連載講座

静的ポートフォリオ理論とCAPM

――ファイナンス理論とその応用(2)――

Huang Chi-fu*, 浦谷 規†

1. はじめに

静的ポートフォリオ理論では,投資家は収益率の平均値と分散にしたがってポートフォリオを決定すると仮定している.すなわち,平均値を大きく,分散を小さくする投資である.この資産選択の平均分散モデルは,およそ40年前の Markowitz (1952) 以来,ファイナンスにおいてさかんに使われてきた.その理由は,仮定の一般性にあるのではなく,その解析性の良さにある.しかも平均分散モデルに需給均衡条件を付加すると,資産の期待収益率のCapital Asset Pricing Model(CAPM)と呼ばれる現在でも,最も重要な資産評価モデルが導かれる.

今回は,静的ポートフォリオ理論を簡潔に説明し,均衡における資産期待収益率に関する結果を導く.また,CAPMの応用として,資本予算法および証券投資への適用を紹介する.構成は,第2節で静的ポートフォリオ理論,第3節でCAPMを導入するためのフロンティア・ポートフォリオの数理,第4節でCAPM,第5節でCAPMの応用,最後が結論である.

2. 静的ポートフォリオ理論

静的ポートフォリオ理論は,投資家が選択する最適ポートフォリオの集合を研究する.投資家はポートフォリオの期待収益率を好み,その分散をきらうと仮定すると,最適ポートフォリオの集合は,ある期待収益率に対して最小の分散をもつポートフォリオである.この集合が**ポートフォリオ・フロンティア**と呼ばれ,分散と期待値を軸として表わすと放物線になり,標準偏差と期待値を軸とすると双曲線になる.ポートフォリオ理論の基本的結果の1つはポートフォリオ・フロンティアの**2ファンド分離性**にある.つまり,フロンティア・ポートフォリオの集合は,フロンティア上の任意の2つのポートフォリオで生成される.この特性はすべての投資家を満足する投資信託が存在する場合には,フロンティア上にある投資信託を2つ保有するだけで,任意のフロンティア・ポートフォリオをもつことを意味する.

2ファンド分離性を導いてみよう.取引費用税等のない(摩擦のない)市場で,$N\geq 2$ の危険資産が存在し,その収益率の分散が有限で,その期待値は等しくないと仮定する.さらに収益率は線形独立でその共分散行列Vは正則であるとする.Vは共分散行列であるから,対称で正定値である.第i資産の収益率を$\tilde{r}_i$と記し,そのN次ベクトルを$\tilde{r}$とする.

ポートフォリオが**フロンティア・ポートフォリオ**であるとは,同一の期待収益率のポートフォリオの中で分散が最小のものである.したがってフロンティア・ポートフォリオは次の2次計画問題の解である.

$$\begin{aligned}&\min_{w}\ \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{w}^{\top}e=E[\tilde{r}_p],\\&\qquad \boldsymbol{w}^{\top}\mathbf{1}=1,\end{aligned}\tag{1}$$

ただし e はN種の資産の期待収益率のベクトル,$E[\tilde{r}_p]$ はポートフォリオpの所与の期待収益率.

ラグランジェ関数により,求まる解を w_p とすると,

$$\min_{\boldsymbol{w},\lambda,\gamma} L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}+\lambda(E[\tilde{r}_p]-w^{\top}e)+\gamma(1-w^{\top}\mathbf{1}),$$

ここでλ, γは正定数であり,1階の条件より

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_p-\lambda e-\gamma\mathbf{1}=0,\tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=E[\tilde{r}_p]-\boldsymbol{w}_p{}^{\top}e=0,\tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}=1-\boldsymbol{w}_p{}^{\top}1=0,\tag{4}$$

Vは正定値であるから,(2),(3),(4)は最適解の必要十分条件である.(2)を解くと

$$w_p=\lambda(V^{-1}e)+\gamma(V^{-1}\mathbf{1}).\tag{5}$$

* マサチューセッツ工科大学

† うらたに ただし 静岡県立大学

〒422 静岡市谷田395

(5)に e^{T} を左からかけて(3)を用いると

$$E[\tilde{r}_p]=\lambda(e^{\mathrm{T}}V^{-1}e)+\gamma(e^{\mathrm{T}}V^{-1}\mathbf{1}). \tag{6}$$

(5)に $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ を左からかけて(4)を用いると

$$1=\lambda(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}V^{-1}e)+\gamma(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}V^{-1}\mathbf{1}). \tag{7}$$

