

資産運用に関する理論考察

甲斐 良隆

1. 資産運用ニーズの高まり

ここ数年、円高不況克服のための低金利政策を背景に、折からの株式市場の好調さを受け企業はこぞで大量のエクイティ・ファイナンスを実施した。これまで中心となっていた時価発行増資に加えて、表面利率2%前後のCB、WBを発行し、借入金の返済や有価証券の運用に充当し始めたのである。その結果、東京証券取引所一部上場の製造業における金融収支はかつての大幅な赤字から一転黒字を計上するに至った。

また、個人のレベルにおいても、きたるべき高齢化時代への備えということもあり、着々と資産蓄積が進み、平均貯蓄残高は1世帯当り1000万円を超えた。1億総財テクなる言葉に代表されるように、資産運用に対する意識も高まっており、証券会社主催の株式セミナーに家庭の主婦が大挙して詰めかけるという光景も珍らしくなくなった。

そして、資産増加につれ、運用方針は、流動性や安全性より収益性に重点が移ってきた。つまり、多少のリスクを犠牲にしても、資金はより高収益商品への投資に振り向けられてきている。その代表的なものは株式や外貨建て預金である。

ただ、これらは大きな価格変動性や為替リスクを含んでおり、専門的な知識やノウハウがないと、思いどおりの成果が上がらないばかりか予想外の損失を被ることもある。そこで、一般事業会社や個人が直接運用するのではなく、専門の金融機関に資金を委託することにより、若干のコストを払ってもその専門性を享受する方が好ましいと考えられるようになってきた。そのような機関（総称して機関投資家と言われる）には、資金の性格により分類されるが、信託銀行、生損保、投信委託、投資顧問会社等がある。

なお、これらを利用するメリットは、以下のように整

かい よしたか ㈱三菱信託銀行

〒107 港区北青山1-5-4

表1 上場製造業の平均損益計算書(1989年度 億円)

売上高	1476
売上原価	1159
売上総利益	317
販売・一般管理費	235
営業利益	82
営業外収益	44
(受取利息)	28)
営業外費用	39
(支払利息)	23)
経常利益	87
特別利益	6
特別損益	10
税引前利益	83
法人税	39
当期利益	44
(配当金)	13)
金融収支	+5

理される。

- ① 専門知識の利用………大半の機関投資家では、運用手法の高度化を計ると同時に、アナリストやリサーチャをおき、たえず相場の動向をキャッチしている。
- ② 事務処理の合理化………発注、約定、受渡をはじめ、会計処理、決算（主に、企業向け）を代行し、委託者には定期的に運用成果を報告する。
- ③ 大口資金並みの運用………小口の資金であっても合同運用することにより、幅広い銘柄分散が可能になり、インデックス運用等も実現できる。
- ④ 税制面の優遇………証券信託（ファンドトラスト特定金銭信託）においては、従来から保有していた証券との簿価分離が認められている。株式含み益のはき出しを伴うことなく、運用が可能となるのである。また、年金信託等においても各種の優遇措置がほどこされている。

2. 運用方針の策定

機関投資家は顧客から委託を受け資産運用するわけで

表 2 年金信託の運用比率規制

運用割合	運用商品
50%以上	貸付金(担保付), 公社債, コール等
50%以下	貸付金(無担保), 社債, CP等
30%以下	株式等
30%以下	外貨建て証券等
20%以下	不動産等

あり, まず心がけるべきは, 顧客の資金性格や運用の狙いを正確に理解することである。そのうちで特に重要なのは, 運用期間やリスク(損失)に対する評容度, 目標利回り(顧客のファンディングコストの裏返しであることが多い)等である。さらに, 資金の種類によっては, 運用対象商品に対し, さまざまな制約が加わる場合がある。

