連載講座

ファイナンス理論の概要

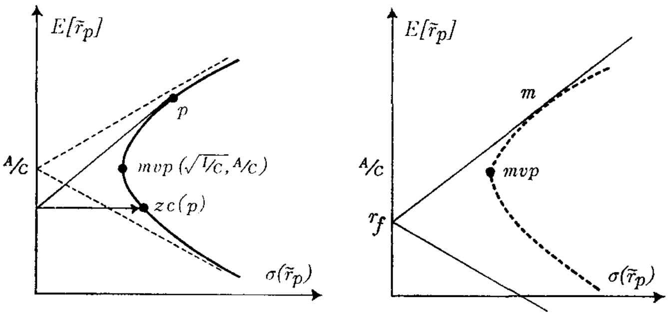
——ファイナンス理論とその応用 (1)——

Huang Chi-fu,* 浦谷 規**

1. はじめに

ファイナンス理論の始まりはどこからであろうか．たぶん Modigliani and Miller(1958) の一見単純な命題「すべての状態で同一の利益をもたらす証券の組合せは，同一価格になる」にその発端があったと考えられる．

連載の初回は Financial Economics の資本市場に関する3つの重要なテーマについて概観する．第1は，Markowitz(1952) や Tobin(1958)による平均分散ポートフォリオ理論と，Black(1972), Lintner(1965), Mossin(1965), Sharpe (1964)らによる，収益率に関する市場均衡での関係を求めた CAPM(Capital Asset Pricing Model) である．第2のテーマは，個人の生涯の効用を極大化するという動的考えの導入により CAPM を一般化したモデル Intertemporal CAPM (ICAPM) であり，Merton (1971, 1973a)に始まり，Breeden(1979) および Cox, Ingersoll and Ross(1985) によって展開された．第3は，Financial Engineering として種々の金融新商品を生み出す基礎となった Black and Sholes (1973) や Merton (1973b) によるオプション理論である．オプション理論は Cox and Ross (1976), Harrison and Kreps(1979) や Harrison and Pliska(1981)により確率論的方法が確立し，条件付証券の一般論として発展してきている．この一般理論の枠組みによって，動的ポートフォリオ理論が Cox and Huang (1986, 1989), He and Pearson (1989) および Pagès (1989) らによって展開され，動的市場均衡が Huang(1985a, b), Duffie (1986) および Huang(1987)によって進められてきた．



(a) 安全資産なし　　(b) 安全資産あり

図 1 ポートフォリオフロンティア

次回以降の連載では，これらの主要テーマおよびその応用について詳しく解説するので，今回は詳細に立ち入らず全体像を把握するために主要な結果だけを概説する．したがって難解に見えるテーマもあるが，以後の4回でできる限り平易に解説するのでご期待いただきたい．

2. 静的ポートフォリオ理論とCAPM

静的ポートフォリオ理論では，所与の期待収益率を制約として分散で測られるリスクを最小化する資産の組合せ（ポートフォリオ）を求める．この資産の組合せが，平均分散効率的ポートフォリオと呼ばれる．

まず，安全資産が存在しない場合から始めよう．平均分散効率的ポートフォリオの集合（**ポートフォリオ・フロンティアと呼ぶ**）は，平均と標準偏差を軸として表わすと図1(a)のとおりの双曲線になる．フロンティア上の最小分散ポートフォリオを mvp と記した．フロンティア上のすべてのポートフォリオはフロンティア上の異なる任意の2つのポートフォリオで「生成」できる．これが2ファンド分離 (2 fund separation) と呼ばれる性質である．すべての投資家を満足させる投資信託はフロンティア上にあるので，投資家がフロンティア・ポートフォリオを保有するためには，その2つの投資信託の組

*マサチューセッツ工科大学
**うらたに ただし 静岡県立大学 経営情報学部
〒422 静岡市谷田395

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

合せを持つことだけで十分である．また，任意の2つのフロンティア・ポートフォリオの線形結合はフロンティア・ポートフォリオになるので，ポートフォリオ・フロンティアは線形空間であることがわかる．

任意のフロンティア・ポートフォリオpに対して，共分散が零となるフロンティア上のポートフォリオ$zc(p)$をpの**零共分散ポートフォリオ**と呼ぶ．ただしmvpに対しては存在しない．pの零共分散ポートフォリオは図1(a)において，pからの接線が縦軸と交わる点を期待収益率とするフロンティア上の点$zc(p)$である．このフロンティア・ポートフォリオpと$zc(p)$を用いると，必ずしもフロンティア上にない任意のポートフォリオqに対して，次の重要な数学的結果が導かれる．

