連載講座

ファイナンス理論の概要

——条件付証券の価格理論——

Huang Chi-fu*, 浦谷　規†

1.　はじめに

条件付証券（その支払が他の証券の価格を条件とする証券）の解明はファイナンス理論の最近20年間の最も重要な成果であろう．オプション価格を主題とするBlack and Scholes(1973)および Merton(1973)が，その基本的論文であり，さらに Cox and Ross(1976)のアイデアに始まり Harrison and Kreps(1979) の定式化により条件付証券の一般理論が可能となった．

条件付証券の一般理論はきわめて理論的ではあるが，Financial Engineering には特に意義がある．しかし実務家には，この難解な理論の詳細よりも，条件付証券の価格決定のための条件チェックと機械的な計算手順が重要であろう．この価格決定の手続きの副産物として，条件付証券の支払を「複製」する動的取引戦略もまた明らかにする．

今回は一般理論の展開ではなく，その背後にあるアイデアを紹介しよう．そのために Samuelson(1965) および Black and Scholes(1973) によるモデル（幾何ブラウン運動で危険証券の価格を表わし，安全利子率は一定）を用いる．そこで支払が危険証券と安全証券の動的な取引戦略で“複製”できるときに，危険証券の価条件付証券の価値は決定することを示そう．特に，危険証券に対するヨーロッパ型コールオプションの価値を計算すると，ブラック・ショールズのオプション式が導出される．またコールオプションの「複製」取引戦略をいかに見つけるかも示す．

今回は以下のとおりの構成となる．第２節はモデルの定式化および必要な定義を示す．第３節では条件付証券の価格が定義できるための条件を，マルチンゲールの方法によって示す．第４節では Black-Scholes のオプション式を示し，その価格決定のメカニズムを示す．第５節にはより一般的な条件付証券の価格決定への応用を示し最後に結論をまとめる．

2.　モデルの定式化

１つの危険証券と１つの安全証券がある証券市場において，危険証券の価格に依存し，支払が時刻Tだけにある条件付証券を考えてみよう．時間$[0,T]$において，危険証券は配当をせず，その価格プロセス $S=\{S(t);t\in[0,T]\}$ が次の幾何ブラウン運動にしたがうとしよう．

$$S(t)=\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma w(t)\right\},\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

ただし $w=\{w(t);\in[0,T]\}$ は確率Pの下での標準ブラウン運動．伊藤の補題を用いると(1)は微分の形で示せる[1)]．

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dw(t)$$
$$t\in[0,T],\quad S(0)=1.\tag{2}$$

したがって，μ,σ はそれぞれ危険証券の瞬時の収益率の期待値および標準偏差である．安全証券の時刻 t の価格は，次のとおりとする．

$$B(t)=\exp\{rt\}\quad t\in[0,T].$$

また同様に微分で表わそう．

$$dB(t)=rB(t)dt\quad t\in[0,T],\ B(0)=1.$$

安全証券は一定の瞬時の利子率 r の預金と考えてよい．時刻 t の１円の安全証券への投資は，時刻 s には $\exp\{r(s-t)\}$ 円の価値になっている．これらの２証券は時間 $[0,T]$ で常に取引可能なので，今後**永続証券**(Long-Lived Securities)と呼ぶ．

$\alpha(t)$ および $\theta(t)$ をそれぞれ安全証券と危険証券の時刻 t の保有数としよう．$\alpha(t)$ および $\theta(t)$ の情報に関す

* マサチューセッツ工科大学
† うらたに　ただし　静岡県立大学　経営情報学部
〒422 静岡市谷田395

1) 伊藤の補題，ブラウン運動を含む積分，すなわち伊藤積分等は，たとえば Liptser and Shiryayev(1977, 第４章）を参考．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

る制約は，Sの時刻0からTまで実現値に依存することである．取引戦略が**自己充足的**(Self-Financing)であるとは，任意の$t\in[0,T]$に対して

$$\alpha(t)B(t)+\theta(t)S(t)=\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)+\int_0^t\alpha(s)dB(s)+\int_0^t\theta(s)dS(s)\quad P-a.s. \tag{3}$$

が成り立つことである[2)]．すなわちこの戦略では，時刻tのポートフォリオの価値は初期の投資費用に期間中の累積キャピタルゲイン(ロス)を加えたものに等しい．初期投資後，いかなる追加投資も資金回収もないことが，この戦略の名前の由来である．