となる．(6)(7)を λ と γ について解くと，

$$\lambda=\frac{CE[\tilde{r}_p]-A}{D}$$

$$\gamma=\frac{B-AE[\tilde{r}_p]}{D}$$

ただし

$$A=\mathbf{1}^{\mathrm{T}}V^{-1}e=e^{\mathrm{T}}V^{-1}\mathbf{1},$$

$$B=e^{\mathrm{T}}V^{-1}e,$$

$$C=\mathbf{1}^{\mathrm{T}}V^{-1}\mathbf{1},$$

$$D=BC-A^2.$$

V^{-1} も正定値だから，$B>0, C>0$．D も正であることは次の式から明らかになる．

$$(Ae-B\mathbf{1})^{\mathrm{T}}V^{-1}(Ae-B\mathbf{1})=B(BC-A^2).$$

(5)に λ と γ を代入すると期待収益率 $E[\tilde{r}_p]$ が所与のポートフォリオは，2組のポートフォリオの重み g と h で表わされる．

$$w_p=g+hE[\tilde{r}_p], \tag{8}$$

ただし

$$g=\frac{1}{D}[B(V^{-1}\mathbf{1})-A(V^{-1}e)]$$

$$h=\frac{1}{D}[C(V^{-1}e)-A(V^{-1}\mathbf{1})].$$

g と $g+h$ とはそれぞれ期待収益率0と期待収益率1のフロンティア・ポートフォリオである．(8)式は w_p がフロンティア・ポートフォリオであるための必要十分条件である．

(8)式は2ファンド分離性そのものを表わしている．p_1 と p_2 を2つのフロンティア・ポートフォリオとし，q を任意のポートフォリオとする．$E[\tilde{r}_{p_1}]$ と $E[\tilde{r}_{p_2}]$ は等しくないので，次式を満たす実数 α が存在する．

$$E[\tilde{r}_q]=\alpha E[\tilde{r}_{p_1}]+(1-\alpha)E[\tilde{r}_{p_2}].$$

そこで，p_1 と p_2 を $\{\alpha,(1-\alpha)\}$ の重みで保有するポートフォリオを考えると，次のように w_q 表わされる．

$$\begin{aligned}\alpha w_{p_1}+(1-\alpha)w_{p_2}&=\alpha(g+hE[\tilde{r}_{p_1}])\\&\quad+(1-\alpha)(g+hE[\tilde{r}_{p_2}])\\&=g+hE[\tilde{r}_q]\\&=w_q.\end{aligned}$$

かくして，すべてのフロンティア・ポートフォリオは任意の2つのポートフォリオで「生成」することができる．

逆に2組のフロンティア・ポートフォリオからなる任意のポートフォリオは，またフロンティア・ポートフォリオである．つまり，ポートフォリオ・フロンティアは線形空間である．これは，α を任意の実数とすると，$\alpha w_{p_1}+(1-\alpha)w_{p_2}$ は(8)式の形に表わされることから明らかである．したがって有限個のフロンティア・ポートフォリオからなるポートフォリオはフロンティア上にある．

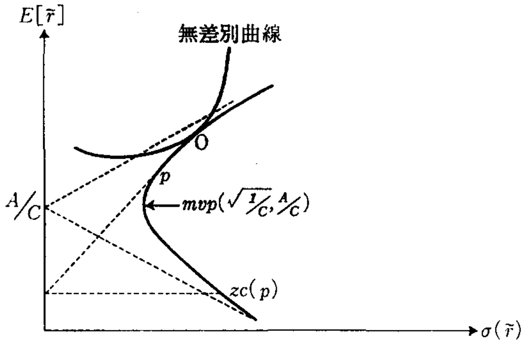

図 1 ポートフォリオ・フロンティア(安全資産なし)

最適ポートフォリオの特性をふまえた上で，投資家はいかにポートフォリオ選択をするか考えてみよう．これを図解でみるために，ポートフォリオ・フロンティアの幾何学的性質を明らかにしよう．

任意の2つのフロンティア・ポートフォリオ p および q の収益率の共分散は定義より次のとおりとなる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)&=w_p^{\mathrm{T}}Vw_q\\&=\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-A/C)(E[\tilde{r}_q]-A/C)+\frac{1}{C}.\end{aligned} \tag{9}$$

(9)式と分散の定義から，ポートフォリオ・フロンティアは次のとおりの分散と期待収益率を軸とするとき，放物線になる．

$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C}-\frac{(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2}{D/C^2}=1, \tag{10}$$

また標準偏差と期待収益率を軸とすると，図1に示すとおり，中心が $(0, A/C)$ で漸近線が $E[\tilde{r}_p]=A/C\pm\sqrt{D/C}\,\sigma(\tilde{r}_p)$ の双曲線となる．

図1の点 $(\sqrt{1/C}, A/C)$ は，すべてのポートフォリオの中で分散が最小なので，これを**最小分散ポートフォリオ**（mvp）と呼ぶ．投資家は期待収益率を好み，分散を嫌うので A/C より期待収益率が低いポートフォリオは選択しない．なぜなら，ある分散に対して，最も大きい期待収益率を示すのは，A/C より上のフロンティアであるからである．この mvp より上のフロンティア・ポートフォリオを**効率的フロンティア・ポートフォリオ**と

呼ぶ．逆に，mvp より下を**非効率的フロンティア・ポートフォリオ**と呼ぶ．(8)式から，(非)効率的フロンティア・ポートフォリオの凸結合はまた(非)効率的フロンティア・ポートフォリオである．したがって，(非)効率的ポートフォリオは凸集合である．

