ファイナンスのための確率過程入門 (IV)

岸本 一男

5. 安定過程

証券価格（の対数）の変動が（トレンドを持った）ブラウン運動にしたがうことを予想する1つの根拠は，“証券価格の変動が多数の小さな要因に起因する小さな変動 Y_i の時間的集積 $\sum Y_i$ の結果であり，したがって，各 Y_i が互いにほぼ独立であるなら，2時点間の変動の分布は，中心極限定理により（少なくとも近似的には）正規分布にしたがうであろう．特に，集積の速度が時間的に変動しないと近似できるならば，それはブラウン運動になるであろう”という推察である．

しかし，実証研究の教えるところによると，株価，株価指数，為替レートのいずれを取ってみても，その（対数の）日次変動 Y_i の分布は正規分布にしたがわない．データから分布の正規性を統計的に検定する有力な方法の1つに，その尖度，すなわち $(Y_i-E[Y_i])^4/(V[Y_i])^2$ の平均値が，3に十分近いか否かを検証する方法があるが，実データに対しこの検定を行なってみると，ほとんど例外なく尖度は3よりも有意に大きいのである．この原因は何であろうか？

中心極限定理が成立するには，1つ1つの要因にもとづく変動 Y_i が有限分散でなければならなかった．しかし，実際の世の中の変動では，石油ショック等のきわめて大きな影響を持つものも多数発生しており，分散が有限にとどまらない可能性も強い．先の中心極限定理を利用する推論で，有限分散の仮定が誤っているのだとするのが，Mandelbrot の考え方である．

このような発想に立ちつつ，より広いクラスの確率過程を構成するには，中心極限定理にもとづいて正規分布を定義し，その分布をもとに第2.1節と同様の手続きで確率過程を定義するのが自然であろう．このような理論は，確率過程の古典的な理論として確立されており，最短コースで述べれば，以下のようになる．

確率変数 X が，もし任意の自然数 k に対して，独立同一分布にしたがう k 個の確率変数の和 $\sum X_i$ で記述されるなら，X は無限分解可能分布であると呼ばれる．一方，確率過程 X_t は，それが確率連続，すなわち，任意の $\varepsilon(>0)$ に対し

$$P(|X_{t+h}-X_t|>\varepsilon)\to 0,\ h\to 0$$

を満足し，さらに独立増分過程であって，その見本関数 $x(t)$ が確率1で次の条件を満足する場合に Levy 過程と呼ばれる．

(a) $x(t)$ は第1種不連続である．すなわち，任意の t に対し，

$$\lim_{s\downarrow t} x(s),\quad \lim_{s\uparrow t} x(s)$$

が存在する．（連続も第1種不連続の特殊な場合である.）

(b) $x(t)$ は右連続である．

Levy 過程 $X(t)$（ここで再び X_t と $X(t)$ あるいは $X(t;\omega)$ との混用を行なった）に対しては，$X(t_1)-X(t_0)$ が無限分解可能分布になるし，逆に，勝手な無限分解可能な分布 $f(x)$ が与えられたとき，適当な Levy 過程 $X(t)$ を選べば，$X(1)$ が $f(x)$ にしたがうようにできる．Gauss 過程と Poisson 過程の結合で表現できる分布は Levy 過程であり，また，Levy 過程は，Gauss 過程と Poisson 過程の結合でかけること等もわかっている．

独立同一分布にしたがう k 個の確率変数 X_i が与えられたとき，それらの和 $\sum X_i$ が，X_i と同じ分布にしたがう確率変数 X と適当な実数 $b(>0)$ を用いて，$\sum X_i=bX$ と表現できるとき，この分布を安定分布と呼ぶ．また，$b(>0)$，c を用いて $\sum X_i=bX+c$ と表現できるとき，準安定分布と呼ぶ．もっとも Mandelbrot の周辺

