整数多面体理論の乗員スケジューリング問題への適用

石井宏和（東京理科大学工学研究科経営工学専攻；現所属：日本アイ・ビー・エム）指導教官　西田直矩教授

1. はじめに

乗員のスケジューリング問題は，与えられた交通手段（バス，電車など，以下ビークルと呼ぶ）のダイヤに対して，乗員の労働条件を満足しながら，最小人数でビークルのダイヤをすべて満たす運行やスケジュールを決定する問題である．この問題は，労働条件などの複雑な制約を含むことや，定式化したときの変数の数が，ビークルのダイヤの運行本数に依存することから膨大な数になるなどの問題を含んでいる．

本論文では，この乗員スケジューリング問題を集合分割問題として定式化し，集合分割問題に対して整数多面体理論を適用する新しいアプローチを提案している．

2. 問題の定式化

乗員スケジュールは，1台のビークルを1人の乗員が連続して運転しなければならないD-Tripと，D-Tripの組合せにより構成される乗員1人の1日のスケジュールであるRunからなる．ここでは，そのような構成要素からなる乗員スケジューリング問題を集合分割問題で定式化し，問題(P1)とする．

《集合分割問題による定式化》

$$(\mathrm{P1})\quad \begin{array}{|ll} \min & \boldsymbol{cx} \qquad (1)\\ \text{Sub to.} & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e} \qquad (2)\\ & x_j=1 \text{ or } 0,\quad \text{for all } j \qquad (3) \end{array}$$

$\boldsymbol{c}$：各Runの候補の費用に相当するm次元ベクトル．最小人数で運行するスケジュールを決定する問題の観点から，すべての要素を1とする．

A：Aは，$n\times m$ の0－1行列で，その行は，D-Tripに対応し，列は運行可能なD-Tripの組合せ(Run)を列挙したもの

$\boldsymbol{x}$：係数行列Aの列に相当するRunが解に含まれるならば1，さもなければ0である0－1整数変数．

$\boldsymbol{e}$：すべての要素が1であるn次元縦ベクトル．

上記の集合分割問題は，整数計画問題であることから，一般に分枝限定法や切除平面法を基にしたアプローチが知られている．しかし，本問題は変数の数が膨大なことから，これらの解法は計算効率上，実用的な方法とは言えない．しかし，もし実行可能領域の端点が整数値ならば，整数計画問題であっても連続緩和問題を1回解けば最適解が得られる．そこで，実行可能領域の端点が整数値になるように，本問題に整数多面体理論の適用を考え，以下にその性質を示す．

3. 整数多面体

ここで，整数多面体の定義を以下に示す．

《整数多面体の定義》

$$P=\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^m \mid A\boldsymbol{x}\leqq \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}\geqq \boldsymbol{0}\} \qquad (4)$$

$$P_1=\mathrm{Conv.}\{\boldsymbol{x}\in P \mid x_j=1 \text{ or } 0, \text{for all } j\} \qquad (5)$$

式(4)と(5)で表わされる多面体において，$P=P_1$ ならば，多面体Pを整数多面体と呼ぶ．

整数多面体を定義している係数行列Aについて，70年代はじめから多くの研究がなされ，本研究では，その代表的なものの1つであるC. Bergeにより提案されたBalanced 行列[2]を乗員スケジューリング問題へ適用する方法を提案する．

《Balanced 行列の定義》

行列Aの任意の部分行列が，奇数の循環行列でないとき，行列AをBalanced行列と呼ぶ．（奇数の循環行列：$k\times k$の0－1行列Aで，kが奇数で各行と各列のそれぞれの要素の和が厳密に2であるとき，行列Aを奇数の循環行列と呼ぶ）