投資家は2次のモーメントまで関心があり，期待収益を好み分散を嫌うので，投資家の無差別曲線は図1のとおりの右上りとなる．無差別曲線上では期待収益率と分散から得られる満足度が同一であり，北西偶が最も高い満足度を表わす．投資家にとっての最適ポートフォリオは，図1に示すように，無差別曲線とポートフォリオ・フロンティアの接点Oとなる．

ここまでは安全資産が存在しないと仮定したが，存在するときには今までより分析が簡単になる．wをN次の危険資産のポートフォリオの投資比率とすると，安全資産への投資比率は $(1-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})$ である．ポートフォリオ・フロンティアは，所与の $E[\tilde{r}_p]$ に対する次の最小化問題の解のN種の危険資産投資比率 w_p である．

$$\min_{\boldsymbol{w}} \ \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}$$
$$\text{s.t.} \ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}e+(1-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})r_f=E[\tilde{r}_p], \tag{11}$$

ただし r_f は安全資産収益率．ラグランジェ関数を用いて，1階条件を求めると

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_p=\lambda(e-r_f\mathbf{1})$$
$$r_f+\boldsymbol{w}_p^{\mathrm{T}}(e-r_f\mathbf{1})=E[\tilde{r}_p].$$

となり，w_p について解くと

$$\boldsymbol{w}_p=\boldsymbol{V}^{-1}(e-r_f\mathbf{1})\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}, \tag{12}$$

ただし，$H=(e-r_f\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(e-r_f\mathbf{1})=B-2r_fA+r_fC$.

ポートフォリオpの分散は

$$\sigma^2(\tilde{r}_p)=\boldsymbol{w}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_p=\frac{(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2}{H}. \tag{13}$$

したがって，ポートフォリオ・フロンティアは，点$(0,r_f)$を始点とする傾き$\sqrt{H}$および$-\sqrt{H}$の2つの半直線である．正の傾きの半直線が効率的ポートフォリオ・フロンティアで，負の傾きが非効率的ポートフォリオ・フロンティアである．$r_f<A/C$ のときに，図2のとおりの $(0,r_f)$ を始点とする効率的なポートフォリオ・フロンティアが危険資産だけのポートフォリオ・フロンティアにeで接する．この接点eより上のポートフォリオでは，安全資産を借りて接点のポートフォリオeと同じ比率で危険資産に投資をする．r_fとeの間では，安全資産と接点ポートフォリオの凸結合の投資となる．r_fより下では，接点ポートフォリオeを空売りした資金で安全資産へ投資する．

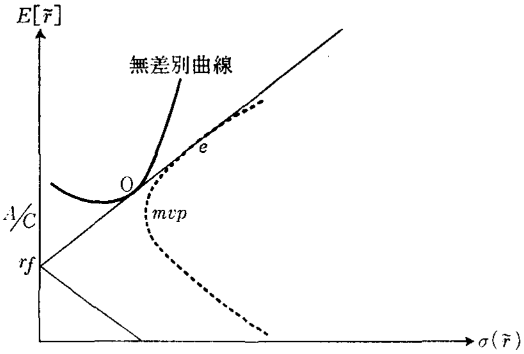

図 2 ポートフォリオ・フロンティア(安全資産あり)

投資家の最適投資は，図2のとおり無差別曲線とポートフォリオ・フロンティアとの接点0で決定される．

3. ポートフォリオ・フロンティアの数理

CAPMの準備としてポートフォリオ・フロンティアについて詳細にみてみよう．

まず安全資産が存在しない場合から始めよう．

一般的に mvp は次の性質を持つ．

$$\mathrm{Cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{mvp})=\sigma^2(\tilde{r}_{mvp})=\frac{1}{C}, \tag{14}$$

つまり，mvp と必ずしもフロンティアにない任意のポートフォリオpの共分散は常にmvpの分散に等しい．これを証明するために，mvp を $(1-a)$ だけ，任意のポートフォリオpをa保有するポートフォリオの分散の最小化を考えよう．mvp は最小分散ポートフォリオであるから，次の問題の $a=0$ のときの解が mvp である．

$$\min_{a} a^2\sigma^2(\tilde{r}_p)+2a(1-a)\,\mathrm{Cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{mvp})$$
$$+(1-a)^2\sigma^2(\tilde{r}_{mvp}).$$

1階の必要十分条件に $a=0$ を代入すると，(14)式が導かれる．

次にCAPMを導出するために有用な2つの特性を示そう．第1に，mvp 以外のフロンティア上の任意ポートフォリオpに対して，共分散が零になる唯一のフロンティア・ポートフォリオが存在し，それを $zc(p)$ と記す．第2に，任意のポートフォリオの期待収益率は，mvp 以外の任意のフロンティア・ポートフォリオ p とその $zc(p)$ の期待収益率とに線形関係をもつ．$zc(p)$ の期待収益率は(9)式の共分散を零とすると次のように求められる．