きしもと かずお 筑波大学 社会工学系
〒305 つくば市天王台1－1－1

では，準安定分布のことを安定分布と呼んでおり，Mandelbrot 自身は，さらに安定パレート分布という名称を用いている．ファイナンス関係の文献では，むしろこの名称がよく使われる．準安定分布の特性関数 $\phi(z)$ は，

$$\phi(z)=\exp[i\delta z-\gamma|z|\alpha\{1+i\beta(z/|z|)\omega(z,\alpha)\}],$$
$$\gamma\geqq 0,\ 0<\alpha\leqq 2,$$
$$\omega(z,\alpha)=\begin{cases}\tan(\pi\alpha/2), & \alpha\neq 1,\\ (\pi/2)\log|z|, & \alpha=1\end{cases}$$

で表現されることがわかっているが，その密度関数は，いくつかの例外的な場合を除き，初等関数で陽に書き下した形は知られていない．Levy 過程は，時間的に一様であり（すなわち $X(t)-X(s)$ の分布が $t-s$ のみに依存し），$X(t)-X(0)$ が安定分布（準安定分布）になるとき，狭義の安定過程（安定過程）と呼ばれる．

正規分布が安定分布であり，したがって無限分解可能でもあることは，明らかである．また，Brown 運動が安定過程であり，したがって Levy 過程でもあることも明らかである．しかし，この他にも一群の安定分布・安定過程が存在するわけであり，それらを証券価格変動のモデルとして用いようというのが Mandelbrot の主張なわけである．そして，正規分布以外の安定分布は，もはや有限分散ではなく，これらの分布から確率過程を構成した場合，もはや，見本関数は必ずしも連続ではない．

ファイナンス関係の研究者からは，数学的処理の厄介さを主たる理由に必要以上に嫌われ，数理愛好者の間には，逆にむしろひいきめに近い評価を受けているこの理論の可否は，多数の数学的に誤った論文のせいもあって，完全には公正な判断はまだなしえないのが現状のように思われる．

たとえば，内外のいくつかの文献では，一定期間の日次データにおいてサンプリング間隔を延ばしながら証券価格変動の（対数の）尖度を計算すると，間隔の増加とともに尖度が減少することを根拠に，変動の安定性を否定している．しかし，この減少も，非正規安定分布において特徴的にみられる現象であることは，簡単なシミュレーションより確かめられる．

非正規安定分布においてこのような現象が発生する理由は，分散，あるいは尖度が定義されない（正の無限大である）ために，期間の長さが一定という条件のもとでは，サンプリング間隔を細かくし，その結果データ数が増えていくにしたがって，分散・尖度は真の値，つまり正の無限大に近づいていく（発散していく）という事実に起因している．逆にみれば，サンプリング間隔が大きくなるにしたがって分散・尖度は小さくなっていくのである．

別の例としては，著名な論文

Fama, E.F.: The behavior of stock market prices, Journal of of Business, Vol.38, pp.29-49(1965)

で，安定（パレート）性を強く支持した Fama は，その後，著書

Fama, E. F.: "Foundations of Finance," Basic Books, Inc.: New York, 1976

の中で，一定期間の日次データにおいてサンプリング間隔を延ばしながら証券価格変動の（対数の）標準偏差で規格化した場合の平均からのずれの分布が，サンプリング間隔を延ばすにつれて正規分布に近づくという観察を1つの根拠にして，証券価格変動の安定（パレート）性の主張を撤回した．しかし，（正規分布以外の）安定分布が分散を持たないことを考慮すれば，この議論は数理的に無意味である．もっとも，この場合について再び安定分布にしたがう確率変数を発生させて簡単なシミュレーションをしてみると，サンプリング間隔の変化に伴う変動は，尖度の場合ほどには顕著に観察されず，データに現われた変化を完全には説明しきれない．したがって，Fama のこの推論自身は，なんらかの別の方法で正当化できるかもしれない．

実際問題としては，"独立同一分布にしたがう安定分布"のモデルを否定するデータは多く，筆者の若干の（数理的にもう少し正当だと筆者は考えている）実証調査からみても，もし非正規安定分布に立脚するにせよ，何らかの"味付け"は不可避のようである．

