ファイナンスの数理

田畑　吉雄

1. はじめに

ポートフォリオ理論は，資本市場（企業が必要とする長期資金を調達したり，供給したりするための金融市場）で取引きされる各種の証券に合理的な投資家がいかに投資し，その結果，各種証券の均衡価格がどのように形成されるかを解明するのが目的である．その一部をなすポートフォリオ工学は，ポートフォリオを管理するのに必要な税金，取引費用などの種々のコストを考慮した上で，リスクの回避と最適な投資戦略の導出，資金の効率的運用などを探究するOR的手法の1つである．

本稿では，まず古典的なポートフォリオ理論の数理的な側面に的を絞り，いくつかの問題点を指摘する．次に，現代ポートフォリオ理論の中心課題の1つである先物やオプションなどの条件付き請求権に眼を向け，それらの評価式が満たすべき偏微分方程式の解の誘導について議論する．ここで得られる偏微分方程式の解の導出は，応用数学としての手法のみではかなり困難であるが，ファイナンスの裁定理論の助けを借りれば効率よく明示的に導出できることを示す．

2. ポートフォリオの選択モデル

証券の将来価格は確実に予測できるもの（銀行預金や割引債などで安全証券という）と，確実には予測できない（株式などで危険証券という）ものとに大別できる．危険証券の価格は確実に予測できないという意味で確率変数であり，それらへの投資はいわば不確実性のもとでの意思決定である．

いま，n 種の証券を投資対象としている合理的な投資家がいるとし，各証券からの収益が $R_1, R_2, \cdots, R_n$ なる確率変数で表わされ，その同時分布を

$$F(r_1, \cdots, r_n) = P(R_1 \leqq r_1, \cdots, R_n \leqq r_n)$$

としよう．手持ち資産をこれら n 種の証券に $x_1, x_2, \cdots,$ x_n の割合で投資することにすれば，その結果得られる総収益Wは

$$W = \sum_{j=1}^{n} x_j R_j = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{R}$$

なる確率変数で与えられる．第k番目の証券への投資比率を x_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をポートフォリオと呼ぶ．$u(r)$ を意思決定者の収益rに対する効用関数（非減少，凹）とすれば，ポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ に対する総収益Wの期待効用 $Eu(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{R})$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\boldsymbol{x}' r)\, dF(r_1, \cdots, r_n) \qquad (1)$$

で与えられる．この期待効用を

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

のもとで最大にするようなベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を求める問題は一種の確率計画問題であるが，その問題をポートフォリオ選択問題と呼ぶ．

効用関数 $u(r)$ が収益 r に関する2次関数の場合か，または，分布Fが多変量正規分布（収益間の分散共分散行列をVとする）で効用関数が凹なら，総収益Wの平均値 $E\{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{R}\} = \mu$ を最大にし，かつ，分散 $\mathrm{Var}\{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{x}' V \boldsymbol{x} = \sigma^2$ を最小にするという多目的計画問題を解けば，上式の期待効用が最大になることが知られている．この多目的問題の取扱いとして種々の方法が考えられるが，通常は平均値 μ を一定にしておいて，分散 σ^2 の方を最小にする2次計画問題

$$\min\{\boldsymbol{x}' V \boldsymbol{x}\}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{r}'\boldsymbol{x} = \mu, \ \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \qquad (2)$$

が（マルコビッツ流の）ポートフォリオ問題の標準形となっている．ただし，$\boldsymbol{r}$ は $E\{R_j\}$を成分とする n 次元ベクトルである．この2次計画問題 (2) はラグランジュ乗数を導入することによって最適解を求めることができ，その結果を (σ, μ) 平面に図示すれば，**図1**のような双曲線の片割れが得られることはよく知られている．

n 個の危険証券に加えて，さらに，安全証券（確定収

たばた　よしお　大阪大学　経済学部
〒560 豊中市待兼山町1－1

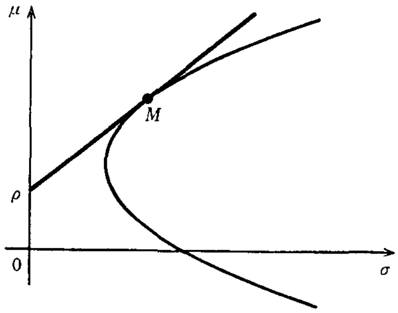

図 1　最適ポートフォリオ

益をρとする）が1つ存在する場合には，図のμ軸上の点（0, ρ）から双曲線への接線が最適ポートフォリオとなる[2].接点Mを市場ポートフォリオと呼び，危険証券kの構成比率x_kが

（第k企業の時価総額）／（市場全体の時価総額）で与えられるポートフォリオである.