条件付証券を確率変数xで表わそう．ただしxは時刻Tに受けとる条件付証券の支払であるとする．条件付証券$x\in L^2(P)$が[3)]**市場的**(marketed)であるとは，$x=\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)\quad P-a.s.$となる自己充足的な取引戦略$(\alpha,\theta)$が存在することである．また，$x$は$(\alpha,\theta)$によって**ファイナンスされる**ともいう．すなわち，xに時刻Tで確率1で等しくなる自己充足的戦略があれば，条件付証券は市場的である．したがってxは2つ永続証券の動的取引によって「複製」可能である．もしある条件付証券が異なる2つの自己充足戦略が存在するなら，裁定取引がない場合には2つの戦略の初期投資は等しくならねばならない．このとき任意の時刻の条件付証券の価格は定義でき，複製ポートフォリオの価値に等しくなる．

3. 裁定取引機会と動的完備市場

いかなる条件付証券が市場的であるかを決め，さらにその"適正な"価格はいかに決定されるかを考えてみよう．このためにはまず，われわれのモデルが適正であること，「無から有を生じない」，すなわち裁定取引機会が存在しない条件が必要である．この時に市場的条件付証券は定義可能な価格をもつ．

裁定取引機会とは，条件付証券$x\in L^2(P)$が自己充足的戦略(α,θ)でファイナンスされて，$x\geq 0$ P-a.s. かつ$x\neq 0$，しかも$\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)\leq 0$である．すなわち，裁定取引機会は正の支払を受けるのに零かまたは負の初期投資しか必要としない自己充足的戦略が存在することである．もしも裁定取引機会が存在すれば，投資家はその戦略に無限につぎ込むから，市場は清算されずいかなる経済的均衡もありえない．したがって裁定取引機会が存在するときには条件付証券の価格は定義できなくなる．

離散モデルにおいては，確率測度Pと同じ確率0の集合をもつQの存在と，正規化した価格プロセス$S^*=\{S^*(t)=S(t)/B(t)\,;t\in[0,T]\}$が$Q$の下でマルチンゲールになることは裁定取引機会が存在しないことの必要十分条件である．Huang and Litzenberger(1988, 8章)および本連載の第1回4節を参照されたい．2つの確率測度が同じ確率0となる集合をもつ時，**同値確率**と呼ぶ．したがってQは同値マルチンゲール測度である[4)]．

連続時間モデルでも，同値マルチンゲール測度の存在は裁定取引機会がないことの必要条件である．以下に現在のモデルで，この必要条件を構成的に示してみよう．

3.1 裁定取引機会がないことの必要条件

$\eta(t)$を次のとおりに定義すると，$w(t)$が正規分布であるから$\eta(t)$は対数正規分布となる．

$$\eta(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2t-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)w(t)\right\}$$
$$t\in[0,T].$$

$E[\eta(t)]=1$，$t\in[0,T]$が成立することは容易に証明できるので，確率測度Qを次式のように定義する．

$$Q(A)=\int_A\eta(\omega,T)P(d\omega)$$

ただし時間$[0,T]$におけるSの経過によって決まるすべての事象Aのすべてに対して成り立ち，ωはその1つの実現を表わす．

Qが同値マルチンゲール測度であることを示そう．第1に$\eta(T)$は対数正規分布なので，Pで確率1で正である．したがってQはPと同値である．PとQは同じ確率0の集合をもつので，いずれの確率測度でも単純にa.s.と記せる．

まず，有名なGirsanovの定理を紹介しよう．

定理1 (Girsanov)

$\int_0^T|\beta(t)|^2dt<\infty$ P-a.s. を満たすあるβに対して

$$\zeta(T)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\beta^2(s)ds+\int_0^T\beta(s)dw(s)\right\}$$

および$E[\zeta(T)]=1$と仮定すると，次のプロセス

$$\hat{w}(t)=w(t)-\int_0^t\beta(s)dw(s)\quad t\in[0,T] \tag{4}$$

---

2) もしある命題がPに関して確率1で成り立つなら，命題はPでほぼ確実に(P-almost surely)成り立つ．単純にP-a.s.と記す．

3) 技術的理由から2次のモーメントが有限なxの条件付証券に限定する．すなわち$E[x^2]<\infty$，$E[\cdot]$はPの下での期待値を表わす．この条件付証券の空間を$L^2(P)$と記す．

