マルチンゲールの応用と財務論

飯野　正幸

1. 序

財務論において，証券価格の評価理論がある．新古典派経済学的アプローチによる諸モデルが展開されてきている．資本市場において価格の裁定機会が存在すれば，経済主体は裁定操作によって無限の富を得ることができ市場均衡は存在しない．ここでは，いくつかの文献をもとにして，証券市場モデルを考える．それぞれの文献の紹介とともに，経済的意味を述べる．そのさい，裁定の条件と価格過程がマルチンゲールとなるような確率測度の存在との関係を中心に考察，整理する．

2. 市場モデル (1)

本章では Harrison and Kreps [1] をもとにして，市場モデルの解説を行なう．確率空間(Ω, F, P)を考え，各 $\omega\in\Omega$ は起こりうる世界の状態を表わす．時刻$t=0$, Tをとり，時刻Tでの消費に対する条件付請求権 (contingent claim)の空間 X として，2乗可積分なる F 可測確率変数の空間を考える．すなわち$X=L^2(\Omega, F, P)$である．$x\in X$ は状態が ω のときに時刻 T で $x(\omega)$だけを支払うという契約である．

経済主体は純取引の空間$\mathbf{R}\times X$上の選好によって特徴づけられ，この選好は$\mathbf{R}\times X$上の完全かつ推移二項関係$\geq$で表わされる．ここではこの選好は凸性，連続性，狭義増加性の3条件を満たすものと仮定される．この $\mathbf{R}\times X$ 上の二項関係の集合は$\mathbf{A}$で表わされ，これは経済主体の集合に対応することになる．

価格体系(price system)はXの部分空間MとM上の線形汎関数 π の組合せ(M, π)である．Mは市場で取引されている条件付請求権を表わす空間であり，π は $m\in M$に関する価格を時刻0の消費の単位で表わしたものである．価格体系(M, π)が viable であるというのは，ある$\geq\in\mathbf{A}$ と $(r^*, m^*)\in\mathbf{R}\times M$ が存在して，

$r^*+\pi(m^*)\leq 0$ かつ

(1) $r+\pi(m)\leq 0$ なるすべての $(r, m)\in\mathbf{R}\times M$ に対して $(r^*, m^*)\geq(r, m)$

となるときをいう．このことは，$\mathbf{A}$に属する経済主体が予算制約 $r+\pi(m)\leq 0$ にしたがって最適取引を選ぶときに，最適取引を見出すことができることを示している．viable であることは市場均衡のための必要条件であり，一方，この条件を満たす $\geq$ と $(r^*, m^*)\in\mathbf{R}\times M$ が存在するとき，

(2) $(r+r^*, x+m^*)\geq(r'+r^*, x'+m^*)$ ならば $(r, x)\geq'(r', x')$

で$\geq'$を定義すれば，全経済主体の選好が$\geq'$であり，純取引が$(0,0)$なら市場は均衡し，この意味で十分条件である．

条件付請求権$x\in X$で，$P(x\geqslant 0)=1$, $P(X>0)>0$を満たすものの集合をX^+で表わす．$X=L^2(\Omega, F, P)$上の線形汎関数 ϕ について，すべての$x\in X^+$に対して$\phi(x)>0$ となるならば，ϕは狭義に正値であるという．X上のすべての(L^2 ノルム位相で)連続かつ狭義正値なる線形汎関数の集合をΨで表わす．このとき，価格体系(M, π)が viable であることと，π の X 全体への拡張でΨに属するものが存在することとが同値であることが分離定理を用いて示される．

$x\notin M$ に対して，x が価格 p であるとき，span$(M\cup\{x\})$を M' で表わし，$\pi'(m+\lambda x)=\pi(m)+\lambda p$ でπ'を表わすとき，(M', π') が viable であるならば，xの価格 pは価格体系(M, π)とコンシステントであるという．したがって，価格体系(M, π)が viable であるならば，すべての $x\in X$ に対して (M, π) とコンシステントな価格が存在する．さらに，viable な (M, π) に対して，(M, π) とコンシステントな x の価格の集合は，$\{\phi(x)\,;\,\phi\in\Psi$ かつ $\phi|M=\pi\}$ である．

(M, π) とコンシステントな x の唯一の価格が存在するとき，x の価格は (M, π) より裁定により決定される(determined by arbitrage)といい，この x の唯一の価格を裁定価格(arbitrage value)という．すなわち，

いいの　まさゆき　富山大学　経済学部
〒930 富山市五福3190

価格体系 (M,π) が viable のとき，$x\in X$ の価格が裁定によって決定されることと，集合 $\{\psi(x)\,;\,\psi\in\Psi$ かつ $\psi|M=\pi\}$ の要素が1個であることとは同値であり，この要素は x の裁定価格である．