4. アルゴリズムの概要

ここでは，アルゴリズムの概要を示す．

4.1 Balanced行列の適用

集合分割問題の係数行列Aが，Balanced 行列ならばその実行可能領域は整数多面体である．よって，ここでは，Balanced 行列になるように係数行列の Run 候補を列挙する方法を示す．D-Trip を点集合Vとし，2つのD-Tripが連続運行可能ならば存在する枝集合Eとし，グラフ$H=(V,E)$を定義する．運行可能なRunの候補は，このグラフ上のPathに対応し，グラフ上で Path を見つけることで係数行列を列挙できる．

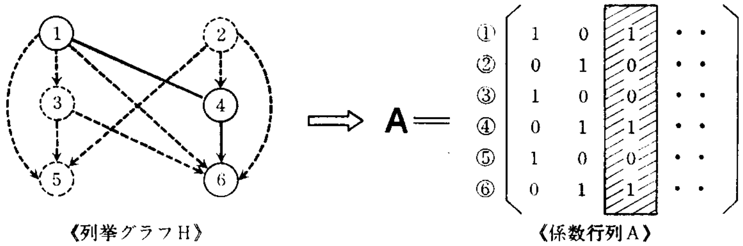

図 1 列挙アルゴリズムと係数行列

ここで，Balanced で行列を列挙するグラフHの構造について考えると，次の補題が成り立つ．

【補題1】 グラフHが木構造ならば，列挙される係数行列は Balanced 行列である．

このように，列挙グラフを木構造に限定するために，列挙グラフ上の枝の一部を削除する必要があり，最適解において含まれるであろうと予想される枝を残す方針で，木構造の列挙グラフを作成する方法を考える．そのため，枝の重みをその両端であるD-Tripの運行終了時間と開始時間の時間差とし，このようにして定義したグラフ上で最小木問題を解くことにより，木構造の列挙グラフが得られる．

以上のような方法で生成されるBalanced行列の領域は，整数多面体で，連続緩和問題を解くことにより整数解が得られ，その最適解の目的関数値をzとする．しかし，この解は，列挙グラフHを木構造に限定していることから，最適性は保証されていない．

4.2 領域の拡大と最適性

よって，領域を全実行可能領域に拡大して最適性を確認する必要があると考えられる．

また，実行可能な乗員スケジュールの候補をすべて列挙することから，問題の変数の数が膨大になると考えられ，問題を変更し縮小することを提案する．まず，問題(P1)を集合被覆問題に変更し，(P2)とする．

$$(\mathrm{P2})\quad\left|\begin{array}{lr} \min\ \ \boldsymbol{cx} & (1)\\ \text{Sub to. } A\boldsymbol{x}\geqq \boldsymbol{e} & (6)\\ \qquad x_j=1 \text{ or } 0,\quad \text{for all } j & (3)\end{array}\right.$$

問題を変更することにより，問題(P2)の係数行列Aの任意の列ベクトルを$\boldsymbol{a}_j$とすると

$$\boldsymbol{a}_k\leqq\boldsymbol{a}_j \qquad (7)$$

である列$\boldsymbol{a}_k$は削除できる．

問題(P2)の連続緩和問題の最適解の目的関数値をz_1とすると，問題の定義から，

$$z^*-z_1<1 \qquad (8)$$

ならば，Balanced 行列の領域から得られた解が最適解であるといえる．

また，問題(P2)の最適解において，相対コスト係数がz^*-z_1を越える列が含まれることがない集合被覆問題の性質[3]から，上記の連続緩和問題の解を用いて問題の縮小を行なうことができる．

4.3 解の改良

もし，Balanced 行列の領域から得られた解が最適解でなければ，解を改良する必要があり，M. Bellmoreらの解法[1]を適用する．

4.4 アルゴリズム

以上示した方法をもとに，提案するアルゴリズムの概要を以下に示す．

《アルゴリズムの概要》

Step 0：データを入力する．

Step 1：最適解に含まれると予想される枝を選択して(詳細は省略)木構造のグラフを作成し，集合分割問題の係数行列を作成する．

Step 2：集合分割問題の連続緩和問題を解き解を得る

Step 3：領域を拡大して最適性を判定する．Balanced行列の領域の解が最適解ならばStep 5へ，さもなければStep 4へ．

Step 4：問題を縮小して，切除平面法[1]により最適解を得る．

Step 5：解を出力する．

5. 結　論

本研究で乗員スケジューリング問題に対して提案したアルゴリズムを用いて数値実験を行なった結果，Balanced 行列による実行可能領域は，きわめて狭い領域であるにもかかわらず，最適もしくはそれに近い解が得ら