6. 解題とおわりに

現在の証券市場分析には，その出発点の違いによっていくつもの異なる流派がある．本稿は，これらを考慮した上での，ファイナンス用確率過程へのバランスのとれた入門であるというよりは，むしろ個人的バイアスを積極的に含めて書いた解説記事である．

第1節，第2節は，それぞれ，確率空間と確率過程の用語解説である．Hopf-Kolomogorov の拡張定理は，単に拡張定理と呼ばれることが多い．Hopf-Kolomogorov の定理という名称は，

J．ヌブ："確率論"（鶴見　茂，大石尚弘，川尻信

夫訳），共立出版，1974

25ページの訳注によった．

第1-2節のみならず，本稿を通じて，Lebesgue 積分を真面目にやらないことが，説明上の大きなネックになっている．Lebesgue 積分論といっても，実用に徹した立場からすると，“積分の近似の手順を，縦切り中心から横切り中心に代えると，見通しがずっと良くなるよ”というだけのことであるから，経営工学専攻においても，必要が生じたときには，思いきってその科目の前座2－3回分で，Lebesgue 積分概論を正規にやってしまう方が結局効率的かもしれない，という感想を持った．

第3節伊藤積分の話は，直観的にはわかりやすい話である．すなわち，第3.1節の例で見るならば，証券価格が毎回の変動の期待値が0になるように変動の率を固定しながら，交互に上下すると，1往復毎に

$$(1+\alpha/n)(1-\alpha/n)=1-(\alpha/n)^2 \qquad (6.1)$$

倍になる．往復の回数がnのオーダーであるなら，右辺第2項はnが十分に大きいとき0とみなせる．しかし，ブラウン運動においては，この上下振動がより頻繁に起こるために，本来ならnの増加とともに無限に小さくなるはずであった式(6.1)右辺第2項の影響が有限の値に留まってしまうのである．関数の形が$\log X$からより一般の形$f(x)$になったとき，伊藤積分のずれ項の大きさが$f''(x)/2$で与えられることは，大雑把には Taylor 展開の第2項をとることで説明されるのであり，かくして，Stratonovich 積分が通常の積分と一致してしまうのは，微分方程式の近似計算において，台形則を用いると前進オイラー則と比較して，離散化誤差のオーダーが1だけ上がるというよく知られた事実を述べているにすぎない．しかし，要点はたったこれだけのことなのであるが，関数を第1節で述べたように，確率論の枠組み自体が厄介なために，正確な記述は厄介な手続きを踏まなくてはならず，結局，門外漢の立ち入る余地をほとんどなくさせてしまっている．

第3節例2は，ファイナンスへ入門の中にあげる説明例としては不適切かもしれない．じつは，筆者がかつて受験勉強で日本史・世界史を詰め込んでいた頃，“生産力の増加とともに，少数の富裕な階層と多数の貧困な階層へと分化がすすみ”という主旨の記述を読んで，“総生産量が増加しているならば，多数の構成員の生活水準が以前より悪化するのは，相当特殊な状況でなければ起こらないのではないか”と思え，長い間すっきりした気分になれなかった．今回，伊藤積分の意味するところを反省してみると，特別な説明（搾取の強化，戦争捕虜の奴隷化，その他）を受けなくとも，自然にそのような事態は起こりうる（あるいは起こる傾向を持ちうる）ものなのだということを，少なくとも個人的には得心がいった気がしたので，読書諸賢から関連するお教えをいただけるやもしれぬと思い，あえて記してみたものである．しかし，歴史を専門とされる方は一笑に付されるかもしれない．（このモデルを文字どおりに受けとるなら，たとえば，“生産財をいくら集積しても，1人でそれを使いこなせるのか”といった批判等には，知らん顔をするしかないのである）

