連載講座

ファイナンスのための確率過程入門
(II)

岸本　一男

3. 確率積分

3.1 証券の収益率計算への2つのアプローチ

証券価格の変化をそのまま収益とみなして議論すると，収益計算に大きなバイアスが出ることに注意しよう．たとえば1000円を投資すれば，1株100円の株式ならば10株，1株1000円の株式なら1株購入することができる．(手数料，税金等の問題は無視しよう．) ここで，100円の株が100円上がって200円になれば (200－100)×10＝1000円の収益が上がるのに対し，1000円の株式が100円上昇しても (1100－1000)×1＝100円の収益が上がるにすぎない．収益を決定するのは上昇比率であって，上昇の絶対額ではないのである．収益率の計算を加減演算を用いて行なっても，結果が証券価格に依存することのないようにするために，しばしば，証券価格の対数をとって議論が行なわれる．

“証券価格は何らかの確率過程にしたがって変動する”と仮定するのが，ファイナンス理論においてこの90年間続いている基本的立場である．もちろん，この確率過程を先験的に特定することはできないから，過去のデータをもとに何らかのモデルを作り，そのパラメータを推定することになる．

さて，たとえば，ランダムに変動することがわかっているある証券の価格が，継続したm日間の取引日の終値で100円，200円，100円，200円，……，100円と変動しているのが観測されたとする．この証券の1日あたりの収益率の推定法として，以下のどれを取ればよいであろうか：

(a)　(200/100)×(100/200)×…×(100/200)＝1であり，投資金額が1倍のままなので収益率は0である；

(b_0)　(200－100)/100＝1.0の収益率を上げた日が$m/2$日あり，(100－200)/200＝－0.5 の収益率を上げた日が $m/2$日あるので，それらの平均をとって0.25である．

今後の説明の都合上からは，次の計算法も考えておくと相互関係が明瞭になる：

(b_1)　収益率計算の基準日を当日ではなく翌日に取って計算し，(200－100)/200＝0.5 の収益率を上げた日が$m/2$日あり，(100－200)/100＝－1.0の収益率を上げた日が $m/2$日あるので，それらの相加平均をとって－0.25である．

(a)，(b_0)，(b_1) での取扱いは，それぞれ，次の考え方を出発点として持っていると考えられる．

(a')　証券価格の増減が対数目盛りで考えて，上下に対称な場合，すなわち，証券価格でみれば，x円が$(1+c)x$円になることと$(1+c)^{-1}x$円になることとが同じ確からしさで起こる場合に，収益率は0だと推定されるべきである．

(b_0')　証券価格が，x円から$(1+c)x$円になることと$(1-c)x$円になることとが同じ確からしさで起こる場合に，収益率は0だと推定されるべきである．

(b_1')　$(1-c)x$円がx円になることと$(1+c)x$円がx円になることとが同じ確からしさで起こる場合に，収益率は0だと推定されるべきである．

これらの考え方の各々から，離散時間上で定義されたランダムウォーク (の変種) が導かれる．本稿での主題たる連続した時間上で定義された確率過程での振る舞いを近似するために，証券取引の時間間隔を狭めて，1日

きしもと　かずお　筑波大学　社会工学系
〒305 つくば市天王台1－1－1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

に n 回の取引が，ちょうど $\Delta t=1/n$ だけの時間間隔をおいて行なわれる場合を検討しよう．証券価格変動において通常前提とされる仮定に近づけるために，確率的変動が存在しなかった場合には，1取引間隔あたり $\mu x \Delta t$ だけの固定収益が得られるものとし，この無危険で保証された利回りに，さらに(a'), (b$_0$')または(b$_1$')（ただし定数 c は固定する）で確率的に定まる収益が上乗せされる場合を考えよう．この時，Δt 後の取引での証券価格 $X_{t+\Delta t}$ は，次のように定まる．

まず，(a')の立場からは，

$$\log X_{t+\Delta t}-\log X_t=\log(1+\mu/n)\pm\log(1+c) \tag{3.1.1}$$

において，右辺第2項の $\log(1+c)$ の前の符号＋と－とが等確率で出現するわけであるから，

(a'') $P[X_{t+\Delta t}=(1+c)(1+\mu/n)X_t]=1/2,$

$P[X_{t+\Delta t}=(1+c)^{-1}(1+\mu/n)X_t]=1/2,$

が得られる．一方，(b$_0$')と(b$_1$')の立場からは，それぞれ，

$$X_{t+\Delta t}-X_t=(\mu/n\pm c)X_t, \tag{3.1.2}$$

$$X_{t+\Delta t}-X_t=(\mu/n\pm c)X_{t+\Delta t}, \tag{3.1.3}$$

の関係式が自然に得られる．毎回，(3.1.2)と(3.1.3)とを別々に記述するのは煩わしいので，実数 λ $(0\leqq\lambda\leqq1)$ をパラメータとするこれらの重み付き1次結合

$$X_{t+\Delta t}-X_t=(\mu/n\pm c)\{\lambda X_{t+\Delta t}+(1-\lambda)X_t\} \tag{3.1.4}$$