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]=A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}. \tag{15}$$

(14)式から mvp の零共分散ポートフォリオは存在しないことがわかるが，(15)式はこれを確認させる．また(15)式は $zc(p)$ の図1における位置も示している．p が効率的フロンティア・ポートフォリオとすると，(15)より

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]<A/C.$$

故に $zc(p)$ は非効率的フロンティア・ポートフォリオである．同様に p が非効率的であれば，$zc(p)$ は効率的である．図1に見られるように，$zc(p)$ は p からの接線が縦軸と交わる点を期待収益率とするフロンティア上にある．これは，(10)式を $\sigma(\tilde{r}_p)$ と $E[\tilde{r}_p]$ に関して全微分すると，点 $(\sigma(\tilde{r}_p), E[\tilde{r}_p])$ における接線の傾きが次のとおり得られる．

$$\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{\sigma(\tilde{r}_p)D}{CE[\tilde{r}_p]-A},$$

接線の縦軸との交点は

$$E[\tilde{r}_p]-\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}\sigma(\tilde{r}_p)$$

であり，$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$ と同じになる．

さて，必ずしもフロンティア上にない任意のポートフォリオ q の期待収益と mvp 以外のフロンティア・ポートフォリオ p の期待収益との関係を考えよう．$\tilde{r}_p$ と $\tilde{r}_q$ との共分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)&=\boldsymbol{w}_p^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_q\\&=\lambda E[\tilde{r}_q]+\gamma.\end{aligned} \tag{16}$$

λ と γ を(16)式に代入すると，(17)式が得られる．

$$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]), \tag{17}$$

ただし $\beta_{qp}\equiv\mathrm{Cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)/\sigma^2(\tilde{r}_p)$

(17)式は，mvp 以外のフロンティア・ポートフォリオ p に対して，任意のポートフォリオ q の期待収益率と「ベータ」に線形関係が存在する．p が効率的フロンティア上にあるときに $E[\tilde{r}_p]>E[\tilde{r}_{zc(p)}]$ だから，β_{qp} が大きければ大きいほど，q の期待収益率は p に比べて大きくなる．

次に安全資産が存在する場合を考えよう．(17)と同様な関係が次のようにして導かれる．q を任意のポートフォリオ，p をフロンティア・ポートフォリオ，$\boldsymbol{w}_q$, $\boldsymbol{w}_p$ をそれぞれの N 種の危険資産への投資比率とする．また，$E[\tilde{r}_p]\neq r_f$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)&=\boldsymbol{w}_q^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_p\\&=\frac{(E[\tilde{r}_q]-r_f)(E[\tilde{r}_p]-r_f)}{H}\end{aligned}$$

さらに(13)を用いると

$$E[\tilde{r}_q]=r_f+\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-r_f). \tag{18}$$

これは，任意のポートフォリオ q の期待収益率とフロンティア・ポートフォリオ p に関する「ベータ」には線形関係があることを示している．(17)および(18)は数学的関係式であって，有限の分散をもつ確率変数に対して，常に成り立つ．

4. CAPM

均衡における資産の期待収益率に関するポートフォリオ理論，すなわちCAPMを紹介しよう．投資家は効率的フロンティア・ポートフォリオ選好し，しかも安全資産が存在し，そのネットの供給はないと仮定する．

$W_0{}^i>0$ は投資家 i の初期資産，w_{ij} は投資家 i が危険資産 j へ投資する最適比率とする．経済全体の資産は

$$W_{m0}\equiv\sum_{i=1}^{I}W_0{}^i,$$

I は経済全体の投資家の数を表わす．均衡市場では，W_{m0} の資産全体の価値に等しい．安全資産のネットの供給はないと仮定したので，資産の合計額は危険資産の合計に等しい．w_{mj} を危険資産 j 全体が経済全体の資産価値に占める比率とすると，市場で需給がバランスすると，

$$\sum_{i=1}^{I}w_{ij}W_0{}^i=w_{mj}W_{m0}.$$

が成り立つ．これは次のとおりに書き換えられる．さらに，

$$\sum_{i=1}^{I}w_{ij}\frac{W_0{}^i}{W_{m0}}=w_{mj},$$

ただし $\dfrac{W_0{}^i}{W_{m0}}>0$ でかつ

$$\sum_{i=1}^{I}\frac{W_0{}^i}{W_{m0}}=1.$$

であるから，市場ポートフォリオの投資比率 w_{mj} は，個人の均衡市場における最適ポートフォリオの凸結合である．

今までと同様に安全資産が存在する場合とそうでない場合に分けてCAPMを考えてみよう．安全資産が存在しない場合，投資家は効率的フロンティア・ポートフォリオを保有し，均衡では市場ポートフォリオは投資家の最適ポートフォリオの凸結合であるから，市場ポートフォリオは効率的フロンティア・ポートフォリオである．フロンティア・ポートフォリオの2ファンド分離特性より，均衡においても2つのミューチュアル・ファンドを選ぶことが可能となる．たとえば，市場ポートフォリオとその零共分散ポートフォリオである．