例3に関連して第3.4節（本文中では誤って第3.5節となってしまった）で述べたリスク・プレミアムの問題も，筆者の知る限りでは，このような説明は今までなされていないのではないかと考えている．読者諸賢のご批判を願う次第である．同じく第3.4節で述べた，実証研究の平均収益率の計算法の問題も筆者がかねがね疑問に思っていることである．しかし，結局，先駆的な決定版は存在せず，研究者がその場合ごとに自分のその時点の立場を明確に意識し，読者に誤解を与えないように記述するほかないのであろう．

入門の時点で必要不可欠ではないということで省略したが，第3節には，マルチンゲールの表現定理等，その他に言及すべき内容も少なくない．これなどについては手近なところで参考書を上げるなら，

渡辺信三：“確率微分方程式”，産業図書，1975

等を上げるほかないのであろうが，経営工学のカリキュラムを少々手直ししたくらいで，この数学的に透明な良書を理解できる卒業生が何パーセント増えるかについては，まったく保証できない．

第4節例1（文中に筆者の責任による重大な誤植があり，次のような訂正が必要である．

478頁右4行目(3.2.7)⟶(3.2.7)で$\mu=r$の場合

478頁(4.1.1)，(4.1.2)式　μ(すべてのμ)⟶r

478頁右下より4行目式⟶式のプットに対する形）の文中でも言及したが，Black-Scholes式のファイナンス的立場から重要な点は，リスク・プレミアムの存在の結果$\mu\neq r$となる場合でも，あたかもリスク中立を想定しているかのごとき（訂正後の）(4.1.2)式が成立することである．ここにも，ブラウン運動の見本関数が有界変動でないことに起因する“魔法”が存在する．

第4節例3は，“PBR (Price Bookvalue Ratio，株価純資産倍率）が1より小さくなることはない”という

命題を最も原始的に表現してみたものである．しかし，時間的なスケールからみても，（所有する土地の含み益等に起因する誤差等により）ＰＢＲが実際の状況を必ずしも正確に表現しているかという観点からみても，例2のような正確さはもとより望むべくもない．しかし，通常の証券価格変動の理論では無視されているようにみうけられるので，あえて記してみた．

第**4**節では，Black-Scholes式の導出に必要な“数学”については述べたが，Black-Scholes式そのものの実際の導出については，意図的に避けている．これらは，本連載に続いて企画されている．ファイナンスそのものの入門講座の中で詳述されるであろう．

第**5**節は Mandelbrot のフラクタルの理論に関連して，近年改めて注目されている話である．筆者は，単に証券価格変動はにどまらず，フラクタルの考え方できわめて多数の現象が説明できると期待するのは楽天的にすぎると考える者であるが，フラクタルの考え方があまりに魅力的であるために，これへの言及を端折るわけにはゆかないと考える者でもある．

証券価格変動を安定分布で説明しようとする立場の他に，もう1つのフラクタル的アプローチとして，長期的相関の存在を疑う立場がある．不勉強にして，筆者はこの立場を時間的連続モデルのもとで数学的に正当化した論証を知らないし，Mandelbrot 自身はこのモデルの証券価格変動への適用を強力には主張していないが，関心のある方は，とりあえずベンワー B.マンデルブロー：“フラクラル幾何学”（広中平祐監訳），日経サイエンス社，(1985)を，ヨセフ効果・ノア効果等のキーワードで参照されるのがよいであろう．

8. 謝 辞

本誌編集委員長の高森先生は，筆者の怠慢によるはなはだしい原稿の遅れ，さらには第1回，第2回の原稿紙数の大幅な超過を快くお許しくださったのみならず，原稿の不備について多数のご指摘をくださった．本稿の執筆にあたっては，畏友西尾敦（明治学院大学），田村要造（慶応大学）の両氏から多くのご意見やお教えをいただいた．また，筑波大学の藤重悟，宮本定明の両先生は原稿をお読みくださり，多数の問題点を指摘してくださった．また，同大学の厚見先生からは，特に第**3**節の歴史・経済的な用語法について，有益なコメントをいただいた．この場を借りて厚くお礼申し上げる次第である．

本稿の執筆の一部は，文部省科学研究費一般研究(C)，筑波大学学内プロジェクトの援助を受けて行なわれた．