4) 第1回4節では単にマルチンゲールとしたが，その構成から実際は"同値"マルチンゲールである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

は次の確率の下で標準ブラウン運動となる．

$$\hat{Q}(A)=\int_A \zeta(\omega,T)P(d\omega)$$

ただし時間$[0,T]$のSの経過によって決まるすべて事象Aに対して定義される．証明は，たとえば Liptser and Shiryayev(1977, 6.3) を参照．

Girsanov 定理からQの下で次の$w^*(t)$は標準ブラウン運動であることがわかる．

$$w^*(t)\equiv w(t)+\frac{\mu-r}{\sigma}t,\quad t\in[0,T] \tag{5}$$

さて伊藤の補題から次の関係が導かれる．

$$\begin{aligned}dS^*(t)&=d(S(t)/B(t))\\&=(\mu-r)S^*(t)dt+\sigma S^*(t)dw(t)\\&=(\mu-r)S^*(t)dt+\sigma S^*(t)\\&\quad\left(dw^*(t)-\int\frac{\mu-r}{\sigma}dt\right)\\&=\sigma S^*(t)dw^*(t).\end{aligned} \tag{6}$$

したがって次の関係が同値に成り立つ．

$$S^*(s)=S^*(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(s-t)+\sigma(w^*(s)-w^*(t))\right\},\quad s\geq t. \tag{7}$$

Qの下で時刻tの条件付期待値をとると

$$E^*[S^*(s)|\mathscr{F}_t]=S^*(t)\quad Q-\text{a.s.},$$

ただし$\mathscr{F}_t$は危険証券の時間$[0,T]$の価格によって明らかとなる情報，$E^*[\cdot|\mathscr{F}_t]$はQの下での$\mathscr{F}_t$の条件付期待値オペレータである．この関係からS^*がQの下にマルチンゲールになっており，Qが同値マルチンゲール測度であることがわかる．またブラウン運動が1次元で危険証券が1つであるからQが実は唯一の同値マルチンゲール測度であることも数学的に示せる．

また(2)と(5)から，次式が得られる．

$$dS(t)=rS(t)dt+\sigma S(t)dw^*(t),\ t\in[0,T],\quad S(0)=1. \tag{8}$$

すなわち，同値マルチンゲール測度Qの下では，危険証券の瞬時の期待収益率は安全利子率に等しい．このためには，Qは**リスク中立確率**(Risk neutral probability)とも呼ばれる．リスク中立の世界では，すべての投資家が均衡においてリスクに無関心であり，すべての証券は安全証券と同一の収益率にならねばならない．

3.2 裁定取引機会がないことの十分条件

困ったことに，(3)式の伊藤積分が定義できるだけの制約では裁定取引機会が存在する．Harrison and Kreps (1979)が示したように，たとえばルーレットで常に掛金を倍にする戦略には，裁定取引機会が存在する．取引戦略の制限によってこの問題は排除されるが，詳細は Dybvig and Huang(1989)および Pagès(1989)を参考にされたい．その結論は，自己充足的取引戦略(α,θ)が次の関係を満たすことにある．この空間を$H^2(P)$と記す．

$$E\left[\int_0^T|\theta(t)S(t)|^2dt\right]<\infty.$$

さて，$H^2(P)$上の戦略では市場的条件付証券がマルチンゲールになることを見てみよう．

もし$x\in L^2(P)$が自己充足的戦略(α,θ)でファイナンスされるなら，安全証券で表わしたこのポートフォリオの価値は$\alpha(t)+\theta(t)S^*(t)$であり，伊藤の補題を用いると次のとおりに表わせる．

$$\alpha(t)+\theta(t)S^*(t)=\alpha(0)+\theta(0)S^*(0)+\int_0^t\theta(s)dS^*(s). \tag{9}$$