さらに，市場ポートフォリオはフロンティア上にあるので，(17)から任意のポートフォリオ q に対して

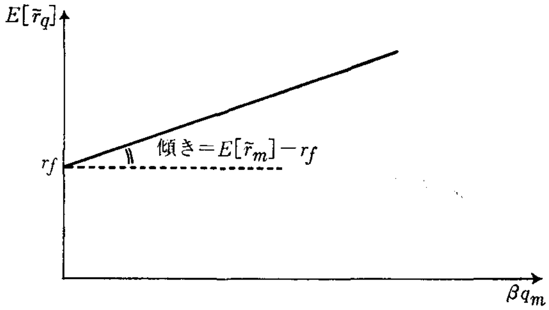

図 3　証券市場線

$$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{r}_{zc(m)}]+\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]), \tag{19}$$

が成立する．ただし，$\tilde{r}_m$ は市場ポートフォリオの収益率で

$$\tilde{r}_m=\sum_{j=1}^{N} w_{mj}\tilde{r}_j$$

$$\beta_{qm}=\frac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_m)}{\mathrm{Var}(\tilde{r}_m)}.$$

市場ポートフォリオは効率的フロンティア上にあるから $E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]>0$．したがって β_{qm} の大きさに比例して，q の期待収益率は市場ポートフォリオに比べ大きくなる．(19)式はゼロベータCAPMとして，Black (1972) および Lintner (1969) によるものとして知られる．

安全資産が存在する場合を考えよう．$r_f>A/C$ のとき，危険資産のフロンティアに接し r_f を通る半直線は非効率的である．一方効率的フロンティアは r_f を始点とする傾き $\sqrt{H}$ の半直線である．この効率的なフロンティア・ポートフォリオは危険資産だけからなる接点ポートフォリオを空売りにし，その資金で安全資産を保有することで達成される．しかし，安全資産のネットの供給はゼロであるので，市場均衡の下では $r_f>A/C$ はあり得ない．$r_f=A/C$ も同様に不可能であり，$r_f<A/C$ のときだけが，市場均衡と矛盾せず，図2に示したとおりとなる．すべての投資は接点ポートフォリオと安全資産からなるポートフォリオを保有することが最適であることがわかる．接点ポートフォリオは危険資産だけからなるポートフォリオであり，すべての投資家が均衡で保有する唯一のポートフォリオであるから，需給が均衡するためには e が市場ポートフォリオでなければならない．したがって均衡では，すべての投資家は市場ポートフォリオと安全資産を保有する．このときの効率的ポートフォリオ・フロンティアを**資本市場線**(Capital Market Line) と呼ぶ．また(18)式より明らかな次式が導かれる．

$$E[\tilde{r}_q]=r_f+\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f). \tag{20}$$

これが CAPM と呼ばれ，Lintner(1965)，Mossin (1965)，さらに Sharpe(1964) により導かれた．また(19)は**証券市場線**(Security market line) と呼ばれ，図3のとおりである．

今後は単純化のために安全資産が存在するとして進めよう．不確実な世界では，危険資産へ投資するリスクに対して報酬がある．市場均衡では，報酬とリスクの関係は，すべての危険資産は等しくなければならない．さもなければ，投資家は好ましい資産へ投資に集中してしまい，均衡と矛盾する．したがってすべての危険資産が等しく好ましいためには，よりリスキーな資産は高い報酬を得なければならない．

資産 q の報酬は，CAPMでは $E[\tilde{r}_q]-r_f$ で表わし，**リスクプレミアム**と呼ぶ．一方，リスクは市場ポートフォリオによるベータによって測られる．報酬とリスクの均衡での関係は(20)式のとおりの線形であり，市場ベータ β_{qm} に比例して，ポートフォリオ q には高いリスクプレミアムがつく．すなわちベータの大きいものは，投資家がリスキーと考え，高いリスクプレミアムとなる．

市場ポートフォリオと相関のある資産の収益率の不確実性を**システマチックリスク**と呼び，その残差を**非システマチックリスク**と呼ぶ．CAPMでは投資家は非システマチックリスクに対しては報われないことを主張している．なぜなら投資家は広範なポートフォリオによってこのリスクを分散できるからである．実際，均衡ではすべての投資家は市場ポートフォリオと安全資産を保有するのでいかなる投資家も非システマチックリスクを負わない．

市場ポートフォリオと正の相関のある危険資産には正のリスクプレミアムがある．特に，ベータ値の大きい資産は大きなリスクプレミアムになる．逆に市場ポートフォリオと負の相関のある危険資産は，負のリスクプレミアムとなる．

このCAPMの関係は次のように説明できる．今，A と B の資産を考えよう．A と B から期末に受け取る収益の期待値が同一とする．しかし，A の収益は市場ポートフォリオと正の相関があり，B は負の相関があるとする．すなわち A は経済が良好のとき高い収益をあげ，B は経済が低迷しているとき高い収益を得る．単位当たり収益は，経済が低迷しているときの方が，価値が高い．したがって，B が好まれ，B の価格は A より高くなる．しかし A と B は同一の収益であるから，A の収益率は B

