

# ファイナンスのための確率過程入門

## (Ⅲ)

岸本 一男

### 4. 拡散過程

#### 4.1 はじめに

証券の実用取引の分野にまで確率過程を用いた計算結果が浸透しつつある（あるいはすでに浸透している）大きな原因の1つは、オプションと呼ばれる証券の値段を合理的に設定したいという要求である。そして、現在よく用いられているいくつかの公式の理解に話を限定するならば、前節までの議論によって、その要求にある程度までは答えることができる。

##### <例1>

行使価格  $c$  円のヨーロッパン・プット・オプションとは、その所有者に対し、その指定する期日に指定する株式を価格  $c$  円で一定の株数販売することを保証する権利である。（いくら株価が下がっていても、無理矢理その値段で契約の相手方に引き取られることができるのである。）したがって、たとえば、株価が暴落することが懸念される場合に、株式とともにヨーロッパン・プット・オプションを必要量所持しておれば、株価が暴落しても、実は株価が所定期日に  $c$  円になったのと同じことになるわけである。この権利を行使するか否かは所有者の自由であって、したがって、株価が  $c$  円を越えていれば権利は行使されないことになる。これは、オプションを一種の（掛け捨て）保険として利用できることを示しているわけであるが、その“保険料”を、オプション購入時に相手方に支払う必要がある。このオプションの値決めはどのように行なえば合理的であろうか。（生命保険料率の計算を連想するではないか）

きしもと かずお 筑波大学 社会工学系

〒305 つくば市天王台1-1-1

この場合、原株の価格変動が第3節で述べた(3.2.6)式で記述される確率微分方程式にしたがい、したがって、現時時刻を  $t=0$  とした場合の、時刻  $t$  での価格  $X$  の対数  $Y=\log X$  の価格変化の分布が、正規分布(3.2.7)にしたがうとしよう。このとき、現在価格が  $x_0$  のある株式に対する、行使価格  $c$  のプット・オプションを所持することによって得られる満期時刻  $t$  での利得の期待値は、

$$E[P] = \int_{-\infty}^{\log c} (c - e^y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{\{y - \log x_0 - (\mu - \sigma^2/2)t\}^2}{2\sigma^2 t}\right] dy \quad (4.1.1)$$

で与えられる。現時時刻0から時刻  $t$  までの間の、連続複利で計算した安全利子率  $e^{-rt}$  で割り引くと、現時点におけるプット・オプションの価値  $w$  は、標準正規分布の累積分布関数を  $N(\cdot)$  と記した時、

$$\begin{aligned} w &= e^{-rt} E[P] \\ &= ce^{-rt} N\left(\frac{\log \frac{c}{x_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{c}}\right) \\ &\quad - x_0 N\left(\frac{\log \frac{c}{x_0} - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{c}}\right) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

で与えられる。（式(4.1.1)からの機械的な式変形である。各自計算せよ。）ファイナンスの立場からは、プット・オプションの満足すべき確率微分方程式に対し裁定取引の考え方を適用しながら、リスク・プレミアムを考慮に含めてもこの結果が変わらないことを議論する。このような、ファイナンス固有の議論は本稿では省略するが、どのみち結果は変わらないということで、とりあえず納得するだけならば、(4.1.2)が著名な Black-Scholes 式なのである。

さて、オプションに関連した議論をより深く理解するには、見本関数が確率1で連続となる確率過程が、2階の放物型偏微分方程式で記述されることを理解しておく

と見通しがよい。特に、次のような  $X_t$  の範囲に制約がある場合の計算を行なう場合には、実用計算上も有意義である。その詳細は本稿の論じ得るところではないが、4.2節以下で筋道だけを述べる。

#### <例 2>

ヨーロッパ・プット・オプションでは、価格の対数を取って考えれば、状態空間が全実数となる確率過程としてモデル化することが可能である。これに対し、その変種と見なせるアップ・アンド・アウト・プット・オプション（あるいはアップ・アンド・アウェイ・プット・オプションとも言う）においては、株価が一時的にでもある上限値  $c$  を越えると契約が自動的に破棄される。この場合には、実際の株価自身は全実数を取るのではあるが、閉区間  $(-\infty, c]$  の端点にくると、（たとえその後、再び所定の区間内に戻ってきたとしても、もはやそれは効力を持たないわけであるから、）実質上株価そのものが消滅してしまった（あるいは、再び戻ることのできぬ“天国”に行ってしまった）ものとして各種の計算をする必要がある。この意味で“吸収壁”をもった閉区間上での確率過程としてモデル化されなくてはならない。