Pagès(1989)はもし$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$であれば，(9)の右辺の伊藤積分が$Q$の下でマルチンゲールになることを示した．したがって両辺のQの下での期待値をとると

$$E^*[\alpha(t)+\theta(t)S^*(t)]=\alpha(0)+\theta(0)S^*(0). \tag{10}$$

となる．この式が本論文の第1の主要な結果である．Qの下での期待値は，将来の任意の時刻における，不確実な支払の時刻0での価値を安全証券で表わす“現在価値オペレータ”である．特に$\alpha(T)+\theta(T)S^*(T)=xe^{-rT}$だから，(10)は

$$E^*[xe^{-rT}]=\alpha(0)+\theta(0)S^*(0).$$

を意味する．すなわち，市場的である条件付証券の時刻0の価値は安全証券の単位で表わすと，時刻tのその支払のQの下での期待値に等しい．

同様な論議によって次式も成り立つ．

$$\alpha(t)+\theta(t)S^*(t)=E^*[xe^{-rT}|\mathscr{F}_t]. \tag{11}$$

すなわち，市場的である条件付証券の時刻tの価値は，安全証券の単位でみると，同値マルチンゲール測度の下ではマルチンゲールになる．

以上の準備のもとに，$H^2(P)$はいかなる裁定取引機会も含まないことを示そう．いま裁定取引機会の存在を仮定すると，

$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$に対して$\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)\leq 0$および$\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)\geq 0$ a.s. かつ$\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T)\neq 0$が成り立つ．(10)より

$$\alpha(0)B(0)+\theta(0)S(0)=B(0)E^*[\alpha(T)+\theta(T)S^*(T)].$$

である．また仮定より$\alpha(T)+\theta(T)S^*(T)=(\alpha(T)B(T)+\theta(T)S(T))e^{-rT}$は正で$P$および$Q$に関して零でないので，上式の右辺は厳密に正である．これは仮定の左辺が零か負であることと矛盾する．したがって裁定取引機

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

会は存在しない．

今までテーマは，裁定取引機会が存在しない点においてのわれわれのモデルの適正さの証明にあった．しかしながら，特に注目すべき点は，安全証券の単位で測ると，危険証券の価格ばかりでなく，市場的な条件付証券の価格も，Qの下でマルチンゲールになることである．

以上のマルチンゲールの方法は，もし複製戦略を構成してはじめて条件付証券が市場的であると判定できるなら，一見するとあまり実用的には見えない．また複製戦略がわかってはじめて条件付証券の価格もわかるので，その計算にも役立たなく見える．

3.3 動的完備市場

しかし次に，$L^2(P)$の**すべての**条件付証券が市場的であるかは複製戦略を個々に構成することなしに判定できることを示す．これによりマルチンゲールの方法はきわめて有用になり，個々の条件付証券の各時点の価格が，条件付期待値の単なる計算によって可能となる．また，条件付証券の価格の計算法は同時に複製戦略も構成することを，後の例で確かめられる．

定理2

すべての $x\in L^2(P)$ に対して

$$E\left[\int_0^T|\theta(t)S(t)|^2dt\right]<\infty$$

となるあるプロセスθが存在し，すべてのtに対して

$$E^*[xe^{-rT}|\mathscr{F}_t]=E^*[xe^{-rT}]+\int_0^t\theta(s)dS^*(s), \tag{12}$$

が成り立つ．

証明は Kunita and Watanabe(1965) のマルチンゲール表現定理を用いてPagès(1989)によってなされた．すべての $x\in L^2(P)$に対して，(12)の左辺はQの下でマルチンゲールである．そこで定理は2次のモーメントをもつ任意マルチンゲールが伊藤積分で表現できることを述べている．

さて(8)と(9)から，もし $x\in L^2(P)$が$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$ によってファイナンスされるなら，(12)が成り立つ一方，定理2から(12)はすべての $x\in L^2(P)$に対して成り立つことがわかる．そこで，$H^2(P)$にある(12)を満たす $\theta(t)$ と同時にαを見つけたなら，すべての $x\in L^2(P)$はある$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$によってファイナンスされることがわかる．これは次式によって可能となる．

$$\alpha(t)=E^*[xe^{-rT}|\mathscr{F}_t]-\theta(t)S^*(t), \tag{13}$$

以上が次の定理にまとめられる．

定理3

任意の $x\in L^2(P)$はある$(\alpha,\theta)\in H^2(P)$によってファイナンスされる．

すべて $L^2(P)$上のの条件付証券は市場的である，すなわちすべての条件付証券は2つの永続証券の動的な取引で複製することが可能であるからこの市場は動的に完備であるという．