より高くなる．すなわちAの収益構造はBほど魅力的でないために，均衡ではAと等しく魅力的であるために高い収益率を示すことになる．

最後にＣＡＰＭの経済学的意味は，期待値間の線形関係にあるのではなくて，効率的フロンティア上の市場ポートフォリオの認知にある．(17)式の線形関係はすべてのポートフォリオqに対してフロンティア上のpによって数学的に導かれる．ＣＡＰＭでは，市場ポートフォリオが需給均衡条件から効率的フロンティア上にあることを見出したことにその最も重要な経済学的意義がある．

5. ＣＡＰＭの応用

ＣＡＰＭの応用として，プロジェクト選択と証券選択に関する例をあげる．

5.1 Capital budgeting

危険資産の不確実な収益を$\tilde{y}$とし，その均衡価格をS_yとし，ＣＡＰＭを仮定しよう．定義により$\tilde{r}_y=\tilde{y}/S_y-1$であり(20)より，次式が成り立つ．

$$S_y=\frac{E[\tilde{y}]-\phi^*\rho_{ym}\sigma(\tilde{y})}{1+r_f}, \tag{21}$$

ただし

$$\phi^*\equiv\frac{E[\tilde{r}_m]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_m)}$$

は資本市場線の傾きであり，

$$\rho_{ym}=\frac{\mathrm{Cov}(\tilde{y},\tilde{r}_m)}{\sigma(\tilde{y})\sigma(\tilde{r}_m)}.$$

(21)式は$\tilde{y}$の収益を生む危険資産の「現在価値」あるいは「適正価格」の計算法を示している．分子は不確実な$\tilde{y}$の「確実同値額」であるから，$\tilde{y}$の現在価格はこの確実同値額を$(1+r_f)$で割引いたものである．

２つの収益$\tilde{x}$，$\tilde{y}$がある場合を考えよう．それぞれの均衡価格をS_x, S_yとする．$\tilde{x}$と$\tilde{y}$の組合せの収益を$\tilde{z}$としその価格をS_zとする．もし$\tilde{z}=\tilde{x}+\tilde{y}$であるなら，この組合せにはシナジー(synergy)がなく，$\tilde{z}>\tilde{x}+\tilde{y}$なら，シナジーがあるとされる．シナジーがないと仮定すると，

$$\begin{aligned}S_z&=\frac{E[\tilde{x}+\tilde{y}]-\phi^*\rho_{(x+y)m}\sigma(\tilde{x}+\tilde{y})}{1+r_f}\\&=\frac{E[\tilde{x}]-\phi^*\rho_{xm}\sigma(\tilde{x})}{1+r_f}+\frac{E[\tilde{y}]-\phi^*\rho_{ym}\sigma(\tilde{y})}{1+r_f}\\&=S_x+S_y\end{aligned}$$

となり$\tilde{x}+\tilde{y}$の価値は$\tilde{x}$と$\tilde{y}$の価値の和となる．シナジーがなく摩擦のない経済でこの価値の加法性は，プロジェクト選択に重要な意味がある．企業の目的は，企業価値の最大化であり，その部分資産価値は加法的であるから，企業はその収益の現在価値S_xが初期費用I_0より大きい事業をすべて選択すべきである．すなわち，プロジェクトが$S_x\geq I_0$,「純現在価値」が正であれば，実行すべきであり，既存の企業の資産とは独立に決定される．企業は明らかに分散投資のために負の純現在価値のプロジェクトへ投資すべきでなく，プロジェクト自身の純現在価値の判定条件だけで評価されねばならない．

この価値の加法性の原理でM&A(吸収合併)を考察すると，個別企業の収益よりも合併企業の収益が大きくなる，すなわちシナジーがない限り，M&Aの活動は価値を生み出さないという結論を得る．

ＣＡＰＭは本質的に２時点モデルである．したがって，資本予算法に関する上述の論議は１期間のプロジェクトに限られる．すなわち，時刻０にI_0の資本投下によって，時刻１に不確実な$\tilde{x}$のキャッシュフローを得るプロジェクトを採択するかどうかの決定である．しかし現実には，資本投資プロジェクトは数十年にもおよぶ．ＣＡＰＭを利用した純現在価値を多期間経済に拡張するための条件は，たとえば Myer and Turnbull(1977)を参考にされたい．

5.2 証券選択

証券投資分析は資本予算法における分析と同様である．すべての証券が適正な価格であるときには，投資家の最適投資は市場ポートフォリオと安全資産の線形結合である．しかし，現在の市場価格が証券の現在価値と異なるミスプライスがあるときには，このミスプライスで利用すべきである．ミスプライスは，**5.1**節で述べた現在価値分析によって明らかになる．ところで，この節では証券投資に特にふさわしい方法を示そう．