以上のところでは，市場における均衡と裁定の関係について，ひとつの考え方を示しており，つづいて証券市場モデルが展開される．

証券の取引時刻は $\mathbf{T}\subseteq[0,T]$ で，0，$T\in\mathbf{T}$ である．情報構造は増大情報系 $\{F_t\,;\,t\in\mathbf{T}\}$ で与えられ，$F_0=\{\phi,\Omega\}$，$F_T=F$ と仮定される．F_t は時刻 t に，その状態が起っているかどうかを知ることができるものの集合である．価格過程は $\{F_t\}$ に適合した $(K+1)$ 次元確率過程 $Z=\{Z(t)\,;\,t\in\mathbf{T}\}$ である．$Z(t)$ の成分は $k=0,1,\cdots,K$ に対して，$Z_k(t)$ で表わす．$(K+1)$ 個の証券が取引され，時刻 t で状態 ω のときの第 k 証券の価格が $Z_k(t,\omega)$ である．Z が $\{F_t\}$ に適合していることにより，時刻 t においてすべての証券の価格を経済主体は知っていることがわかる．第0証券は債券とし，すべての t と ω について $Z_0(t,\omega)=1$ と仮定する．さらにすべての $t\in\mathbf{T}$ と $k=1,\cdots,K$ に対して，$\mathrm{E}(Z_k{}^2(t)<\infty$ とする．

証券市場モデルは，確率空間(Ω,F,P)と取引時刻$\mathbf{T}$，情報系 $\{F_t\}$，価格過程Zからなる．

取引については，$(K+1)$ 次元過程 $\theta=\{\theta(t)\,;\,t\in\mathbf{T}\}$ で，次の3つの条件を満たすものを考え，これを単純取引戦略(simple trading strategies)という．ここのモデルではこの形の取引のみが扱われる．上記の3条件はまず$\theta(t)$がすべての$t\in\mathbf{T}$についてF_t可測であること，2つめに，$\theta_k(t)Z_k(t)$ がすべての $t\in\mathbf{T}$ と $k=0,1,\cdots,K$ についてXの要素であること，3つめに有限の整数Nと時刻の列 $0=t_0<\cdots<t_N=T$ が存在して，$t_n\in\mathbf{T}$ かつ $\theta(t,\omega)$はすべての状態 ω について区間 $t_{n-1}\leqslant t<t_n$ 上で定数であることである．$\theta_k(t,\omega)$ は時刻 t に状態が ω のとき，保有される第 k 証券の量である．

θ を時刻 $t_0,t_1,\cdots,t_N$ に取引される単純戦略とする．内積$\theta(t)\cdot Z(t)$は時刻 t におけるポートフォリオの価値を表わす．時刻 t_n での取引前の価値は$\theta(t_{n-1})\cdot Z(t_n)$，取引後の価値は$\theta(t_n)\cdot Z(t_n)$である．$n=1,\cdots,N$に対して，$\theta(t_{n-1})\cdot Z(t_n)=\theta(t_n)\cdot Z(t_n)$ ならば，θ は self-financing なる単純戦略といわれる．このことはポートフォリオ変更のさいに資金をつけ加えたり，差し引いたりしないという，取引戦略に対するひとつの制限である．そして時刻0からTへ消費が移されることになる．self-financing なる単純戦略θは，$\theta(0)\cdot Z(0)\leqslant 0$ かつ $\theta(T)\cdot Z(T)\in X^+$ のとき，単純フリーランチ (simple free lunch) といわれる．この場合，時刻0の消費を減少させず，正の確率で時刻Tの消費を増加させ，**A**に属する経済主体について市場均衡とコンシステントであり得なくなる．

条件付請求権$x\in X$が市場で取引されている(marketed) とは，ほとんど確実に $\theta(T)\cdot Z(T)$ であるような self-financingなる単純戦略が存在することをいう．この場合，θ は x を生成する (generate) といい，$\theta(0)\cdot Z(0)$ はxの価格であるという．時刻0での消費の単位で $\theta(0)\cdot Z(0)$ の費用でポートフォリオ $\theta(0)$ を経済主体が購入し，時刻 $t_1,t_2,\cdots,t_N$ で費用なしに戦略θでポートフォリオを組み替え，時刻Tに $\theta(T,\omega)\cdot Z(T,\omega)=x(\omega)$ の価値を(時刻 T に状態 ω での消費の単位で)得ることになる．