4. Black-Scholes オプション価格式

ここでは，第3節に展開したモデルの応用を示そう．特に，満期が時刻Tで行使価格がKの危険証券に対するヨーロッパ型コールオプションの各時点の価格を計算する．コールオプションとは，時刻Tに価格Kで危険証券を1単位買う権利をその所有者に与える契約である．このオプシションの満期では，$S(T)\geq K$ の時だけ買う権利を行使する．したがって時刻Tでのこの契約の支払は

$$\max[S(T)-K,0].$$

第3節より，このコールオプションは市場的であり，その価格$C(t)$は(11)より

$$C(t)\equiv e^{rt}E^*[\max[S(T)-K,0]e^{-rT}|\mathscr{F}_t]$$
$$=e^{rt}E^*[\max[S^*(T)-Ke^{-rT},0]|\mathscr{F}_t].$$

ブラウン運動は独立な増分をもつので，$\mathscr{F}_t$の条件下で $S^*(T)$ の分布は $S^*(t)$ だけに依存する．Qの下では $S^*(T)$ は $S^*(t)$を条件とする対数正規分布であることの(7)を思い出せば，条件付期待値が次のとおり求められる．

$$C(t)=S(t)N(d)-Ke^{-r(T-t)}N(d-\sigma\sqrt{T-t}), \tag{14}$$

ただし

$$d=\frac{\ln(S(t)/K)+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$N(\cdot)$ は標準正規確率変数の分布関数．(14)が Black and Scholes(1973)によるオプション価格式である．

モデルのパラメータσ，r，およびT以外にも，オプション価格は危険証券価格 $S(t)$，行使価格K，および時間tの関数である．しかしμには依存しない[5]．記号の簡略化としてオプション価格を

$$C(t)=C(S(t),t).$$

と記す．

次にコールオプションを複製する取引戦略を$C(S(t),t)$から微分によって実際に作ることができる．このために$C(t)e^{-rt}$のマルチンゲール性を用いる．$C(S(t),t)$は

5) μがオプション価格に依存しない理由は，Huang (1989) を参照．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$S(t)$ に関して2回微分可能で，t に関して微分可能であるとすると伊藤の補題と(8)より

$$d(C(S(t),t)e^{-rt})$$

$$=\Big[\overbrace{\frac{1}{2}e^{-rt}C_{SS}(S(t),t)S^2(t)\sigma^2+re^{-rt}C_S(S(t),t)S(t)-re^{-rt}C(S(t),t)+e^{-rt}C_t(S(t),t)}^{\text{time trend}}\Big]dt$$

$$+e^{-rt}C_S(S(t),t)S(t)\sigma dw^*(t),$$

ただし添字は偏微分を表わす．$C(S(t),t)e^{-rt}$ はQの下でマルチンゲールだから，時間的傾向はない．したがって

$$0=e^{-rt}\Big(\frac{1}{2}C_{SS}(S(t),t)S^2(t)\sigma^2+rC_S(S(t),t)S(t)-rC(S(t),t)+C_t(S(t),t)\Big), \tag{15}$$

がすべての$S(t)$および$t<T$ に対して成り立つ．この方程式はあとまわしにして，(15)は次式を意味する．

$$C(S(t),t)e^{-rt}=C(S(0),0)+\int_0^t e^{-rs}C_S(S(s),s)S(s)\sigma dw^*(s)$$

$$=C(S(0),0)+\int_0^t C_S(S(s),s)dS^*(s)\quad \text{a.s. } t\in[0,T).$$

この式を(12)と比較すると．$\theta(t)\equiv C_S(S(t),t)$とし，時刻$T$では

$$\theta(T)=\begin{cases}1 & \text{if } S(T)\geq K;\\ 0 & \text{if } S(T)<K\end{cases}$$