次に, 重要なのは, 当然であるが, 運用対象となるマーケットの状況, 先行の動向を正しく見通すことである。この予想はいかに長年の経験を持つプロ集団といえども, きわめて難解なことが多い。そこで, 通常, 予想内容を複数のシナリオにより表現したり, 収益率を確率分布としてとらえる試みが一般である。また, 各商品ごとの値動きだけでなく, 相互の関連を過去のデータを分析し把握することも必要である。

さて, 以上のように, 運用における2大要因は顧客(ファンド)特性とマーケット環境であるが, これらは相反する方向を示すものである。そこで, このトレードオフを解決するためには, 運用にかかわる基本要因をできうかぎり定量化することが前提となる。そして初めて,

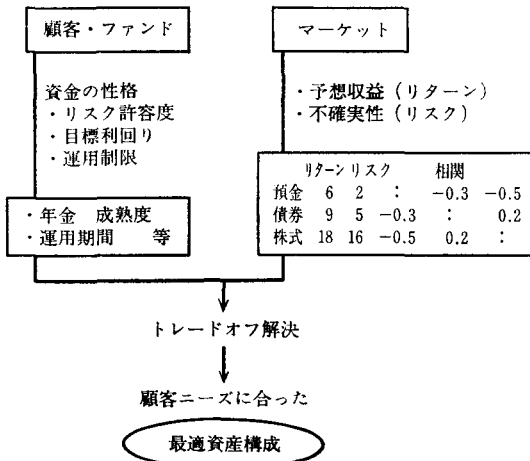


図 1 資産運用の流れ

数理モデルを適用し, ポートフォリオの最適構成を見出すことが可能となるのである。

図2のごとく, ハイリターンをもたらす商品はより大きな不確実性を伴なうことが経験的にも立証されており, 資産運用のポイントは次の2点に要約できよう。

① リスク(不確実性, 予想外の損失)をどのようにコントロールするかが運用の主眼点である。運用戦略とは, リターンを最大にすることではなく, リスクを加味した「効用」を最大にすることである。

② 良い運用とは, 値上りの見込める個別銘柄を発見し1本釣りすることではない。常に, ポートフォリオ全体の構造, 属性を顧客の意向や相場動向にマッチさせていくことである。

次に, 運用業務における効用の意味と最適な資産配分(ポートフォリオ構築)の方法について議論を進めよう。

3. 投資効用の構造

3.1 投資決定のプロセス

現在の保有資産額を W_0 とし, ある投資 I を行なうかどうかの決定を行なうものとする。

その投資により, 確率 P で資産 W_1 に, 確率 $1-P$ で W_2 になることが予想される。

また, 資産 W を保有する場合の効用を $u(W)$ とする。投資 I を行なった場合の期待資産額 W_I は,

$$W_I \equiv E[W] = PW_1 + (1-P)W_2 \quad (1)$$

であり, 期待効用 U_I は,

$$U_I \equiv E[u(W)] = Pu(W_1) + (1-P)u(W_2) \quad (2)$$

となる。一般に, 同じリターンならリスクの小さい方を好む, いわゆるリスク回避的ファンドの場合, その効用関数は図3のような上に凸の形状をとると考えられる。

宝くじや競馬のギャンブルのたぐいはあてはまらないが, 通常の資産運用ではこのような形状を仮定すること

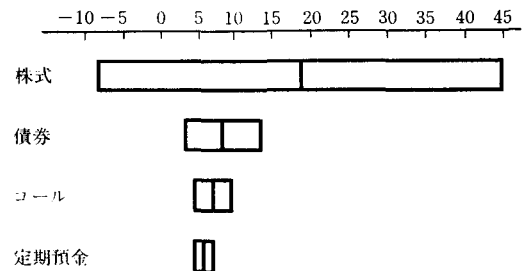


図 2 年次投資収益率の平均, 標準偏差(1969-89年 %)