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]), \quad (1)$$

ただし $\beta_{qp}\equiv\dfrac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{\mathrm{Var}(\tilde{r}_p)}$

$\tilde{r}_i$はポートフォリオiの収益率，$E[\cdot]$, Cov, Varはそれぞれ期待値，共分散，分散を表わす．(1)は，任意のポートフォリオqの期待収益率が，フロンティア・ポートフォリオpに対するベータ値β_{qp}と線形関係にあることを示している．これは単に数学的結果であり，経済学的考察抜きで導かれる．CAPMの意義は，経済学的論理で1つのフロンティア・ポートフォリオを決定し，種々の資産の期待収益率に対して(1)の線形関係を見いだすところにある．資産の収益率あるいは投資家の選好に仮定を設けると，投資家はフロンティア・ポートフォリオを保有することが最適である．均衡では，需要と供給は等しい．市場ポートフォリオは，すべての投資家の最適ポートフォリオの凸結合であるので，それもまたフロンティア・ポートフォリオである．投資家の最適ポートフォリオの期待収益率はmvpより大きい効率的ポートフォリオであるから，市場ポートフォリオも効率的である．したがって(1)のpを市場ポートフォリオmに，$zc(p)$を$zc(m)$に置き換えても，$E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]$は正として成り立つ．これがBlack(1972)のZero-Beta CAPMである．

安全資産が存在する場合は，今までの議論がより簡単になる．安全資産利子率をr_fとすると，ポートフォリオ・フロンティアは図1(b)のとおりのr_fから出る2本の半直線となる．2ファンド分離がこの半直線上で成り立ち，投資家は図の「接点ポートフォリオ」eと安全資産r_fの組合せを選択する．すべての投資家がeとr_fの組合せを選択し，安全資産はネットの供給がゼロと仮定すると，eは市場ポートフォリオmである．したがって$zc(m)$の期待収益率はr_fに等しい．$\tilde{r}_m$をポートフォリオの収益率とすると，(1)と同様に任意のポートフォリオqに対して，

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f), \quad (2)$$

が成り立ち，$\beta_{qm}\equiv\dfrac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_m)}{\mathrm{Var}(\tilde{r}_m)}$である．これがLintner(1964), Mossin(1965), Sharpe(1964)によるCAPMである．

$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]$がポートフォリオ$q$の**リスクプレミアム**と呼ばれる．任意の資産のリスクプレミアムは市場ポートフォリオの「ベータ」に正比例することをCAPM, Zero-Beta CAPMのいずれもが予測する．すなわちベータの高い資産ほどリスクプレミアムが大きい．収益率の分散の代わりに，市場ポートフォリオに関するベータを均衡におけるリスクの測度にする点がCAPMの特徴である．

CAPMには次のとおりの経済的意味がある．同一の収入の期待値を持つ資産a，bがあるとしよう．aは市場ポートフォリオmと正の相関があり，bが負の相関がある時，bはmのリスクをヘッジすることが可能である．したがってbはaに比べ価値があり，bはaより価格が高くなる．ところで，期待収入は同一であるから，価格の高いbの方が期待収益率は小さくなる．したがって市場ポートフォリオと相関が高い資産aは多くのリスクプレミアムを受け取る．以上の資産評価モデルは，リスクプレミアムをベータの線形関数によって予測し，$\tilde{r}_m$と相関しない収益率の不確実性はリスクプレミアムに寄与しないとする．

3. 動的ポートフォリオ理論とICAPM

動的ポートフォリオ理論では，ポートフォリオから生じる資金の消費による効用を最大化し，そのための個人の生涯におよぶ投資および消費を解析する．以下に示すように拡散過程を用いるのはその解析可能性のためである．

時間$[0,T]$の不確実性の下での経済をCox et al(1985)にしたがって考えてみよう．$n=0,1,\cdots,N$と番号づけられた$N+1$種の証券があり，$S_n(t)$を時刻tの第n証券の価格とする．$S(t)$は$(S_1(T),\cdots,S_N(T))^{\mathsf{T}}$を表わすベクトルで，Tは転置とする．$S$が次の確率微分方程式を満たすとする，

$$dS(t)+f(Y(t),t)dt=I_S(t)\mu(Y(t),t)dt +I_S(t)\sigma(Y(t),t)dB \quad (3)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ただしYは次の確率微分方程式を満たすM次の拡張過程とする.