とおける．直接計算すると$C_S(S(t),t)=N(d)$となるので，(13)より $\alpha(t)$ は次のとおりに定義できる．

$$\alpha(t)=(C(S(t),t)-\theta(t)S(t))e^{-rt}$$

$$=-Ke^{-rT}N(d-\sigma\sqrt{T-t})\quad \forall t\in[0,T].$$

$\theta(t)\leq 1$ なので明らかに $(\alpha,\theta)\in H^2(P)$ であり，ヨーロッパ型コールオプションをファイナンスする．(14)の Black-Scholes の式とこの計算によるコールオプションの複製ポートフォリオの価値が等しいことが次のとおり確認される，

$$\alpha(t)B(t)+\theta(t)S(t)$$

$$=-Ke^{-r(T-t)}N(d-\sigma\sqrt{T-t})+S(t)N(d).$$

この式はコールオプションが借金をして危険証券を保有(レベレッジ)しており，その借金の比率は常に変化することを示している．

最後に(15)はすべての$S(t)$および $t\in[0,T]$に対して成り立つので，$C(\cdot,\cdot)$ は次の2階の線形偏微分方程式を満たす．

$$\frac{1}{2}C_{xx}(x,t)x^2\sigma^2+rxC_x(x,t)-rC(x,t)+C_t(x,t)=0 \tag{16}$$

ただし $x\in(0,\infty)$，$t\in[0,T)$，境界条件は

$$\lim_{t\uparrow T}C(x,t)=\max[x-K,0],$$

$$\lim_{x\downarrow 0}C(x,t)=0\quad \forall t\in[0,T).$$

(16)の微分方程式の導出には，$C(t)$が $S(t)$ と t に関して滑らかであり，$C(t)e^{-rt}$ がQの下でマルチンゲールであることだけが使われた．したがってこの式はもっと一般的に成り立つ．すなわち，条件付証券の時刻tの価格が $S(t)$ およびtに関して滑らかな関数であれば，この条件付証券の価格汎関数は，伊藤の補題とマルチンゲールによって(16)を満足する．相異点は境界条件だけであり，条件付証券の契約にしたがい決定される．

たとえば時刻Tに価格Kで危険証券を売る権利のオプション（ヨーロッパ型プット）を考えよう．時刻Tの支払いは $\max[K-S(T),0]$ であるから，このプットオプションの時刻 t での価格 $p(t)$ は，次のとおりとなる．

$$p(t)=E^*[\max[K-S(T),0]e^{-r(T-t)}|\mathscr{F}_t]$$

$$=Ke^{-r(T-t)}N(\hat{d})-SN(\hat{d}-\sigma\sqrt{T-t}),$$

ただし，

$$\hat{d}=\frac{\ln(K/S(t))-r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

$p(t)$ は $S(t)$ および t の滑らかな関数であるから，$p(S(t),t)$は(16)を満たし，境界条件は次のとおりである．

$$\lim_{t\uparrow T}p(x,t)=\max[K-x,0],$$

$$\lim_{x\uparrow\infty}p(x,t)=0\quad \forall t\in[0,T).$$

このプットの複製戦略も，$\theta(t)=p_S(S(t),t)$とおき，(13)によって決まる $\alpha(t)$ で決定される．また(16)の微分方程式を使わずに解が得られた．しかし次の例では(11)の条件付期待値が解析的に評価できないので微分方程式が役立つ．この時には条件付証券価格の微分方程式は数値積分によって解かれる．

時刻Tでたとえば $[\sin(S(T))]^3$ の支払をする条件付証券を考えてみよう．この条件付期待値は

$$E^*[e^{-r(T-t)}[\sin S(T)]^3|\mathscr{F}_t]$$

であり，解析的には評価できないが $S(t)$ と t だけの関数である．支払いが $S(T)$ の滑らかな関数であると，条件付期待値も $S(t)$ と t の滑らかな関数であることが証明できる．これを $g(S(t),t)$とすると，gは(16)の偏微分方程式を満たし，境界条件は $\lim_{t\uparrow T}g(x,t)=(\sin x)^3$ と $\lim_{x\downarrow 0}g(x,t)=0$ である．gは数値積分によって求められるが，本文では省略する．

いずれにしても，関数gが得られると，複製戦略はg のSに関する導関数 $g_S(S(t),t)$ を $\theta(t)$ とし，(13)による

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

αから容易に構成できる．

5. 一般的な応用

第4節では，$S(T)$の関数で時刻Tでの支払が与えられた条件付証券の複製戦略の構成法と，その微分方程式の有用性を述べた．この節では，この方法を危険証券価格の全履歴に依存して支払が時刻Tにある条件付証券に一般化しよう．