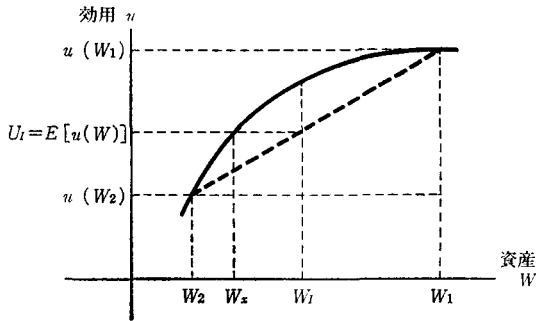


図3 効用曲線

が妥当である。この場合、明らかに、

$$u(W_I) = u(E[W]) > E[u(W)] \quad (3)$$

が成り立つ。

さて、 W_x を図のように、

$$u(W_x) = E[u(W)] = Pu(W_1) + (1-P)u(W_2) \quad (4)$$

を満足するような点とする。この W_x は投資Iに対する「確実性等価」と呼ばれる。この W_x を使うと、投資を行なう方が有利なのは、

$$W_x > W_0 \quad (5)$$

である場合に限定される。また、特に $W_I = W_0$ の場合、この W_x と W_0 の差は投資Iに対するリスクプレミアムに相当すると考えられる。

3.2 リスクプレミアムの算出

具体的にリスクプレミアムを求めるために、次の状況を仮定する。ファンドの状態として右表の2通りをとりうるものとする。

状態	リスクがない	リスクがある
	資産	W

リスクのない状態から、リスクのある状態へ移行する代償として、プレミアムPを要求するものとする、次式が成り立つ。

$$u(W - P) = u(W + \Delta \bar{W}) \quad (6)$$

ただし、 $\Delta \bar{W}$ は十分小さなリスク資産であり、 $E(\Delta \bar{W}) = 0$ を満足する。Pおよび $\Delta \bar{W}$ は十分小さいので、(6)式は次のように展開できる。

$$u(W) - u'(W)P \approx u(W) + u'(W)E[\Delta \bar{W}] + 1/2u''(W)E[\Delta \bar{W}^2] \\ \therefore P = -u''(W)/2u'(W) \cdot \text{Var}[\Delta \bar{W}] \quad (7)$$

$$(\because E[\Delta \bar{W}] = 0)$$

これがリスクプレミアムの算出式である。ちなみに、

$$A(W) = -u''(W)/u'(W) \quad (8)$$

を絶対危険回避度と呼び、1投資リスクあたりのプレミ

アの大きさを表わす。

さて、効用関数を明示的に導出するのは困難であるが、一般的なリスク回避的ファンドの場合、次の形式のものが近似式としてよく用いられる。

$$\textcircled{1} u(W) = \log W$$

$$\textcircled{2} u(W) = 1 - \exp(-aW) \quad (a \text{ 定数}) \quad (9)$$

これらは、ともに、

$$\bullet u'(W) > 0 \quad \dots \text{富の増加は好ましい}$$

$$\bullet u''(W) < 0 \quad \dots \text{リスクは回避的である}$$

を満たすので、通常の運用方針に合致している。次に、この2つの関数の特徴を富の水準との関係で明らかにする。

① $u(W) = \log W$ の場合

$$A(W) = 1/W$$

富の水準に反比例する。つまり、資産が多くなればなるほど、よりリスクな投資を受け入れる。

② $u(W) = 1 - \exp(-aW)$ の場合

$$A(W) = a$$

富の水準にかかわらず、リスクに対する態度は一定である

このようにリスクプレミアムが富の水準に影響を受けるか否かという点で異なり、実際の運用上では顧客特性に応じ使い分けていくことになる。

5. 効用最大化の資産配分法

4.1 指数型効用関数

効用関数として指数型が想定される場合を取り扱う。資産Wは通常有価証券等の商品から構成されており、各商品がほぼ正規分布にしたがうことから、Wもまた正規分布にしたがうと考えられる。そこで、その平均値と標準偏差値を各々 μ と σ で表わすと、確率密度関数 $f(W)$ は

$$f(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(W-\mu)^2/2\sigma^2) \quad (10)$$