2次計画問題からの結果が教えることは，すべての投資家にとって最適な投資方法は接線ρM上およびその延長上の点で示され，安全証券ρと市場ポートフォリオMとを合わせ持つことである．そして，ρとMの比率は各投資家のリスクとリターンに関する態度で定まるというわけである．さらに，すべての合理的な投資家が最適なベクトルxの比率で投資したとすれば，各証券の価格がどのように均衡するかも明らかにされており，資本資産評価モデル（ＣＡＰＭ）と呼ばれる均衡式

$$E\{R_j\}=(1-\beta_{jM})\rho+\beta_{jM}E\{R_M\} \qquad (3)$$

が誘導される．ただし，R_Mは市場ポートフォリオの収益であり，β_{jM}は

$$\beta_{jM}=\mathrm{Cov}(R_j, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$$

で定義され，市場全体の変動が株式jの変動に与える影響を表わす量で，ベータ値と呼ばれている.

以上が古典的なポートフォリオ理論の概略であるが，現実の投資の局面では，さまざまな制約が伴う．たとえば，売買量は整数値であるとか，特定の株式への投資比率に上限があると言ったものである．このような制約のもとでの最適投資比率を求める問題はポートフォリオ工学の対象の1つであり，数理計画法がその独壇場となるであろう．ＯＲ研究者はしばしば期待効用最大化を無視し，局所的な現実問題をうまく記述するような目的関数を導入し，その解法を提案することが多い．その場合，均衡価格まで求まればよいが，通常はそこまでいかないことが多く，さらに，不確実性のもとでの意思決定問題の黄金ルールである期待効用理論との整合性，および均衡価格の導出という点でファイナンス理論の専門家との軋轢を生むようである．したがって，その難問をいかに克服するか，または，それを回避して彼らを説得するかがＯＲサイドのポートフォリオ工学では重要な課題であろう.

3.　指数先物と数理計画

わが国で初めての株価指数先物（現時点で約定した価格で，将来の定められた期日（満期日）に取引を約束する取引形態）である株先50が1987年から大阪証券取引所で取引されているが，その作成にさいしてＯＲの考え方が関与したので，そのあらましを述べておこう.

株先50は大証一部に上場されている1,000余りの銘柄から，わが国の代表的な株価平均である日経225の変動に類似するように選ばれた50銘柄の単純平均株価を指数（パッケージ）とした先物である．パッケージにどの50銘柄を含めるべきかという選択問題に対して種々の方法が試みられたが，最も威力を発揮したのは次のような0－1変数の2次計画法であった.

$$\min\{\sum_{t=1}^{s}W(t)(N(t)-Y(t))^2\}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{k=1}^{m}x_k=50,\quad x_k(x_k-1)=0$$

ただし，$P_k(t)$を時点t（$t=1,2,\cdots,s$；sとしては過去5年分の月次データ）における銘柄k（$k=1,\cdots,m$）の株価とするとき，

m＝大証一部上場の銘柄数（＝約1,000）

$N(t)$＝時点tにおける日経平均値

$$Y(t)=\sum_{k=1}^{m}x_k P_k(t)/50$$

$$x_k=\begin{cases}0\ (\text{銘柄}k\text{がパッケージに含まれないとき})\\ 1\ (\text{銘柄}k\text{がパッケージに含まれるとき})\end{cases}$$

$W(t)$＝時点tに対するウエイト（過去のどの期間をどの程度重視するかのウエイト）

である.