その例として，一定の手数料Kで危険証券の過去の価格の指数加重平均を受け取る権利をその所有者に与える条件付証券を考えよう．指数加重平均を，

$$z(T)=\beta\int_0^T e^{-\beta(T-t)}S(t)dt$$

とすると，この条件付証券の時刻Tの支払は

$$\max[z(T)-K,0]$$

である．したがって条件付証券の時刻tの価値は機械的に

$$E^*[\max[z(T)-K,0]e^{-r(T-t)}|\mathscr{F}_t], \tag{17}$$

と書ける．条件付期待値の確率分布は，危険証券の期待収益率が安全利子率に等しい"リスク中立確率"である．

ここでは(16)と少し異なる微分方程式を解くことによってこの条件付期待値が計算できることを示そう．

$$z(t)=\beta\int_0^t e^{-\beta(t-s)}S(s)ds\ ;$$

とすると，その微分形では

$$dz(t)=\beta(S(t)-z(t))dt,\ z(0)=0$$

と表わせ，$s>t$とすると

$$z(s)=z(t)e^{-\beta(s-t)}+\beta\int_t^s e^{-\beta(s-\tau)}S(\tau)d\tau$$

$z(t)$がわかっているとき，$z(s)$の分布は時刻tからsまでのSに依存するが，Sはマルコフ性から$S(t)$だけに依存する．したがって，(17)は$S(t)$，$z(t)$およびtの関数として書ける．この関数を$h(S(t),\ z(t),t)$とすると，hは各変数に対して滑らかであることが示せる．

次に$h(S(t),\ z(t),t)e^{-rt}$に対して伊藤の補題を用いると，

$$\begin{aligned}
&d(h(S(t),z(t),t)e^{-rt})\\
&=\Big[\frac{1}{2}e^{-rt}h_{SS}(S(t),z(t),t)S^2(t)\sigma^2+re^{-rt}h_S\\
&\quad(S(t),z(t),t)S(t)+e^{-rt}h_z(S(t),z(t),t)\\
&\quad\beta(S(t)-z(t))-re^{-rt}h(S(t),z(t),t)+e^{-rt}h_t\\
&\quad(S(t),z(t),t)\Big]dt\\
&\quad+e^{-rt}h_S(S(t),z(t),t)S(t)\sigma dw^*(t).
\end{aligned}$$

$h(S(t),z(t),t)e^{-rt}$はQの下でマルチンゲールなので，時間的傾向はありえないので，第2項から任意のSとzに対して次式が得られる．これはhが満たすべき2階の線形偏微分方程式である

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{1}h_{SS}(S,z,t)S^2\sigma^2+rh_S(S,z,t)S+h_z(S,z,t)\\
&\beta(S-z)-rh(S,z,t)+h_t(S,z,t)=0
\end{aligned}\tag{18}$$

境界条件は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\uparrow T}h(S,z,t)=\max[z-K,0],\\
&\lim_{S\downarrow 0}h(S,z,t)=\max[ze^{-\beta(T-t)}-K,0]e^{-r(T-t)}\\
&\quad\forall t\in[0,T).
\end{aligned}$$

そこで複製戦略は機械的に構成できる．$\theta(t)=h_S(S(t),z(t),t)$とし，$\alpha(t)$を(13)から求める．複製戦略は$S(t)$と$t$ばかりでなくて$z(t)$にも依存する．

また前節に示した方法は，一般的な市場経済に適用できる．すなわち，価格が一般伊藤過程にしたがう任意の数の危険証券があり安全利子率がランダム過程の場合である．1次独立な危険証券の数が，価格プロセスの独立なブラウン運動の数と等しい限り，ある条件の下で唯一の同値マルチンゲール測度が存在し，$L^2(P)$のすべての条件付証券は市場的である．このマルチンゲール測度がまた「リスク中立確率」であり，その確率の下ですべての危険証券は安全資産利子率と等しい期待収益率をもつ．((8)と比較せよ)

いま$E^*[\cdot|\mathscr{F}_t]$を時刻tの条件付期待値オペレータとすると支払xの条件付証券の時刻tの価格は

$$E^*\Big[xe^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathscr{F}_t\Big]$$