$$dY(t)=\beta(Y(t),t)dt+g(Y(t),t)dB(t), \tag{4}$$

$f(Y(t),t)$は，時刻tにN種の各証券に支払われるN次の配当ベクトル，$I_S(t)$ は，$N\times N$ 対角行列で第n対角要素が $Sn(t)$，μはN次ベクトル，βはM次ベクトル，σは$N\times K$行列，gは$M\times K$行列，そしてBはK次の標準ブラウン運動である. 後で経済的意味を考えるために，$M+1<N\leq K$ とし，$\sigma(t)$ と $g(t)$は常にフルランクであると仮定しよう．Yは「状態変数」ベクトルであり，$\mu(t)$ および $\sigma(t)\sigma(t)^{\mathsf{T}}$ はそれぞれ資産 $n=1,2,\cdots,N$ に対する「瞬時の」期待収益率ベクトルおよび「瞬時の」共分散行列である．証券 0 は時刻tで $r(Y(t),t)$ の率で成長するプロセスで，局所的に無危険である．以後では，$n=1,2,\cdots,N$ を危険資産と呼び $n=0$ を安全資産と呼ぶ.

危険資産への投資比率をポートフォリオ政策 $A(t)$ とし，生涯の消費を消費政策 $C(t)$ とする．予算制約としての富 $W(t)$は次の確率微分方程式を満たさねばならない.

$$\begin{aligned}dW(t)=[&W(t)(r(t)+A(t)^{\mathsf{T}}(\mu(t)-r(t)))\\&-C(t)]dt+W(t)A(t)^{\mathsf{T}}\sigma(t)dB(t)\end{aligned} \tag{5}$$

個人の最適な消費とポートフォリオの問題は，次の期待値を最大化する (A,C) を見つけることである.

$$E\left[\int_0^T u(C(t),\,Y(t),t)dt\right]$$

その制約式は，(5)の予算制約および(3)と(4)の価格システムである．$u(C(t),\,Y(t),t)$ は，時間tの消費に対する個人の効用関数である．この最大化問題の解の存在を仮定し，$J(W(t),Y(t),t)$を，$W(t)$ および $Y(t)$が与えられた時刻tでの最適値関数としよう．ベルマンの最適性原理より，次のベルマン方程式が導かれる.

$$\begin{aligned}\max_{A,C}\Big\{&\frac{1}{2}J_{WW}W^2A^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\sigma\sigma^{\mathsf{T}}A+WA^{\mathsf{T}}\sigma g^{\mathsf{T}}J_{WY}\\&+J_W[W(r+A^{\mathsf{T}}(\mu-r))-C]+u(C,Y,t)\Big\}\\&+J_Y^{\mathsf{T}}\beta+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(J_{YY}gg^{\mathsf{T}})+J_t=0\end{aligned} \tag{6}$$

ただし添字は偏微分を表わし，tr は行列のトレースである.

最大化の条件は

$$A=-\frac{J_W}{J_{WW}W}(\sigma\sigma^{\mathsf{T}})^{-1}(\mu-r)-(\sigma\sigma^{\mathsf{T}})^{-1}\sigma g^{\mathsf{T}}\frac{J_{WY}}{J_{WW}W} \tag{7}$$

$$u_c\leq J_W \tag{8}$$

(7)から動的ポートフォリオを考えてみよう．第1項の$(\sigma\sigma^{\mathsf{T}})^{-1}(\mu-r)$は，「瞬時の」平均分散フロンティアポートフォリオの危険資産への投資比率に比例している．第2項の$(\sigma\sigma^{\mathsf{T}})^{-1}\sigma g^{\mathsf{T}}$の第$i$行は，第$i$状態変数に最も相関するポートフォリオの危険資産への投資比率に比例している．そこで静的モデルの2ファンド分離の一般化が直ちに可能となる．すなわち，すべての最適ポートフォリオは，平均分散フロンティアポートフォリオと，状態変数と最も相関するMコのポートフォリオと安全資産の線形結合である($M+2$ fund separation)．$M+1<N$ の仮定は，投資信託の種類が取引される証券の種類より多くなることを排除するためである.