I_0を次期に$\tilde{x}$支払がある証券の現在の市場価格とし，S_xを(21)で決まると現在価格とする．xへの投資の収益率は

$$\tilde{r}_x{}^p=\frac{\tilde{x}}{I_0}=1.$$

と書ける．ＣＡＰＭにより

$$E\left[\frac{\tilde{x}}{S_x}\right]=1+r_f+\beta_{xm}(E[\tilde{r}_m]-r_f),$$

ただし

$$\beta_{xm}\equiv\frac{\mathrm{Cov}(\tilde{x}/S_x,\tilde{r}_m)}{\sigma^2(\tilde{r}_m)}.$$

$\tilde{r}_x{}^p$の定義を上の式に代入すると，

$$E[\tilde{r}_x{}^p]-r_f=\alpha_x+\beta_{xm}{}^p(E[\tilde{r}_m]-r_f), \tag{22}$$

ただし

$$\alpha_x\equiv\left(\frac{S_x}{I_0}-1\right)(1+r_f)$$

かつ

$$\beta_{xm}{}^{p} \equiv \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{x}/I_0, \tilde{r}_m)}{\sigma^2(\tilde{r}_m)}.$$

もし $I_0=S_x$ なら資産 x は公正な価格であり，$I_0>S_x$ なら高すぎ，$I_0<S_x$ なら安すぎる．このことと(22)より，資産価格について次の関係が成り立つ．

適正価格 (fairly priced) $\leftrightarrow \alpha_x=0$

高すぎる (over-priced) $\leftrightarrow \alpha_x<0$

安すぎる (under-priced) $\leftrightarrow \alpha_x>0$

さてミスプライス証券をいかに実証的に見出すかを考えてみよう．第1に，CAPMが多期間経済において1期毎に成り立つと仮定する．第2に，収益率の分布は定常的であるとする．$\tilde{r}_{jt}$ を x に時刻 $t-1$ から t まで投資したときの収益率とし，$\tilde{r}_{mt}$ を市場ポートフォリオの同様な収益率とする．現在が時刻 t であり，観測された証券 x の収益率の実現値を，$\tilde{r}_{x1}, \tilde{r}_{x2}, \cdots, \tilde{r}_{xt}$ とし，市場ポートフォリオの実現値を，$\tilde{r}_{m1}, \tilde{r}_{m2}, \cdots, \tilde{r}_{mt}$ とする．収益率分布の定常性の仮定より $\tilde{r}_{xs}-r_{fs}$ を $\tilde{r}_{ms}-r_{fs}$ に回帰し，α_x と $\beta_{xm}{}^{p}$ が推定できる．

$$\tilde{r}_{xs}-r_{fs}=\hat{\alpha}_x+\hat{\beta}_{xm}{}^{p}(\tilde{r}_{ms}-r_{fs})+\tilde{\epsilon}_{xs},$$
$$s=1,2,\cdots,t,$$

ただし r_{fs} は時刻 $s-1$ から s まで安全資産利子率であり，$\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_{xm}{}^{p}$ は $\alpha_x, \beta_{xm}{}^{p}$ の推定値とする．もし $\hat{\alpha}_x$ が有意に零でないなら，証券 x はCAPMにしたがえば適正な価格ではない（ミスプライス）とする．$\hat{\alpha}_x$ が有意に零であるときに，x は適正な価格であるとする．$\hat{\alpha}_x$ が零よりも有意に大(小)のとき，証券 x は安(高)すぎる．$\tilde{\epsilon}_{xs}$ は時刻 s のリスクで市場ポートフォリオの収益率と無相関であり，非システマチックリスクである．すべての推定値には ^ を付記して表わす．非システマチックリスクの標準偏差の推定値は $\hat{\sigma}(\tilde{\epsilon}_x)$ となる．ただし，x および m の収益率の期待値の推定値は $\tilde{r}_x$，$\tilde{r}_m$ と記す．

次に，ミスプライス証券が見つかったとき，たとえば安すぎる（Under-Priced）とすると，投資家は彼の全財産をこの証券に投資すべきであろうか．答えは，明らかにNOである．なぜならその証券だけに投資することは，非システマチックリスクに投資家がさらされすぎるからである．ところがミスプライス証券を利用すると，市場ポートフォリオと同じ期待収益率で分散がより小さなポートフォリオが次のようにして作れる．

w_x と w_m を x と市場ポートフォリオ m への投資比率とすると，このポートフォリオの期待収益率は $w_x\tilde{r}_x+w_m\tilde{r}_m+(1-w_x-w_m)r_{f(t+1)}$ である．これが $\tilde{r}_m$ と等しいとすると，市場ポートフォリオへの投資比率は

$$w_m=1-\frac{\hat{\alpha}_x+\hat{\beta}_{xm}{}^{p}(\tilde{r}_m-r_{f(t+1)})}{\tilde{r}_m-r_{f(t+1)}}w_x. \tag{23}$$