前節で述べたＣＡＰＭや実証研究の結果では，罫線屋のエキスパートが個別銘柄を少々うまく運用しても，ＴＯＰＩＸや日経平均値のような市場ポートフォリオのパフォーマンスを上回ることが簡単にはできないことが認められている．したがって市場ポートフォリオMを保有することが最適なポートフォリオを保有することであるが，現実には取引費用，投資資金などの制約から市場ポートフォリオを保有することは困難である．その対抗策

として，数少ない銘柄で市場ポートフォリオにできるだけ近いインデックス・ファンドを作るか，大量の資金を零細な投資家から集めて投資信託（ミューチャル・ファンド）を作ることが機関投資家の常識となっている．株先50のパッケージ作成に用いた0－1変数の2次計画法は，少ない銘柄（100程度）で市場全体の動きと類似するようなインデックス・ファンドを設計するのに応用でき，投資信託の分野で注目されている．

4. 株価指数の数理

株価指数とはS＆P 500とか東証株価指数（TOPIX），日経平均などに代表されるように，複数の株価になんらかの平均操作を施して得られる単一の数値であり，その数値が株式市場全体の動向を表現できるように種々の工夫がなされている．

N種の株式が取引されている株式市場を想定し，時刻tにおける各株価を$P_1(t)$, $P_2(t)$, …, $P_N(t)$で表わす．各株価$\{P_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$の変動は確率微分方程式

$$dP_k(t)=\mu_k P_k(t)\,dt+\sigma_k P_k(t)\,dZ_k(t) \quad (4)$$

で表現されるものと仮定する．ただし，μ_kとσ_kはそれぞれ株式kの収益の瞬時的な平均と標準偏差を表わし，Z_kは標準ウイナー過程とする．すなわち，

$$dZ_k(t)\sim N(0,\ dt)\ (k=1,\ 2, \cdots, N)$$

である．このとき，時刻tにおける株価指数$I(t)$とは，N個すべての株価，またはその一部であるn個の株価を用いて

$$I(t)=I\{P_1(t),\ P_2(t),\ \cdots,\ P_n(t)\}$$

のように表わされる数値である．ただし，$n\leqq N$である．

この株価指数$I(t)$の変動は，その形がどのようなものであろうと，伊藤のレンマより

$$\begin{aligned} dI(t)=\{&\sum_{k=1}^{n}(\partial I/\partial P_k)P_k\mu_k \\ &+(1/2)\sum_i\sum_j(\partial^2 I/\partial w_i\partial w_j)P_iP_j\sigma_{ij}\}\,dt \\ &+\sum_{k=1}^{n}(\partial I/\partial P_k)P_k\sigma_k\,dZ_k+\sum_{k=1}^{n}(\partial I/\partial w_k) \\ &dw_k+\sum_i\sum_j(\partial^2 I/\partial P_i\partial P_j)\,dP_i\ dw_j \\ &+(\partial^2 I/\partial w_i\partial w_j)\,dw_i\,dw_j\} \end{aligned} \quad (5)$$

のように表現される[9]．

現実に最も広く用いられている株価指数は加重平均株価指数であり，

$$I(t)=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)P_k(t) \quad (n\leqq N)$$

のように表現され，さらに，w_kの形から次の2つに大別できる．

(1) 時価総額加重平均（TOPIXがその例）

時刻tにおける各企業の発行株式数を$U_1(t)$, $U_2(t)$, …, $U_N(t)$とするとき，

$$w_k(t)=U_k(t)／基準時価総額$$

で与えられる指数である．たとえば，TOPIXでは1968年1月4日の時価総額を基準値として，発行株式数の増減により分母が逐次修正される．伊藤のレンマと基準時価総額の変動が微小なことを利用すれば，時価総額加重平均の株価指数の変動は

$$dI=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)\,dP_k(t)$$

のように各株式の価格変動の加重平均になることがわかる．

(2) 均等加重平均（たとえば日経225）

$n(\leqq N)$個の株価の単純平均で与えられる指数であり

$$w_k(t)=1／n\quad(k=1,\ 2, \cdots, n)$$

なる一定の加重を用いるものである．明らかに

$$dw_k(t)=0$$

であるから，その変動は

$$\begin{aligned} dI&=\{(\sum_{k=1}^{n}P_k\mu_k)\,dt+(\sum_{k=1}^{n}P_k\sigma_kZ_k)\}／n \\ &=\sum_{k=1}^{n}dP_k／n \end{aligned}$$

のように個別銘柄の価格変動の算術平均になっている．

これらの結果を利用すれば，各指数の確率過程としての性質を議論することができ，たとえば，日経225とTOPIXの変動の違いなども定量的に比較できることになる．

3. 株価指数に対する条件付き請求権と偏微分方程式

個別株式$\{P_k(t); k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$の価格変動が前節のような簡単な確率微分方程式（幾何ブラウン運動）

$$dP_k(t)=\mu_k P_k(t)\,dt+\sigma_k P_k(t)\,dZ_k(t)$$

で表現されるとき，これらn個の株式から構成される株価指数$I\{P_1(t),\ P_2(t), \cdots, P_n(t)\}$に対する条件付き請求権（特に，先物とオプション）の評価式を考える．摩擦のない連続的取引市場で，一定の市場利子率ρが既知であると仮定すれば，裁定理論を用いることにより，株価指数に対する満期日がTの条件付き請求権の時刻t