ともにxを生成する2つの self-financing なる単純戦略θ，θ' に対して，単純フリーランチが存在しないならば，$\theta(0)\cdot Z(0)=\theta'(0)\cdot Z(0)$でなければならない．このとき，$M$を市場で取引されている条件付請求権の集合とし，$\pi:M\to\mathbf{R}$ が $m\in M$ の価格を与えるとする．単純フリーランチが存在しないならば π はM上の線形汎関数である．単純フリーランチを許容しない証券市場モデルに対して，(M,π) をそのモデルに対応する価格体系という．証券市場モデルが単純フリーランチを許容せず，しかも，対応する価格体系(M,π)が viable ならば，そのモデルは viable であるという．viable な証券市場モデルが与えられたときに，xの価格がモデルより裁定により決定されるということと，xの裁定価格がpであるということは，それぞれ対応する価格体系 (M,π) について成立するときに定義される．価格体系 (M,π) に対して，$\hat{M}$でその価格が裁定により決定される条件付請求権の全体を表わし，$\hat{\pi}(x)$で$x\in\hat{M}$の裁定価格を表わす．

同値マルチンゲール測度というのは (Ω,F) 上の確率測度 p^* で次の3つの条件を満たすものである．まず，pとp^*が同値である，すなわち$B\in F$に対して$p(B)=0$ と $p^*(B)=0$が同値である．2つめに Radon-Nikodym 導関数 $\rho=dp^*/dp$ が $\mathrm{E}(\rho^2)<\infty$ を満たす．3つめに過程Zは$\{F_t\}$上でp^*に関してマルチンゲールである．すなわち p^* に関する期待値を $\mathrm{E}^*(\cdot)$ で表わすとすべての $k=0,1,\cdots,K$ と $t\leqslant u$ なる $u,t\in\mathbf{T}$ に対して $\mathrm{E}^*(Z_k(u)|F_t)=Z_k(t)$ である．

以上の設定のもとで次のことが示される．証券市場モデルが単純フリーランチを許容しないとする．そのとき

同値マルチンゲール測度 p^* と，$\phi|M=\pi$ であるような線形汎関数 $\phi\in\Psi$ との間に 1 対 1 対応が存在する．この対応は次で与えられる．

(3)
$$p^*(B)=\phi(I_B)$$
$$\phi(x)=\mathrm{E}^*(x)$$

このことをもとにして，次の 3 つの命題が成り立つ．(a) 証券市場モデルが viable であることと少なくともひとつの同値マルチンゲール測度が存在することとは同値である．(b) 証券市場モデルが viable であるとする．$\mathbf{P}$ で同値マルチンゲール測度の(空でない)集合を表わす．このとき $x\in\hat{M}$ であることと，$\mathrm{E}^*(x)$ がすべての $p^*\in\mathbf{P}$ に対して一定であることとは同値であり，その一定値は $\hat{\pi}(x)$ である．(c) 証券市場モデルが viable でありかつすべての条件付請求権 $x\in X$ が裁定により決定されることと，唯一の同値マルチンゲール測度が存在することとは同値である．

本章で紹介した証券市場モデルは一定の条件のもとで市場均衡の性質を示している．次章で述べるモデルと比較，検討する．

3. 市場モデル (2)

ここでは Harrison and Pliska [2] について，市場モデルを中心に紹介を行なう．前章と重なる部分については，説明を簡単にする．確率空間 (Ω, F, P) が与えられる． 標本空間 Ω の要素の個数は有限であり， 任意の $\omega\in\Omega$ に対して $P(\omega)>0$ と仮定する．取引時刻は $0, 1, \cdots, T$ であり，情報系 $\{F_0, F_1, \cdots, F_T\}$ は $F_0\leq F_1\leq\cdots\leq F_T$ であり，$F_0=\{\phi, \Omega\}$, $F_T=F$ と仮定する．

市場モデルは，証券の価格を表わす $(K+1)$ 次元の確率過程 $Z=\{Z(t)\,;\,t=0, 1, \cdots, T\}$ を考え，各成分は $k=0, 1, \cdots, K$ に対して $Z_k(t)$ で表わす．各成分 Z_k は狭義正値であり，情報系 $\{F_0, F_1, \cdots, F_T\}$ に適合しているとする．

第 0 証券は債券であるとし，初期時点 0 において $Z_0(0)=1$ と標準化する．$\beta(t)=1/Z_0(0)$ で割引過程を定義する．

取引戦略は予測可能な (predictable) $(K+1)$ 次元過程 $\phi=\{\phi(t)\,;\,t=1, \cdots, T\}$ で定義し，その成分は $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_K$ である．ここで予測可能というのは $\phi(t)\in F_{t-1}$ が $t=1, \cdots, T$ について成立することを意味する．$\phi_k(t)$ は時刻 $t-1$ と t との間における経済主体の第 k 証券の保有量を表わしている．ϕ が予測可能ということにより，経済主体は $Z(t-1)$ を観測して，時刻 t のポートフォリオ $\phi(t)$ を決定し，また $Z(t)$ がわかるまでにポートフォリオ $\phi(t)$ が決定され，$Z(t)$ がわかるまで保有されることになる．