#### <例 3>

ある企業の全資産価格を発行済株式の総数で割れば、1株あたりの資産価格  $c$  が得られる。株価が  $c$  より大なるときはブラウン運動にしたがって変動するとしてみよう。しかし、その株価が  $c$  を下回ったとすれば、その値段ですべての（あるいは過半数または3分の2の）株式を買い占めた後資産を売却すれば、（少なくとも理論上は）確実に利益を得ることができるわけであるから、株価が  $c$  をわずかでも越えた瞬間に誰かが積極的にこの株式を購入するはずである。この行動の結果として、株価は  $c$  を割り込めないと考えられる。この場合株価は、状態空間が  $[c, \infty)$  で  $c$  で“反射壁”を持つブラウン運動としてモデル化できるであろう。

これに限らず、価格的に何らかの大小関係を有すべき2つの量があった場合に、この大小関係が破られたとするならば、この大小関係の破れを利用して確実な利益を得ようとする者が現われるはずであるから、この不等号関係は（理論的には）破られない。

## 4.2 マルコフ過程

確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上の確率過程  $\{X_t, t \in X\}$  は、任意の  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$  ( $s_i \in T$ ) に対して、

$$P(X_t \in E | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \dots, X_{s_n} = x_n)$$

$$= P(X_t \in E | X_{s_n} = x_n), \text{ a. s.} \quad (4.2.1)$$

が成立するとき、マルコフ過程と呼ばれる。ただし、 $E$  は1次元 Borel 集合である。（一般には“ $X_t$  の値域の開集合全体を含む最小の  $\sigma$  代数の元”であるが、本稿では、第2.1節の確率過程の定義において、 $X_t$  の値域を実数としたので1次元 Borel 集合となるわけである。）式(4.2.1)は、多数の過去の情報が与えられても、有効な情報を与えているのは最も新しい情報だけで、それ以前の情報は全く無駄であることを意味している。すべての2時点での同時分布が定まれば、任意の有限個数の時点の状態が与えられた条件のもとでの  $X_t$  の条件付き分布が、定まってしまうわけである。この2時点の関係を与える確率法則  $P(X_t \in E | X_s = x)$  は、推移確率（あるいは転移確率、推移関数）と呼ばれる。推移確率は、互いに整合的に、また確率を記述するときの常として適当な可測性を満足して定義されなくてはならない：

- (a) 時刻  $s, t$  と Borel 集合  $E$  を固定したとき、 $x$  に関して Borel 可測、すなわち、 $\{x: P(X_t \in E | X_s = x) \leq a\}$  なる集合はすべての  $a$  に対して Borel 集合になる；
- (b)  $P(X_t \in E | X_s = x)$  は、 $s, t, x$  を固定したとき  $E$  に関して確率測度になる；
- (c) すべての  $0 \leq s < t < u$ 、実数  $x$ 、Borel 集合  $E$  に対し、関係式

$$P(X_u \in A | X_s = x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_u \in E | X_t = y) P(y \leq X_t < y + dy | X_s = x)$$

が成立する。

ここで実質的な制約となっているのは (c) であり、Chapman-Kolmogorov の関係式と呼ばれる。状態の個数が有限で時間が離散的なマルコフ過程では、(c) の右辺は行列の積で表現され、現在の多くの大学学部で行なわれている経営工学の講義でもおなじみのものである。推移確率系の一致する2つのマルコフ過程は、同値であると呼ばれる。

ブラウン運動が、さらには任意の独立増分過程が、マルコフ過程であることは明らかである。マルコフ過程  $\{X_t, t \in X\}$  の推移確率は、任意の  $t \in T$  に対して、

$$P(X_t \in E | X_s = x) = P(X_{t-s} \in E | X_0 = x)$$

を満足するとき、定常推移確率あるいは（時間的に）一様な推移確率という定常推移確率を持つマルコフ過程を、一様マルコフ過程という。以後本稿では、一様マルコフ過程を取り扱うこととし、その（定常）推移確率を  $p(t-s, E, x)$  と記そう。

### 4.3 半群と生成作用素

状態空間すなわち  $X_t$  の値域  $S$  上で定義され適当な条件を満足する有界な Borel 関数の集合を  $K$  と記そう。

$K$  の任意の元  $f$  と時間  $t$  に対し、

$$T_t f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, dy, x) f(y) \quad (4.3.1)$$