で与えられる。すると、期待効用 $E[u(W)]$ は

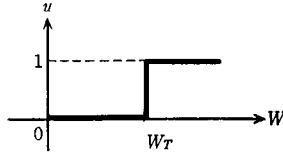
$$E[u(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(-aW))f(W) dW \\ = 1 - \exp(-a\mu + 1/2 a^2 \sigma^2) \quad (11)$$

となる。これを最大にするには、 $-a\mu + 1/2 a^2 \sigma^2$ を最小、つまり、 $\mu - a/2 \cdot \sigma^2$ を最大化することに等しい。

さらに、見方を変えれば、リターンからリスクプレミアムを差し引いた正味リターン(確実性等価)の最大化を意味しているにすぎない。なお、 $a/2$ の逆数をリスク許容度と呼び、顧客、ファンドごとに設定されるものであ

表 3

	最適組入比率	
	$a=0.1$	$a=1$
預 金	0%	72%
債 券	60%	20%
株 式	40%	8%



る。

次に、最適な資産配分を得るための手順を示そう。資産運用の対象商品 i の期待収益率（リターン）を μ_i 、収益率の分散を σ_{ii} 、商品 i と j の共分散を σ_{ij} とする。資産全体のリターンを μ_W 、リスクを σ_W とすると、

$$\begin{cases} \mu_W = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \\ \sigma_W^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \end{cases}$$

が成立。ただし、 x_i は商品 i の組み入れ比率、 n は商品の個数である。したがって、効用関数 $\mu - a/2 \cdot \sigma^2$ の最大化を計ることは、ファンド委託者のリスク性向 $a/2$ が与えられたもとで次の 2 次計画問題を解くことに等しい。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \mu_i - a/2 \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (x_i \geq 0, i=1 \dots n) \end{aligned} \quad (12)$$

ラグランジェの乗数 λ を用いて、

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i - a/2 \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

と置く。最適化条件として、

$$\partial f / \partial x_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad \partial f / \partial \lambda = 0$$

が必要である。すなわち

$$\begin{cases} \mu_i - a \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j + \lambda = 0 \quad (i = 1 \dots n) \\ \sum_{i=1}^n x_i - 1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

これは $n+1$ 元 1 次連立方程式となっている。

[例] 図 1 のマーケット条件（預金、債券、株式）を用いると、最適な組み入れ比率は、 a の値ごとに以下のように求まる。

リスクに対する許容（回避）度を変えると、資産内容は様変わりになることがわかる。最適な配分とは絶対的なものでなく、委託者ニーズに依存する相対的なものであると言われる所以である。

4.2 収益フロアーが存在する場合の効用関数

資産運用においてたびたび出会うのは、運用期間終了時点における最低限の収益保証問題である。大抵の場合、元本割れは極端に嫌われるし、資金によっては、定期預金以上が最低目標であったり、ファンディングコストに見合うだけの収益が要求されたりすることもある。

そこで、このようなフロアーがある例として、効用関数が次の形状をなす場合を取り上げる。

つまり、目標資産 W_T を超えると、 $u(W)=1$ 、他は $u(W)=0$ となる関数である。4.1 と同様、 W が正規分布確率をとるものとする、(9)より、

$$\begin{aligned} E[u(W)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(W) f(W) dW \\ &= \int_{W_T}^{\infty} 1/\sqrt{2\pi} \sigma \exp(-(W-\mu)^2/2\sigma^2) dW \end{aligned}$$

これは、収益が W_T 以上となる確率に相当する。さらに、 W について正規分布 $N(\mu, \sigma)$ を $N(0, 1)$ に正規化すると、

$$\begin{aligned} E[u(W)] &= \text{Prob.} [W \geq W_T] \\ &= \text{Prob.} [V \geq V_T] \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 V は $N(0,1)$ にしたがって、 $V_T \equiv (W_T - \mu)/\sigma$ である。期待効用 $E[u(W)]$ を最大にすることと、 V_T を最小にすることは等しい。