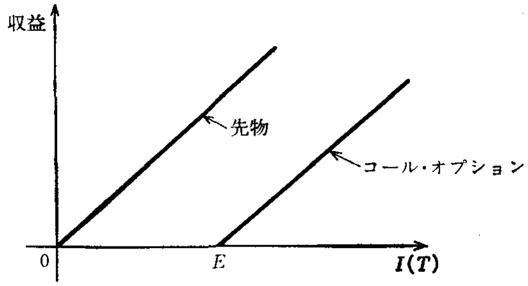

図 2 先物とコール・オプション

における均衡価格 $F(t, P_1(t), \cdots, P_n(t); T)$ はすべて偏微分方程式

$$(\partial F / \partial t) = \rho F - \rho \sum_{k=1}^{n} P_k (\partial F / \partial P_k)$$
$$-(1/2) \sum_i \sum_j (\partial^2 F / \partial P_i \partial P_j) P_i P_j \sigma_{ij} \quad (6)$$

を満足しなければならないことが知られている[3, 5]. 条件付き請求権は，先物やオプションのようにさまざまな種類があるが，それらの違いは図2が示すように満期日 T における境界条件だけの違いである．以下では例として，株価指数先物とヨーロッパ型コール・オプションについて考える．

(1) 株価指数先物

先物では満期日 T において現物価格と先物価格が等しくなることであり，境界条件が

$$I\{P_1(T), \cdots, P_n(T)\} = F(T, P(T)) \quad (7)$$

と表わされる．

(2) ヨーロッパ型指数オプション

ヨーロッパ型指数オプションとは，現物の株価指数を満期日 T において行使価格と呼ばれる価格 E で購入する権利である．この場合の境界条件は

$$F(T, P(T)) = \max(0, I\{P(T)\} - E) \quad (8)$$

のように表現できる．

これらの境界条件(7)または(8)を満たし，上の偏微分方程式(6)を満足する解 $F(t, P; T)$ を求める境界値問題の解決には，数学的にきわめて困難な手続きをふまなければならないであろう．ところが，ファイナンスの裁定理論を利用すれば，以下のようにその解を簡単に求めることができる．

まず(7)の先物について考えよう．$n=1$ に対する偏微分方程式は

$$(\partial F / \partial t) = \rho F - \rho P (\partial F / \partial P)$$
$$-(1/2) \sigma^2 P^2 (\partial^2 F / \partial P^2) \quad (9)$$

で，境界条件は

$$F(T, P(T)) = P(T) \quad (10)$$

と書ける．ここで，変換

$$F(t, P) = e^{\rho(t-T)} \phi[2(\rho - \sigma^2/2)$$
$$/\sigma^2 \{\log P(t) - (\rho - \sigma^2/2)(t-T)\},$$
$$-2(\rho - \sigma^2/2)^2 (t-T)/\sigma^2]$$
$$= e^{\rho(t-T)} \phi[u, s]$$

をほどこせば，

$$(\partial \phi / \partial s) = (\partial^2 \phi / \partial u^2) \quad (11)$$

なる熱伝導方程式が得られる．このとき，境界条件(5)は変換により

$$\phi(u, 0) = e^{Au} \quad (-\infty < u < \infty)$$

で与えられる．ただし，

$$A = \sigma^2 / (2\rho - \sigma^2)$$

である．微分方程式の標準的な解法を適用すれば，この境界値問題の解は

$$\phi(u, s) = \exp(Au + A^2 s)$$

となり，変換前の形にもどせば

$$F(t, P(T)) = P(t) e^{-\rho(t-T)}$$

で与えられ，これは $n=1$ に対する境界値問題の解である[8, 9].