によって  $T_t$  を定義する。この時、 $f \in K$  ならば、任意の  $t$  に対して、 $T_t f \in K$  が成立するとしよう。すると、 $T_t$  は  $K$  から  $K$  への (線形) 作用素である。Chapman-Kolmogorov の関係式をこの作用素を用いて表現すれば、

$$T_{t+s} = T_t T_s$$

となる。また、 $T_0 = I$  ( $I$  は恒等作用素) が成立する。この作用素の系  $\{T_t\}$  をマルコフ過程に付随する半群という。状態空間  $S$  上で定義された2つのマルコフ過程において、その半群が一致すれば、その推移確率系が一致し、したがって同値なマルコフ過程になる。半群が与えられたとき、線形作用素  $A$  を

$$A f(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{T_{\Delta t} f(x) - f(x)\} / \Delta t \quad (4.3.2)$$

で定義し、マルコフ過程の生成作用素と呼ぶ。マルコフ過程の基本的な結果の1つは、適当な条件の下で、この生成作用素がマルコフ過程を一意に決定するというものである。それを示す枠組みは、大きく言って2つのものがある。

$\{T_t\}$  が Feller 半群 ( $t$  に関し強連続で  $0 \leq f \leq 1$  なら  $0 \leq T_t f \leq 1$ ) と呼ばれる半群をなす場合には、 $K$  を適当な有界連続関数の集合にとると、 $\{T_t\}$  が然るべき条件 (強連続縮小半群) を満たすので、 $A$  の定義域を  $K$  のうちで (4.3.2) の右辺が一様収束するものの集合に取れば、吉田-Hille の定理と呼ばれる一般的な定理が適用できて、生成作用素がマルコフ過程を一意に決定することになる——と話が進む。

$\{T_t\}$  が右連続な強マルコフ過程 (説明略) を定める場合には、 $A$  の定義域を適当 (詳細略) に取れば、今度は確率積分にもとづいて、生成作用素がマルコフ過程を同値性を除いて一意に決定することが示される。

### 4.4 拡散過程

マルコフ過程は、見本関数が消滅時間 (たとえば第4.1節例2においては、アップ-アンド-アウト・プット・オプションにおいて契約が無効になる値をはじめて取る時間がこれにあたる) までの間を通じて確率1で連続であ

るとき、拡散過程であると呼ばれる。拡散過程の生成作用素は、適当な“正則性”の条件のもとで、適当な境界条件を満たす2階の偏微分作用素 (状態空間が有限次元ユークリッド空間内の領域である場合、適当な境界条件を満足する2階の楕円型偏微分作用素) になる。

たとえば、第3節で触れた確率微分方程式 (の時間に陽に依存しない場合)

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + \beta(X_t) dB_t, \quad X_0 = x$$

に対しては、伊藤の公式 (3.2.3) によって、

$$df(X_t) = \{f_x(X_t)\alpha(X_t) + (1/2)f_{xx}(\beta(X_t))^2\} dt + f_x(X_t)\beta(X_t) dB_t \quad (4.4.1)$$

である。式 (4.3.1) を素直に書き換えると、 $T_t f(x) = E[X_t | X_0 = x]$  となる。式 (4.4.1) 右辺右端の項は定理3.1によってマルチンゲールなので、期待値は0である。これらに注意しながら (4.3.2) を考えれば、

$$A = \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} (\beta(x))^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.4.2)$$

であることが導かれる。もし、 $T_t f(x)$  に対し  $A$  が定義されうるなら、

$$dT_t f(x) / dt = AT_t f(x) \quad (4.4.3)$$

が成立していることに注意しよう。実数上の適当な区間  $E$  を取り

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

と置き、関数  $p(t, a)$  を  $p(t, a) = T_t f(a)$  で定義すると、 $p(t, a)$  は  $X_t$  が時刻0で値  $a$  を取るという条件のもとで、時刻  $t$  で  $X_t \in E$  が成立する確率である。(4.4.2) と (4.4.3) から  $p(t, a)$  は、

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha(x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} (\beta(x))^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (4.4.4)$$

を満足する。4.1節例2, 例3の場合のような場合には、それぞれ  $f(c) = 0$ ,  $f_x(c) = 0$  という境界条件のもとで (4.4.4) を解けば、領域に制約がある場合にも確率計算が可能になる。

×

×

×