さらに、この問題は資産 W の有効フロンティアに対し、 $(0, W_T)$ から接線を引く（傾き最大となる）問題と同値であり、その接点 M が最適なポートフォリオになる。

この厳密解を求めるのは一般的には困難であるが、特別な条件下における解法が最近提案されている。（文献[3]を参照）

なお、複数の資産配分案を比較する場合、効用の大きさの順位は $(\mu - W_T)/\sigma$ の大きさの順序に等しくなり、比較的簡単に求まる。

[例] 4.1 の例と同様なマーケット条件を仮定すれば、商品組み入れ比率が異なるプラン 1, 2, 3 の効用の大きさの順位は次のとおりである（目標利回り = 7%）。結果はプラン 2 を採用すべきであり、その場合の目標達成確率は 72% である。

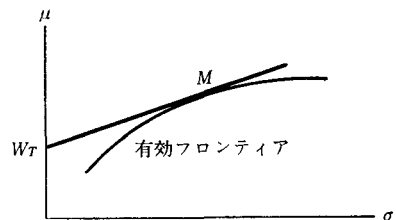


図 4 最適ポートフォリオ

表 4 各種プランの効用順位

	預金	債券	株式
プラン 1	50%	30%	20%
プラン 2	30%	40%	30%
プラン 3	10%	20%	70%

	リターン	リスク	$\mu - W_T/\sigma$	順位
プラン 1	9.3%	3.4%	0.68	③
プラン 2	10.8%	5.3%	0.72	①
プラン 3	15.0%	11.3%	0.71	②

5. おわりに

最近の急激な債券、株式安を受けて、あまりにも安易な資産運用については反省の気運が見られる。しかし、今後とも、社会資本の充実、安全した老後の生活設計と

いった国民的課題を進める上で適正な資産運用は欠くことができない。資産運用に向う資金の性格は個人、企業の枠を超えて千差万別であり、そのニーズを正確に反映する運用法が適用されるべきである。そのための理論、運用支援システムのますますの発展が待ち望まれており、そこでは、ファンド特性とマーケットの定量分析、および最適化手法が基本的な手段となろう。

参 考 文 献

- [1] 青山護「アセットアロケーション；理論と実際」, 証券アナリストジャーナル, 1989年8月号
- [2] 田村担之「効用理論の最近の発展」, オペレーションズ・リサーチ, 1988年8月号
- [3] 森田浩, 石井博昭, 西田俊夫“Stochastic linear knapsack programming problem and its application to a portfolio selection problem”, European Journal of Oper. Res., Vol 40 No. 3 June 15, 1989

「論文・事例研究」の原稿募集!

ORの特徴は実践にあるといわれています。実践的な応用をぬきにした理論ということはORでは考えられません。本誌でも以前から会員の皆様からの事例研究の報告をお願いしてきましたが、まだ十分な成果をあげているとはいえません。

「論文・事例研究」は企業、研究所、大学等で実際に行なった事例を論文としてまとめたものを広く会員の皆様に紹介することを目的として作られた欄です。この論文は2人のレフリーによって正式に審査されますが、マネジメント、行政、工学等の広い分野において適用対象の新しさ、適用方法の新しさ、適用範囲の広さ等が論理的、科学的に論じられたものでありますならば、積極的に採用する方針です。皆様のご投稿をお願い申し上げます。

投稿要領：学会原稿用紙36枚(25字×12行)以内(図・表を含む)
(ワープロ可)投稿先はOR学会事務局OR誌編集委員会宛。

なお、原稿の他コピーを2部添付してください。

レフリー審査の結果、改訂をお願いしたり、採択されない場合があることをご了解ください。また、原稿は、採択・不採択にかかわらず、原本、コピーともお返しできません。(OR誌編集委員会)