる．u_i の決め方としては，まず定員 a_i の5％増しとし，それでも解が求まらないときは10％増，15％増と段階的に増やしてゆく方法を採用することとした．

3.2 クラス所属人数の下限条件

すでに述べたとおり，モデル1またはモデル2をそのまま解くと，大幅な定員割れを起こすクラスが発生して教官の間に不公平が生ずる可能性がある．このような現象を防止するには，各クラスの所属人数に下限 $b_i (i=1,\cdots,m)$ を設定してモデルに条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqq b_i, \quad i=1,\cdots,m$$

を追加しておけばよい．このとき問題は

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \text{条件} & b_i \leqq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j=1,\cdots,n \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \end{cases}$$

となる．（c_{ij} は p_{ij} または q_{ij} を表わす）

ここで m 個の変数：

$$x_{in+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i=1,\cdots,m$$

を導入すると(3.2)は

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \text{条件} & \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j=1,\cdots,n \\ & 0 \leqq x_{in+1} \leqq a_i - b_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n+1 \end{cases}$$

と書き改められる．

3.3 モデルの解法

第2節で定式化された問題は，ヒッチコック型の輸送問題と呼ばれるもので，よく知られているとおり「変数 x_{ij} の0−1条件」を「変数 x_{ij} の非負条件」で置き換えた線形計画問題を単体法またはプライマル・デュアル法で解くと，その最適解 $x_{ij}^* (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ はすべて0または1の値を取ることが保証される．

（幸いこの性質は問題 $P(t)$ と(3.3)にも受け継がれて

表 1　クラス定員と志望者数

クラス	定員	第1志望	第2	第3	合計
1	50	75	98	103	276
2	40	112	92	83	287
3	30	27	29	49	105
4	20	12	18	22	52
5	40	46	46	50	142
6	30	23	42	61	126
7	60	130	114	107	351
8	200	98	117	155	370
9	250	71	175	157	403
10	230	457	241	162	860
11	200	33	72	91	196
12	250	119	159	163	441

表 2　学生の志望パターンによる分類

志望パターン	第1志望	第2	第3	学生数
1	100	0	0	405
2	90	10	0	196
3	80	20	0	88
4	80	10	10	37
5	70	30	0	66
6	70	20	10	115
7	60	40	0	30
8	60	30	10	90
9	60	20	20	7
10	50	50	0	37
11	50	40	10	41
12	50	30	20	53
13	40	40	20	17
14	40	30	30	21

表 3　モデル 1 (p_{ij} 70:30:0:)によるクラス分け
(総得点 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}=66470$,
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} q_{ij}x_{ij}=66768$)

クラス	定員	第1	第2	第3	合計	空き定員
1	50	50	0	0	50	0
2	40	40	0	0	40	0
3	30	27	3	0	30	0
4	20	12	8	0	20	0
5	40	40	0	0	40	0
6	30	23	7	0	30	0
7	60	60	0	0	60	0
8	200	98	61	10	169	31
9	250	71	107	22	200	50
10	230	230	0	0	230	0
11	200	33	39	12	84	116
12	250	119	117	14	250	0
合計	1400	803	342	58	1203	197

いる.)

筆者の1人は，昭和60年度のクラス編成にさいして，単体法をベースとする市販ソフトを用いてモデル1を解いた経験をもっている．当時の学生数は約900名，クラス数は13であったが，(問題が退化しているため)データによって計算時間に大きなバラツキがあることが確認された．このため，今回の作業にあたっては，より効率的とされているプライマル・デュアル法を用いてプログラムを作成した．

平成2年度の実施に先立ち，ＳＵＮ Ⅳ／280Ｓ 上で1200名の学生の志望をランダムに発生させて数百ケースのシミュレーションを行なったが，その結果

(1) 定員総数が学生総数より10%以上多く設定されていれば，常に学生を第3志望までのクラスに所属させることが可能である

(2) どのようなデータに対しても計算時間は3分を越えない

ことが明らかになった．

4. 計算結果とその評価

平成2年度の履修希望学生は，総数で1204名，クラス数は12であった．学生には，クラス編成方式の概要を説明した後，第1～第3志望のクラス名とスコア（モデル2の q_{ij})を記入する用紙を配布し，協力を求めた．この結果ほぼ全員から有効な回答を得ることができた．中に第1志望だけしか記入していない学生が1名，q_{ij} の合計点が100点にならない学生が4名含まれていたが，前者はモデルに含めず別途取り扱うこととし，後者は適当な係数をかけて合計点が100点となるようにした．

表1は各クラス定員と第1，第2，第3志望の人数を表わしている．定員がバラついているのは，利用可能な教室数，その収容可能人員等の物理的制約があることに加えて，クラスごとの授業の進め方(ゼミ，演習，講義)や，担当教官構成（単数，複数）に違いがあるためである．定員総数は1400名で，学生総数を約16%上回っている．