である．この条件付期待値は，その解析的解が得られない時，以下の方法で計算可能である．変数に関して滑らかな関数である時には，マルチンゲールの方法によって偏微分方程式が導かれる．このときには複製戦略はこの関数の微分によって決定される．また条件付期待値が有限個の変数とて表わせない時には，近似計算によって解が求められる．

6. おわりに

今回は最近20年間のファイナンス理論における最も重要である成果のアイデアを紹介した．第3節は本質的に理論的であるが，第4および5節に示した応用によって，この理論の工学的側面が明らかになったであろう．すなわち，唯一の同値マルチンゲール測度が得られたなら，条件付証券の価値は条件付期待値によってすべての時刻に対して計算可能となる．この条件付期待値が一定の変数の滑らかな関数である時，関数は偏微分方程式を満足する．また，条件付証券の複製戦略はこの関数の偏微分によって計算可能となる．かくして応用のための手続き

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

は機械的となる．

条件付証券の価格の一般論に興味ある読者は Duffie (1988) および Huang and Litzenberger (1989) を参考にされたい．

参考文献

[1] Black, F., and M. Scholes. 1973. 第1回の参考文献[2].

[2] Cox, J., S. Ross. 1976. 第1回の参考文献[7].

[3] Duffie, D. 1988. *Security markets*, Academic Press, California.

[4] Dybvig, D., andC. Huang, 1989, Nonnegative Wealth, Absence of Arbitrage and Feasible Consumption Plans, *Review of Financial Studies* **1**, 377-401.

[5] Harrison, M., and D. Kreps. 1979. 第1回の参考文献[9]

[6] Harrison, M., and S. Pliska. 1981. 第1回の参考文献[10]

[7] Huang, C., and R. Litzenberger, 1988, *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, New York.

[8] Huang, C., and T. Uratani, 1990, 本誌連載第1回

[9] Huang, C., 1989, *Lecture Notes on Advanced Financial Economics*, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

[10] Kunita, H., and S. Watanabe, 1967, On square-integrable martingales, *Nagoya Mathematics Journal* **30**: 209-245.

[11] Liptser, R., and A. Shiryayev, *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[12] Merton, R. 1973. 第1回の参考文献[19]

[13] Pagès, H. 1989. Three Essays In Optimal Consumption. Unpublished Ph. D. thesis. Massachusetts Institutes of Technology.

[14] Samuelson, P., 1965, Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review* **6**: 13-32.

第25回 SSOR ルポ

第25回に当たる今年のＳＳＯＲは，８月26日から29日までの４日にわたり，飛騨高山の近くの丹生川村（弁天荘）において開催された．今回のＳＳＯＲは，はじめ出足が心配されたが，天気にも恵まれ78名の参加者が全国から集い，盛大なものとなった．

第１日目は，午後３時から受付が開始された．参加者が集まるにしたがって，旧交を温める場面や共通の話題について議論する場面などが各所で見られた．夕食後，大野勝久先生（名古屋工業大学）による特別講演が行なわれた．講演は「生産システム事始め一ＪＩＴへの道」と題して，1) F.W. Taylor の科学的管理法，2)大量生産を可能にしたフォードシステム，3)多品種少量生産を実理するジャスト・イン・タイム生産システム，これら３つの生産管理方式の特徴および歴史的意義に関してのものであった．その後，開催された飲み会にはほとんどの人が参加し，深夜遅くまで宴がつづいた．

第２日目は，一般発表が午前９時15分から始まった．２日目の発表は次の７件であった．

(1) "Parametrie Simplex Algorithms for Solving Special Classes of Bilinear Programming Problem"　矢島安敏，今野　浩（東京工業大学）

(2) 「非線形ナップザック問題に対する新グリーディー法」　太田垣博一，中川勇二（岡山理科大学）

(3) 「拡張確率ペトリネットによる強調動作をするシステムの稼働率について」菅澤喜男，金群（日本大学）

(4) 「調和解析にもとづく待ち行列の解析について一減少をよく表現する解析しやすい特性量を求めて」　下川信祐（ＮＴＴ交換システム研究所）

(5) 「翌日最大電力予測モデルの開発」　小野賢治，所　健一（電力中央研究所）

(6) 「平面方向オイラーグラフにおける weak 4-linking 問題について」　西村茂樹（京都大学）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．