れる可能性が高いことがわかった．

参考／引用文献

[1] M. Bellmore and H. D. Ratiliff, "Set Covering and Involutory Bases," *Management Science*, 18, 194-206 (1971).

[2] C. Berge, "Balanced Matrices," *Mathematical Programming*, 2, 19-31 (1972).

[3] J. F. Pierce and J. S. Lasky, "Improved Cambinatorial Programming Algorithms for a Class of All-Zero-One Integer Programming Problems," *Management Science*, 5, 528-543 (1973).

[4] A. Wren, "General Review of the Use of Computers in Scheduling Buses and their Crews," Computer Scheduling of Public Transport, North-Holland Publishing Company, 3-18 (1981).

学生論文賞受賞論文　　要約

Dual-Based Newton Method for Nonlinear Minimum Cost Network Flow Problems

茨木　智（京都大学大学院工学研究科数理工学専攻）指導教官　茨木俊秀

1. はじめに

非線形な費用関数を持つネットワーク最適化問題は実用的な問題の1つで，さまざまな応用がなされている．その解法もまたさまざまであり，降下法に属する多くの方法が試みられている．本報告では，分離可能な費用関数を持つ非線形最小費用流問題を考察する．この問題に対しては，これまでニュートン法[3,4]などさまざまな方法が提案されている．また，費用関数が狭義凸関数のとき，この問題の双対問題は微分可能な目的関数を持つ制約なしの最適化問題となることに着目して，[1,6]ではGauss-Seidel型の緩和法を双対問題に適用している．ここでは，双対問題に対して，ニュートン法の考え方を直接適用し，その問題の構造を利用したアルゴリズムを提案する．

2. 問　題

節点の集合$N=\{1,2,\cdots,m\}$，枝の集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$で構成される有向グラフ$\Gamma=(N,A)$において，各枝a_jのフローをx_j，費用を$f_j(x_j):R\to R\cup\{+\infty\}$で表わす．次の最小費用流問題を考える．

(P)　minimize $f(x)\equiv\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$

　subject to $\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j=b_i,\ i\in N-\{m\}$

ここで，e_{ij}はグラフΓの接続行列$E\in R^{(m-1)\times n}$の要素であり，b_iは各節点$i\in N$の需要（供給）量を表わしている．

一般に最小費用流問題では，費用関数$f_j(x_j)$はすべてのx_jにおいて有限値をとり，フローx_jの値が枝の上下限値u_j, l_jに対して$l_j\leq x_j\leq u_j$を満たすという制約を考えるのがふつうである．このような場合には，枝a_jの費用関数を次式で定義することにより，等価性を失うことなく問題(P)の形に帰着できる．

$$f_j(x_j)=\begin{cases}\hat{f}_j(x_j) & x_j\in[l_j,u_j]\ のとき\\ +\infty & それ以外のとき\end{cases}$$

以下では，各費用関数$f_j(x_j)$に対して次の性質を仮定する．

仮定1　集合$\{x_j|f_j(x_j)<+\infty\}\subset R$において，関数$f_j$は下半連続かつ狭義凸である．

仮定2　関数f_jはco-finite[5]である．すなわち，f_jは$\lim_{x_j\to\pm\infty} f_j(x_j)/|x_j|=+\infty$を満たす．

3. 双対問題

この節では，主問題(P)の双対問題を定式化し，その目的関数の微分可能性について考察する．ラグランジュ乗数ベクトルを$p\in R^{(m-1)}$（p_iは節点のポテンシャルとも呼ばれる）とすれば，双対問題(D)は次のようになる．