$\phi(t)\cdot Z(t-1)$ という内積は時刻 $t-1$ に形成された直後のポートフォリオ $\phi(t)$ の市場価値を表わし，$\phi(t)\cdot Z(t)$ は時刻 t の価格が観測された後でしかもポートフォリオの変更がなされる前の市場価値を表わす．これにより $\phi(t)\cdot\Delta Z(t)(=\phi(t)\cdot(Z(t)-Z(t-1)))$ は時刻 $t-1$ と t との間における証券価格の変化による市場価値の変化を表わすことになる．

今までの展開では，$T=N$ のとき取引戦略 $\phi(1), \cdots, \phi(T)$ は前章の $\theta(t_0)=\theta(0)$, $\theta(t), \cdots, \theta(t_{N-1})$ に対応する．これは単に取引の期間の番号付けの問題であるが，ここでの議論では，もとの文献のまま用いる．また前章の取引の単純性はここでも成立している．取引戦略 ϕ に対して収益過程 $G(\phi)$ を次のように定義する．

(4)
$$G_t(\phi)\equiv\sum_{i=1}^{t}\phi(i)\cdot\Delta Z(i),\quad t=1, \cdots, T$$

これは時刻までに実現するキャピタルゲインに対応する．

取引戦略が self-financing であるということを次の条件で定義する．

(5)
$$\phi(t)\cdot Z(t)=\phi(t+1)\cdot Z(t),\quad t=1, \cdots, T-1$$

これは前章と実質的に同じである．

取引戦略に対して価値過程を次のように定義する．

(6)
$$V_t(\phi)\equiv\begin{cases}\phi(t)\cdot Z(t), & t=1, \cdots, T\\ \phi(1)\cdot Z(0), & t=0\end{cases}$$

これは時刻 t における取引の直前のポートフォリオの市場価値を表わしている．さらに取引戦略が admissible であるとは， それが self-financing であり， かつ，$V(\phi)$ が正値過程であることをいう．$V(\phi)$ が正であることにより，経済主体は常に負債の状態にはならないということになる．また，Φ ですべての admissible である取引戦略の集合を表わす．

条件付請求権は非負の確率変数 x である．X ですべての条件付請求権の集合を表わす．条件付請求権 x が到達可能(attainable)であるとは，$V_T(\phi)=x$ となるような $\phi\in\Phi$ が存在することをいう．これは前章の「市場で取引されている」という概念に対応する．この場合，ϕ は x を生成するといい，$\pi=V_0(\phi)$ をこの条件付請求権に関する（時刻 0 の）価格という． 裁定機会（arbitrage opportunity）というのは，$V_0(\phi)=0$ であり，しかも，$\mathrm{E}(V_T(\phi))>0$ であるような取引戦略 $\phi\in\Phi$ をいう．これ

は前章の「単純フリーランチ」に対応する．

次に条件付請求権に対する価格体系を以下の条件を満たす写像 $\phi : X \to [0, \infty)$ で定義する．

(7a)　$x=0$ のとき，およびそのときに限り，$\pi(x)=0$

すべての $a, b \geqq 0$ とすべての $x, x' \in X$ に対して

(7b)　$\phi(ax+bx')=a\phi(x)+b\phi(x')$

すべての $\phi \in \Phi$ に対して $\phi(V_T(\phi))=V_0(\phi)$ であるとき，価格体系 ϕ は市場モデルとコンシステントであるという．モデルとコンシステントなすべての価格体系の集合を Π で表わす．

確率測度 p と同値で，割引価格過程 βZ が p^* のもとでマルチンゲールであるような，すべての確率測度 p^* の集合を $\mathbf{P}$ とする．このとき，価格体系 $\pi \in \Pi$ と確率測度 $P^* \in \mathbf{P}$ と間に次の1対1対応が成り立つ．

$$
(8) \quad \begin{aligned} P^*(B) &= \phi(Z_0(T)1_B) \\ \phi(x) &= \mathrm{E}^*(\beta(T)x) \end{aligned}
$$

さらに市場モデルが裁定機会をもたないのは，$\mathbf{P}$ が（同等に Π が）空でないことと同値であることが示される．

4. 結

ここで解説した2文献ではさらに連続取引のモデルに展開されるが，基本となる部分をとりあげて，要約した．証券市場モデルにおいての証券価格と同値マルチンゲール測度との関連や，市場均衡と裁定機会について，また，資産価格理論全般とのつながりなど，今後も検討を重ねる余地があると考える．ここでの2モデルについても，いろいろの側面から考察し，その他の多くの文献との関係を見てゆく必要がある．以上のことについて筆者は関心があるので今後の課題としたい．

参考文献

[1] Harrison, J.M. and Kreps D. M. : Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, Vol.20, (1979), 381-408.

[2] Harrison, J.M. and Pliska S.R. : Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol.11, (1981), 215-260.