(7)から均衡における期待値に関する関係 Intertemporal CAPM が次のように導ける．経済の代表的個人を仮定すると，市場清算条件から(7)は市場ポートフォリオに対して成立する．Xを状態変数Yに最も相関の高いポートフォリオの価格のM次ベクトルとし，$\mu_{x(t)}$ をXの瞬時の期待収益率ベクトルとすると，次式が成り立つ.

$$\mu(t)-r(t)=\beta_{S,WX}\begin{pmatrix}\mu_m(t)-r(t)\\ \mu_x(t)-r(t)\end{pmatrix} \tag{9}$$

ただし

$$\beta_{S,WX}=V_{S,WX}(t)V^{-1}{}_{WX,WX}(t)$$

$V_{S,WX}(t)$ および $V_{WX,WX}(t)$ はそれぞれSと(W,X^{T})，および(W,X^{T})と(W,X^{T})の時刻tにおける瞬時の変化に対する共分散行列である．$\mu_m(t)$は市場ポートフォリオの時刻tにおける瞬時の期待収益率である.

この Merton(1973a)の多要因 ICAPM では，危険資産の瞬時のリスクプレミアムが $\beta_{S,WX}$ の行で捉えられる$M+1$の特徴(市場ポートフォリオに関するベータおよび状態変数に最も相関するM個のポートフォリオに関するベータ)によって均衡において線形関係で決定される.

さらに効用関数がYと独立であり，均衡で$C(t)>0$であると(9)は(8)と伊藤の補題から単純化できる.

$$\mu(t)-r(t)=\frac{\beta^{\mathsf{T}}{}_{Sc}}{\beta_{\hat{c}c}}(\mu_{\hat{c}}(t)-r(t)) \tag{10}$$

ただし $C(t)$ を，時刻tの経済全体の消費とし，$\hat{C}(t)$を $C(t)$ の瞬時の変化率と最も相関する収益率を持つポートフォリオの価格とする．$\mu_{\hat{c}}(t)$および $r_{\hat{c}}(t)$はそれぞれ$\hat{C}$の瞬時の期待収益率および収益率であり，さらに，

$$\beta_{Sc}\equiv\frac{\mathrm{Cov}_t((dS(t)+f(t)dt)/S(t),dC(t)/C(t))}{\mathrm{Var}_t(dC(t)/C(t))}$$

$$\beta_{\hat{c}c}\equiv\frac{\mathrm{Cov}_t(r_{\hat{c}}(t),dC(t)/C(t))}{\mathrm{Var}_t(dC(t)/C(t))}$$

Var_t，Cov_t は時刻tの情報の下での分散，共分散オペレータである.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

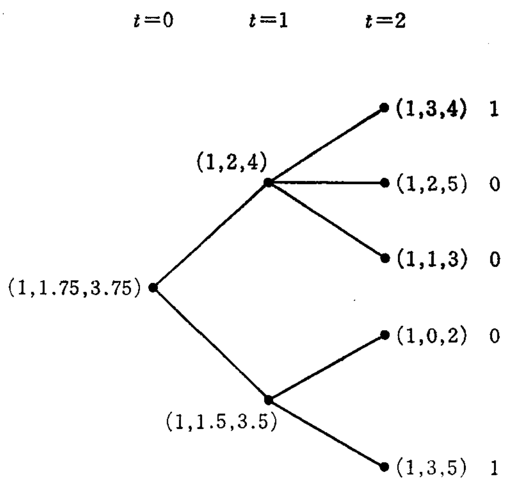


図 2 原証券の価格プロセスの木

(10)がBreeden(1979)のIntertemporal Consumption CAPMであり，$\beta_{Sc}//\beta_{\hat{c}c}$ の要素を危険資産の消費ベータと呼ぶ．このモデルのCAPMとの相違点は，市場ポートフォリオの代りに経済全体の消費が評価に使われ，資産の不確実性は消費ベータで完全に決定されるところにある．

4. 条件付証券の価格理論

条件付証券の研究はBlack, Scholes(1973)やMerton(1973b)によって始められて以来，連続時間の確率過程を用いられているが，ここでは直観的にわかりやすい離散モデルで説明してみよう．

3つの証券があり，$t=0,1,2$ の3時点の投資を考えてみよう．3証券の価格の動きは図2のとおりの木(event tree)で表わされる．時刻0での証券価格(1, 7/4, 15/4)が時刻1では(1,2,4)かまたは(1,3/2,7/2)になる．時刻1の上のノードは時刻2では3つのノードになり，下のノードでは2つのノードになる．第1の証券の価格はすべてのノードで常に1である．カッコの中の第 n 番目の数が第 n 証券の価格である．ここで木の枝には確率の値を設定しないで，単に正の数であることだけを想定している．したがって以下に導かれる結果は確率の値から独立である．