以上の結果は株価指数に含まれる任意の個別株式 ($k=1, 2, \cdots, n$) すべてに対して成立するから，n コの株価で作成されている株価指数先物に対してもその指数の形で成立していなければならない（もし成立していなければ，裁定が行なわれる）．したがって，株価指数先物に対する評価式は

$$F(t, I(t); T) = I(t) e^{-\rho(t-T)} \quad (12)$$

で与えられなければならない．

以上の結果は裁定を用いたパリティ表の考え方を利用すればもっと簡単に誘導できる[6, 7]. まず，時刻 t において先物1単位を購入したとき，満期日 T での価値 $a(T)$ は

$$a(T) = F(T, I) - F(t, I)$$

である．利子率 ρ で $e^{-\rho(T-t)} F(t, I)$ を借入れ，同時に指数の現物を1単位購入して T まで保有すると，T での価値 $b(T)$ は

$$b(T) = I(T) - F(t, I)$$

である．満期日 T においては

$$F(T, I) = I(T)$$

が成り立つから，

$$a(T) = b(T)$$

となる．したがって，先物の現在価値 $a(t)$ と $b(T)$ の現在価値は等しくなり

$$b(t) = I(t) - e^{-\rho(T-t)}F(t, I)$$

である．先物取引では取引日０においては現金の動きがなにも生じず，契約のみが行なわれる点に特徴がある．キャッシュ・フローは満期日（または手じまいをした場合にはその日）においてのみ発生する．したがって，先物を購入した場合の現在価値 $a(t)$ は０であるから，

$$b(t) = 0$$

となり，結局

$$F(t, I) = e^{-\rho(t-T)}I(t)$$

と書き表わすことができ，前述の結果と一致している．したがって，これが境界条件(7)のもとでの偏微分方程式(6)の解である．

次に，コール・オプションに対する境界値問題(8)の解を導出してみよう．$n=1$，すなわち，個別銘柄に対するヨーロッパ型オプションの評価式はブラックとショールズ (Black and Scholes) の公式としてよく知られているように[1]，$\tau = T - t$ として

$$F(\tau) = PN(d) - \exp(-\rho\tau)E\, N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \qquad (13)$$

（ただし，$N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数，

$$d = \{\log(P/E) + (\mu + \sigma^2/2)\tau/\sigma\sqrt{\tau}\})$$

であった．したがって，株価指数を原証券とするコール・オプションの評価式（境界条件(8)のもとでの偏微分方程式(6)の解）は，(13)式の P の代わりに指数 I を代入したものになっている．すなわち，

$$F(\tau) = IN(d') - \exp(-\rho\tau)E\, N(d' - \sigma\sqrt{\tau}) \qquad (14)$$

で与えられる．ただし，

$$d' = \{\log(I/E) + (\mu + \sigma^2/2)\tau/\sigma\sqrt{\tau}\})$$

であり，μ と σ はそれぞれ株価指数 $I(t)$ の変動の平均と標準偏差を表わす．

6. おわりに

本稿ではポートフリオォと条件付き請求権に関する数理的側面に視点をあて，いくつかの問題点を指摘した．伝統的ポートフォリオおよびファイナンス理論では，期待効用理論と均衡価格の形成という２つの厚い壁に取り囲まれて身動きのできない状態になっている．ところが，現実の投資の局面をＯＲ的センスで考察しようとするポートフォリオ工学では，はるかに自由な扱いと豊かな成果が期待できる．この分野に少し触れただけでも，ここで示したような興味深い問題が存在することがわかるが，本稿が今後の理論の発展に寄与できれば幸いである．

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes; "The Pricing Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81 (1973).

[2] Chi-fu Huang and R. H. Litzenberger; "*Fundations for Financial Economics*," North-Holland. (1988).

[3] J. C. Cox, J. Ingersoll, and S. A. Ross; "The Relations between Forward Prices and Futures Prices." *Journal of Financial Economics* 9 (1981).

[4] 大和証券経済研究所編；"株価指数先物の考え方と実際"，東洋経済新報社，(1988).

[5] T. H. Eytan and G. Harpaz; "The Pricing of Futures and Options Contracts on the Value Line Index." *The Journal of Finance*, Vol. xli, No. 4, (1986).

[6] 久保田敬一；"オプションと先物" 東洋経済新報社，(1988).

[7] 倉澤資成；"株価指数先物取引について"，ファイナンス研究 8, 1-26, (1988).

[8] 田畑吉雄；"株先50とその評価について" ファイナンス研究 9, 45-51, (1988).

[9] 田畑吉雄；"株価指数とその先物の株価形成，" 大阪大学経済学 38, 3・4, 43-52, (1989).