表2は，学生の第1～第3志望への配点を10点刻みに14のパターンに分類し，各パターンごとに学生を類別した結果を表わしている．第1志望クラスに割り当てられた得点の平均は79点，第2志望，第3志望の平均得点はそれぞれ15点と6点であった．さて，ここでモデル1を用いて $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij}$ を最大化した結果を見よう(**表3**)．12クラス中で10クラスが定員一杯となっており，大幅定員割れを起こしているのは1クラスのみである．第2志望にまわされた学生は，全部で342人，第3志望は58人となっている．すなわち全体の1/3が第1志望から外れている．このときの目的関数の値は66470点であるが，学生が付与した点数でこのクラス編成の満足度を計算すると，66768点となっている．これを1203で割った学生1人あたりの得点は55.5点である．

表2を参照して，p_{ij} を 70:30:0 とするかわりに 79:15:6の配点で問題を解き直してみたところ，結果は表3とまったく同じものとなった．p_{ij} を 80:20:0 としても 90:10:0 としても結果は表3とまったく同じになった．

表 4 モデル2によるクラス分け

(総得点 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} q_{ij} x_{ij}=72112$)

クラス	定員	第1	第2	第3	合計	空き定員
1	50	46	4	0	50	0
2	40	40	0	0	40	0
3	30	23	5	2	30	0
4	20	11	5	4	20	0
5	40	33	5	2	40	0
6	30	21	4	5	30	0
7	60	60	0	0	60	0
8	200	96	53	33	182	18
9	250	71	77	47	195	55
10	230	228	2	0	230	0
11	200	33	26	19	78	122
12	250	119	84	45	248	2
合計	1400	781	265	157	1203	197

この結果，第1志望への配点が70点以上であれば，モデル1の最適解はほとんど変化しないことが確認された．

一方 p_{ij} を 60:40:0 とすると，表3とは大幅に違う結果が得られた．この場合，第3志望に回される学生は1人もいなくなるが，学生の満足度は，63447点と表3に比べて3000点以上減少する．

表4は学生にスコア q_{ij} を用いて最適化した結果を示している．この場合4つのクラスが定員割れを起こし，第2，第3志望にまわった学生数もそれぞれ265名，157名と表3に比べて多くなっている．しかし，学生の満足度は72112点と表3より5344点多くなっている．平均点でいえば59.9点と4.4点のアップである．全員が第1志望に入った場合の平均満足度が79点であることを考えると，まずまずの結果といえるのではないだろうか．これは，学生の中に第1志望に80点以上を付与した「強い動機づけをもつ」グループ（表2のパターン1，2に対応する学生）と，第1志望が50点未満のいわば「どうでも良い」グループ（表2のパターン10～14）が混在しており，「どうでも良い」グループの学生が第2～第3志望に回されたためと考えられる．ちなみに，第1志望に80点以上を付与した学生は，1人のこらず第1志望に配属される結果となった．一方，第3志望に回された157名中，第3志望への配点が5点以下の者は56名であった．モデル1の結果を見ると，第1志望への配点が90点以上であるにもかかわらず，第2，第3志望に回されるものが少なくなかったのといちじるしい対比をなしている．

表 5 モデル(3.2)によるクラス分け

(定員下限＝定員上限×1/2)

($\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} q_{ij} x_{ij}=71988$)

クラス	定員上限	第1	第2	第3	合計
1	50	46	4	0	50
2	40	40	0	0	40
3	30	23	5	2	30
4	20	11	5	4	20
5	40	33	5	2	40
6	30	21	3	6	30
7	60	60	0	0	60
8	200	97	50	31	178
9	250	71	75	42	188
10	230	228	2	0	230
11	200	33	34	33	100
12	250	119	78	40	237
合計	1400	782	261	160	1203

表4では，第11クラスが半数割れとなっている．そこで「所属人数の下限を定員の50%以上とする」という条件の下で問題(3.2)を解いてみることにした．**表5**はその結果を表わしているが，この場合の総得点は，モデル2（表4）に比べて24点減少したにとどまっている．

（一方，人数の下限を定員の75%とすると，総得点は1300点減少する．）表4と表5のいずれを採用するのが妥当かについては，意見の分かれるところであるが，平成2年度は学生の意見を重視して，表4の結果を採用することとした．われわれはこのクラス編成にある程度の自信を持っていたが，実際，これまでのところはクラス変更を申し出てきた学生は皆無である．例年20名～30名がクラス変更を要求にきていたのと比べて，学生の不満は大幅に緩和されたことがわかる．またすべてのクラスが定員枠内で納まったため，例年になく円滑なクラス運営が可能になったと，教官サイドの評判も上々である．

参 考 文 献

[1] 今野 浩，「線形計画法」，日科技連出版社，1987

[2] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, 1988.

[3] M. Simmonard, *Linear Programming*, Prentice Hall, 1966.