さて，第2証券の時刻2の価格を条件とする証券を考えてみよう．第2証券の時刻2の価格が2より大きいとき，証券価格と2との差だけ支払われる証券の収入は，図2の時刻2の各ノードに右側に示されるとおりである．この証券は行使価格2のヨーロッパ型コールオプションである．このような証券を一般に**条件付証券**(Contingent Security)または**派生証券**(derivative security)と呼び，これに対してもっと3証券を**原証券**(primitive security)と呼ぶ．さてこのオプションの支払は，原証券の時刻2の価格の線形結合では表わせない．すなわち，時刻0で3原証券のポートフォリオを買い，時刻2まで保有してもオプションと同じ支払を受け取るポートフォリオは作れない．ところが，もしポートフォリオが存在した場合，オプションの価格は，ポートフォリオの価格に等しくなければならない．さもなければコールオプションを売ったお金でこのポートフォリオを買い利益を得る裁定取引(逆の取引も可能)ができるからである．

条件付証券の価格理論は次のようにして，このオプションの価格を求める．時刻0で買い，時刻2で売るだけではできないオプションの支払を作るために時刻1での取引を利用する．時刻1の上のノードで，オプションの支払を受け取るポートフォリオは，各原証券の取引数を x, y, z とすると，

$$\begin{aligned} &x+3y+4z=1,\\ &x+2y+5z=0,\\ &x+\ \ y+3z=0. \end{aligned} \tag{11}$$

解は，$(x,y,z)=(1/3,2/3,-1/3)$ である．したがって，時刻1に，証券1を1/3および証券2を2/3保有し，証券3を1/3空売りすれば，時刻2にオプションの収入を受け取ることが可能となる．このポートフォリオの時刻1での価格は，$1\times1/3+2\times2/3+4\times(-1/3)=1/3$ である．同様にして，時刻1の下のノードで，オプションの収入を受け取るポートフォリオは，(12)の解である．

$$\begin{aligned} &x+0y+2z=0,\\ &x+3y+5z=1. \end{aligned} \tag{12}$$

1つの解$(-1/3,1/6,1/6)$から，この時刻1のポートフォリオの価格を求めると，1/2である(他のすべての解でも同じ)．

われわれの目的である時刻0のポートフォリオは，(13)の解である．

$$\begin{aligned} &x+2y+4z=1/3,\\ &x+1.5y+3.5z=1/2. \end{aligned} \tag{13}$$

1つの解は$(4/3,-1/6,-1/6)$であり，この時刻のポートフォリオ価格は5/12である．したがって，コールオプション価格は5/12でなければならない．なぜなら，裁定取引がおこらないためには同一の支払を持つ証券の組合せは同一の価格を持たなければならないからである．

以上の議論はアロー（デゥブロー）証券の考えを用い

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

て一般化できる．該当するノードの時だけ1単位受け取り，他のノードでは何も受け取らない3原証券からなるポートフォリオを考えてみよう．時刻2の各ノードに対するポートフォリオの時刻0での価格を π^*_{2i} とする．同様に時刻1のノードの時刻0での価格を π^*_{1i} とすると次の関係を満たす．

$$\sum_i \pi^*_{ti}=1, \quad t=1,2$$

および

$$\sum_{i=1}^{3} \pi^*_{2i}=\pi^*_{11},$$

$$\sum_{i=4}^{5} \pi^*_{2i}=\pi^*_{12},$$

上記の第1と第2の式は第1証券価格がすべてのノードで1だからである．この価格は確率の定義を満足するため，それぞれのノードの確率と見なせる．この確率を用いると，3原証券の価格プロセスはマルチンゲールになる．さらにオプションの支払を c_{2i} とすると，すでに述べたとおりの裁定機会のない条件よりオプション価格は

$$\sum_{i=1}^{5} \pi^*_{2i}\, c_{2i}$$

であり $\pi^*_{21}=\pi^*_{22}=\pi^*_{23}=1/6, \pi^*_{24}=\pi^*_{25}=1/4$ だから，5/12が求められる．同様にして，時刻1のオプションの価格は，それぞれ

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\pi^*_{2i}}{\pi^*_{11}} c_{2i}$$

および

$$\sum_{i=4}^{5} \frac{\pi^*_{2i}}{\pi^*_{12}} c_{2i},$$

で求められ，$\pi^*_{11}=\pi^*_{12}=1/2$ だから，それぞれ1/3, 1/2となる．すなわち，条件付証券の各時間の価格は各ノードのに与えられた「確率」の下でマルチンゲールになる．この確率を「マルチンゲール測度」と呼ぶ．一般的にマルチンゲール測度によって，条件付証券の価格は π^*_{ti} の下での条件付期待値の簡単な計算によって決定できる．