となり，$\tilde{r}_m$ と期待収益率が等しいポートフォリオの w_x と w_m の関係を表わしている．このポートフォリオの分散は，

$$\left(1-\frac{\hat{\alpha}_x}{\tilde{r}_m-r_{f(t+1)}}w_x\right)^2\hat{\sigma}^2(\tilde{r}_m)+w_x{}^2\hat{\sigma}^2(\tilde{\epsilon}).$$

これは $\hat{\sigma}^2(\tilde{r}_x{}^{p})=(\beta_{xm}{}^{p})^2\hat{\sigma}^2(\tilde{r}_m)+\hat{\sigma}^2(\tilde{\epsilon}_x)$ と $\mathrm{Cov}(\tilde{r}_x{}^{p}, \tilde{r}_m)=\hat{\beta}_{xm}{}^{p}\hat{\sigma}^2(\tilde{r}_m)$ により明らかである．分散を最小にする証券 x への投資比率は

$$w_x=\frac{\hat{\alpha}_x}{(\tilde{r}_m-r_{f(t+1)})\dfrac{\hat{\sigma}^2(\epsilon_x)}{\hat{\sigma}^2(\tilde{r})_m}+\dfrac{\hat{\alpha}_x{}^2}{\tilde{r}_m-r_{f(t+1)}}}. \tag{24}$$

w_x の符号は，$\hat{\alpha}_x$ の符号によって決定されることがわかる．(24)と(23)によって市場ポートフォリオと同一の期待収益率で最小分散となる投資比率が決定される．このポートフォリオを q とすると，q の分散が市場ポートフォリオの分散より厳密に小であることは直接的に証明できる．そこで，ポートフォリオ q と安全資産の組合せにより図4に示したとおりのスーパー効率的ポートフォリオ・フロンティア (super efficient portfolio frontier) を構成することができる．

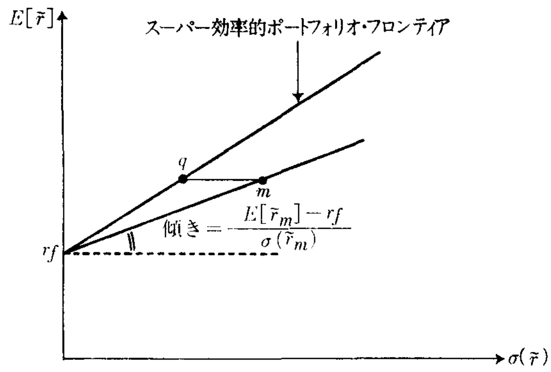

図 4 スーパー効率的ポートフォリオ・フロンティア

市場ポートフォリオと安全資産の線形結合で作られる任意の「パッシブ」ポートフォリオはスーパー効率的ポートフォリオフロンティア上のポートフォリオに平均分散の意味で支配される．投資家は，彼の無差別曲線とスーパー効率的ポートフォリオ・フロンティアの接点で最適ポートフォリオを決定する．

すでに述べた分析から，ポートフォリオ・マネージャ

一のミスプライス証券を選択する能力に対する評価は，彼のポートフォリオをqとしたとき，報酬と変動の比率

$$\frac{\bar{r}_q - r_f}{\hat{\sigma}(\bar{r}_q)}$$

が資本市場線の傾きより大きいかどうかによって判定できる．より一般的には，あるポートフォリオが他よりも優れていると，その報酬変動比率が他のポートフォリオのより大きいときにいえる．

6. おわりに

今回は静的ポートフォリオ理論とＣＡＰＭを概説した．このテーマに興味を持たれた読者は，Brealey and Myers (1988), Huang and Litzenberger (1988) および Sharpe and Alexander(1990) を参考にされ，本論文で書き尽くせなかったところを補われたい．

参考文献

[1] Black, F. 1972. 第1回の参考文献の[1].

[2] Brealey, R. and S. Myers. 1988. *Principles of Corporate Finance*. Third Ed. McGraw-Hill. New York.

[3] Huang, C. and H. Litzenberger, 1988, *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, Amsterdam.

[4] Lintner, J. 1965. 第1回の参考文献の[15].

[5] Lintner, J. 1969. The aggregation of investor's diverse judgements and preferences in purely competitive markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **4**:346-382.

[6] Markowitz, H. 1952. 第1回の参考文献の[16].

[7] Merton, R. 1972. An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **7**:1851-1872.

[8] Merton, R. 1982. *Finance Theory*. Lecture Notes, Sloan School of Management, Massachusetts Institutes of Technology.

[9] Mossin, J. 1966. 第1回の参考文献の[21].

[10] Myers, S. and S. Turnbull. 1977. Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model : Good News and Bad News. *Journal of Finance* **32**:321-332.

[11] Roll, R. 1977. A critique of the asset pricing theory's tests. *Journal of Financial Economics* **4**:129-176.

[12] Sharpe, W. 1964. 第1回の参考文献の[23].

[13] Sharpe, W. and G. Alexander. 1990. *Investments*. Fourth Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA.