枝被覆問題を用いたスタイナー問題の下界値

矢部　憲一　東京工業大学　大学院総合理工学研究科　システム科学専攻；現所属：東京ガス㈱
（指導教官　小島政和教授）

1.　はじめに

スタイナー問題(Steiner Problem in Graphs，以下ＳＰＧと略）は枝に非負費用が与えられたグラフ上で与えられた点集合（Z-点集合）がすべて連結であるような部分グラフのうち，費用が最小となるものを求めることを目的とする問題で，ＮＰ完全族に属する非常に難しい問題である．ＮＰ完全族に属する問題の正確な解を求めるためにしばしば用いられる手段として分枝限定法がある．分枝限定法を効率よく適用するためには最適解のよい下界値をいかに効率よく求めるかが重要である．

本論文ではＳＰＧの下界値を求めるための新しい手段として枝被覆問題を利用する方法を提案する．さらに，枝被覆問題を解くさいに求められる各枝の被約費用を利用してグラフの縮約を行なうことによって，得られた下界値をさらに強化する下界値強化法を提案した．そしてこれらを組み合わせた下界値強化アルゴリズムを開発し，下界値を求める既存の方法と計算機実験によって比較し，本論文で提案した方法の有効性を確認した．

2.　スタイナー問題について

ＳＰＧはネットワーク通信計画や輸送問題，施設配置問題などを取り扱うさいに非常に重要な役割を果たす問題である．ＳＰＧは特殊な場合として，よく知られた全張木問題や最短路問題を含んでいる．これらの問題に対しては入力サイズの多項式オーダーの計算量で解けるような非常に効率のよい解法が数多く発表されているが，一般のＳＰＧはＮＰ完全族に属する非常に難しい問題であり，正確な解を効率よく求めるアルゴリズムは発見されていない．

ＳＰＧに対して分枝限定法を適用する解法はこれまでに Shore 他 [5]，Beasley [3] らによって研究が進められてきた．

巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem，以下ＴＳＰと略）に対しては緩和問題として割当問題を用いるとかなり強力な下界値が得られることがわかっている [1]．しかし，ＳＰＧに対しては巡回セールスマン問題に対する割当問題ほど効率よく下界値を求める緩和問題はこれまでに発見されていない．また，割当問題を用いて求めたＴＳＰの下界値はグラフ縮約やラグランジュ緩和問題を利用して値をさらに強化できることがこれまでに研究されている [1, 3]．

本論文ではＴＳＰに対するこれらの手法をＳＰＧの下界値に対して応用し，下界値を強化する手法について研究している．

3.　枝被覆問題を利用した下界値

枝被覆問題はグラフ上の枝部分集合のうち，各点に対して少なくとも１本はその部分集合内の枝が接続しているものの中で費用の総和が最小となるものを求める問題である．

枝被覆問題に対しては Murty 他 [4] が蕾アルゴリズムを応用した効率のよい解法を発表している．

ＳＰＧを解くために与えられたグラフGにおいて，Z-点集合以外のすべての点と特殊な人工点とを費用が０の枝で結ぶことによって変形されたグラフをG'とすると，G'上で枝被覆問題を解くことによって得られた最適解はG上でのＳＰＧの最適値の下界値となっている．

4.　下界値の強化

本論文では，分枝限定法を効率よく適用するために，枝被覆問題を利用して得られた下界値をさらに改良する下界値強化アルゴリズムの開発も行なった．このアルゴリズムはＴＳＰに対する割当問題によって得られた下界値に対して Christofides が行なった，ラグランジュ緩和法を利用した下界値強化法 [1, 3] と類似のものである．

枝被覆問題を利用して下界値を求めたさいに，枝被覆

問題を解く Murty のアルゴリズムでは最適の他に各枝に対する被約費用（Reduced Cost）が得られる．この時，人工問題を解くために変形したグラフから人工枝を取り除くと，被約費用が0であるような枝によってグラフはいくつかの連結成分に分かれる．このように分けられた各連結成分を新しく1点とみなし，グラフの縮約を行なう．そのさい，新しく1点となる元の点の集合の中にひとつでもZ-点集合に含まれる点があれば新しくまとめられた点は新しいZ-点集合に含まれる点とする．また，各枝の費用は枝被覆問題を解いた後のそれぞれの被約費用に置き換え，各連結成分同士を結ぶ枝の費用はもとのグラフでそれぞれの連結成分内の点同士を結ぶ枝の被約費用のうち，最小のものの費用とする．

そして，縮約されたグラフ上において再び人工問題を作り，枝被覆問題を解く．そのさいに得られた最適値を初めに得られた下界値に加えてももとのグラフに対するＳＰＧの最適値の下界値となっている．

この縮約—枝被覆問題という手続きをZ-点が1点となるまで繰り返し行ない，そのつど枝被覆問題の最適値として得られた値を下界値に加えてゆく．論文中ではこのようにして得られた値もＳＰＧに対する下界値となることを示した．

5. 計算実験

本論文で提案した枝被覆緩和法に下界値強化法を加えたアルゴリズムの有効性を調べるために，ＳＰＧ下界値を求める既存の2つの方法，すなわち，Shore他［5］の間接列挙法，Beasley［2］のラグランジュ緩和法との比較実験を行なった．実験の点の数に対する枝の数の比率を変え，乱数によってグラフを作成してそれぞれのアルゴリズムによって下界値を求めた．その結果，計算時間の面では Shore 他の方法にかなわないものの，値の面では本論文のアルゴリズムは他のアルゴリズムに比べてよい結果が得られた．この傾向は特に点の数に比べて枝の数が少ないようなグラフ，すなわち疎なグラフにおいて顕著であった．たとえば点の数が100，枝の数が495のグラフに対して発見的解法［6］による近似解の値に対する下界値の比率を比較すると，10問解いた平均値がShore他の間接列挙法では53.6％であるのに対し本論文のアルゴリズムでは73.3％というよい値を得ることができた．

6. まとめ

本論文ではＳＰＧの下界値を求める新しい方法として枝被覆問題を利用する方法を提案した．また，得られた下界値をグラフ縮約を利用して強化する下界値強化法と組み合せ，ＳＰＧの下界値を求める新しいアルゴリズムを提案した．そして計算実験の結果，本論文で提案したアルゴリズムがＳＰＧに対するかなりよい下界値を求めることができることがわかった．

参考文献

［1］ E. Balas and N. Christofides. A restricted Lagrangean approach to the traveling salesman problem. *Mathematical Programming*, Vol. 21, pp. 19-46, 1981.

［2］ J. E. Beasley, An algorithm for Steiner problem in graphs. *Networks*, Vol. 14, pp. 147-159, 1984.

［3］ N. Christofides. Bounds for the travelling-salesman problem. *Operations Research*, Vol. 20, pp. 1044-1055, 1972.

［4］ K. G. Murty and C. Perin, A 1-matching blossom-type algorithm for edge covering problems. *Networks*, Vol. 12, pp. 379-391, 1982.

［5］ M. L. Shore, L. R. Foulds, and P. B. Gibbons, An algorithm for the Steiner problem in graphs, *Networks*, Vol. 12, pp. 323-333, 1982.

［6］ H. Takahashi and A. Matsuyama. An approximate solution for the Steiner problem. *Math. Japonica*, Vol. 6. pp. 573-577, 1980.

［7］ P. Winter. Steiner problem in networks: A survey. *Networks*, Vol. 17, pp. 129-167, 1987.

会員訃報

川野　幸三郎氏

（元学会庶務理事，監事
現ＯＲ誌編集委員，評議員）

平成2年12月9日心不全のため逝去されました．享年61才，謹んでご冥福をお祈りします．