以上では，マルチンゲール測度が各ノードに唯一組存在し，そのノードでは支払が1で他では0であるポートフォリオが存在し，しかもすべてのノードで価格が1の原証券があると仮定した．ところで，価格が常に1である証券がない時にはある証券価格で他のすべての証券価格を除すること（正規化）でその証券は得られる．一般的に，正規化した価格プロセスのマルチンゲール測度の存在は，3証券で裁定取引ができないことの必要十分条件である．またマルチンゲール測度の一意性は，任意の条件付証券が原証券の動的取引によって「複製」可能であることの必要十分条件である．このような市場を**動的に完備な**（dynamically complete）市場と呼ぶ．

以上のマルチンゲール測度と裁定取引のない価格システムの関係は，Cox and Ross(1976)と Harrison and Kreps(1979)により始められ，条件付証券の価値の一般理論として発展し，有名な Black and Scholes (1973) のオプション価格理論はその一例となっている．

5. おわりに

今回はファイナンス理論の主要な3テーマを概観した．ねらいは細部にとらわれず，中心的な結果を紹介し全体を明らかにすることにあり，難解な印象を与えたかもしれない．しかし今後の連載では，3つのテーマについて，次のような予定でわかりやすくとりあげる．

第2回はポートフォリオ・フロンティアと CAPM の説明を行ない，Capital budgeting と money management への CAPM の応用を示す．

第3回は，動的ポートフォリオと ICAPM の複雑な証明ではなく，連続時間における条件付証券の価格理論を展開しよう．Black and Scholes のオプション価格理論はその応用として示す．

第4回は，条件付証券の価格理論がいかに動的ポートフォリオ理論と ICAPM に有意義な洞察を与えるかを示そう．

最終回は，条件付証券の価格理論と ICAPM とを組合せて，利子構造のモデルを紹介し，金利の条件付証券の価格理論を応用としてとりあげる．

参考文献

[1] Black, F. 1972. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business* **45**:444-454.

[2] Black, F., and M. Scholes. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**:637-654.

[3] Breeden, D. 1979. An intertemporal capital pricing model with stochastic investment opportunities. *Journal of Financial Economics* **7**:265-296.

[4] Cox, J., and C. Huang. 1986. A variational problem arising in financial economics. to appear in *Journal of Mathematical Economics*.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

[5] Cox, J., and C. Huang. 1989. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory* **49**:33–83.

[6] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. 1985. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica* **53**:363–384.

[7] Cox, J., S. Ross. 1976. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics* **3**:145–166.

[8] Duffie, D.1986. Stochastic equilibria: Exictence, spanning number, and the "no expested gain from trade" hypothesis. *Econometrica* **54**:1161–1184.

[9] Harrison, M., and D. Kreps. 1979. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory* **20**:381–408.

[10] Harrison, M., and S. Pliska. 1981. Martingales and stochastic in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications* **11**:215–260.

[11] He, H., and N. Pearson. 1989. Consumption portfolio with incomplete markets and short-sale constraints: The infinite dimensional case. Mimeo. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

[12] Huang, C. 1985a. Information structure and equilibrium asset prices. *Journal of Economic Theory* **35**:33–71.

[13] Huang, C. 1985b. Information structure and viable price systems. *Journal of Mathematical Economics* **13**:215–240.

[14] Huang, C. 1987. An intertemporal general equilibrium asset pricing model: The case of diffusion information. *Econometrica* **55**:117–142.

[15] Lintner, J. 1965. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics* **47**:13–37.

[16] Markowitz, H. 1952. Portfolio. Selection. *Journal of Finance* **7**:77–91.

[17] Merton, R. 1971. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory* **3**:373–413.

[18] Merton, R. 1973a. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica* **41**:867–887.

[19] Merton, R. 1973b. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**:141–183.

[20] Modigliani, F., and M. Miller. 1958. The cost of capital, corporate finance and the theory of corporation finance. *American Economic Review* **48**:261–297.

[21] Mossin, J. 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **35**:768–783.

[22] Pagès, H. 1989. Three Essays In Optimal Consumption. Unpublished Ph.D. thesis. Massachusetts Institutes of Technology.

[23] Sharpe, W. 1964. Capital asset prices: A theory of capital market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* **19**:425–442.

[24] Tobin, J. 1958. Liquidity preferences as behavior towards risk. *Review of Financial Studies* **25**:65–86.

× × × × × ×

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.