を考える．(3.1.4)を $X_{t+\Delta t}$ に関して解けば

(b$_\lambda$'') $P[X_{t+\Delta t}=\{1-\lambda(\mu/n+c)\}^{-1}\{1+(1-\lambda)(\mu/n+c)\}X_t]=1/2,$

$P[X_{t+\Delta t}=\{1-\lambda(\mu/n-c)\}^{-1}\{1+(1-\lambda)(\mu/n-c)\}X_t]=1/2,$

が得られる．(b$_0$')と(b$_1$')とは，$\mu=0$ において，それぞれ，$\lambda=0$ あるいは，$\lambda=1$ とおいた場合にあたっている．

さて，(a'')の場合から考えよう．X_t の自然対数 Y_t をとって考えれば，

$$P[Y_{t+\Delta t}=Y_t+\log(1+c)+\log(1+\mu/n)]=1/2,$$

$$P[Y_{t+\Delta t}=Y_t-\log(1+c)+\log(1+\mu/n)]=1/2,$$

である．時刻 $t=0$ に $Y_0=0$ で取引された証券の，時刻 t での対数的価格 Y_t の確率分布は2項分布にしたがうから，Y_t が値 $nt\log(1+\mu/n)+\log\{(1+c)^{(2k-n)t}\}$ をとる確率は

$$P[Y_t=nt\log(1+\mu/n)+\log\{(1+c)^{(2k-n)t}\}]=\frac{{}_{nt}C_{kt}}{2^n}$$

で与えられ，Y_t の平均と分散とは，それぞれ，

$$E[Y_t]=nt\log(1+\mu/n),$$

$$V[Y_t]=n\{\log(1+c)\}^2t,$$

となる．有限分散の確率過程を取り扱いたいので，$n\to\infty$ で $V[Y_t]$ が一定有限値 σ^2t に近づくように，$c=\sigma/\sqrt{n}$ と定める．自然対数の底 e の定義より，任意の実数 α に対して

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha/n)^n=e^\alpha \tag{3.1.5}$$

が成立し，したがって $E[Y_t]\to\mu t$, $V[Y_t]\to\sigma^2t$ となることに注意しながら，二項分布に対して中心極限定理を適用すれば，$n\to\infty$ の極限において，Y_t の確率密度関数 $f(y)$ は，次の正規分布で与えられることがわかる：

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2t}\right\}. \tag{3.1.6}$$

では(b$_\lambda$'')の場合はどうであろうか？ X_t の自然対数 Y_t をとって考えれば，

$$P[Y_{t+\Delta t}=Y_t-\log\{1-\lambda(\mu/n+c)\}+\log\{1+(1-\lambda)(\mu/n+c)\}]=1/2,$$

$$P[Y_{t+\Delta t}=Y_t-\log\{1-\lambda(\mu/n-c)\}+\log\{1+(1-\lambda)(\mu/n-c)\}]=1/2,$$

である．ここで

$$K_+=-\log\{1-\lambda(\mu/n+c)\}+\log\{1+(1-\lambda)(\mu/n+c)\},$$

$$K_-=-\log\{1-\lambda(\mu/n-c)\}+\log\{1+(1-\lambda)(\mu/n-c)\},$$

とおこう．時刻 $t=0$ に $Y_0=0$ で取引された証券の，時刻 t での対数的価格 Y_t は2項分布にしたがい，

$$P[Y_t=t\{k\log K_++(1-k)\log K_-\}]=\frac{{}_{nt}C_{kt}}{2^n},$$

で与えられる．Y_t の平均と分散の n と c とに関するべき展開の最初の部分が

$$E[Y_t]=(K_++K_-)nt/2,$$

$$=\mu-(1-2\lambda)(\mu^2/n+c^2n)/2+\cdots$$

$$V[Y_t]=(K_+-K_-)^2nt/4$$

$$=ntc^2+o(c^2)$$

で与えられることに注意しよう．$n\to\infty$ で $V[Y_t]$ が一定有限値 σ^2t に近づくようにするには，

$$c=\sigma/\sqrt{n}$$

と定めればよかったことがわかる．かくして，Y_t の平均と分散とは，それぞれ，

$$E[Y_t]=\mu t-(1-2\lambda)\sigma^2t/2,$$

$$V[Y_t]=\sigma^2t$$

で与えられることがわかる．よって，中心極限定理により，$n\to\infty$ において Y_t の確率分布関数 $f(y)$ は，次の正

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

規分布に近づくことがわかる：

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[-\frac{\{y-\mu t+(1-2\lambda)\sigma^2 t/2\}^2}{2\sigma^2 t}\right]. \tag{3.1.7}$$

ここまでの説明だけでは，単に，証券市場での最も基本的な設定のもとで，初等的なランダムウォークの時間間隔を0に近づけた極限を計算してみたものにすぎず，連続時間上の確率過程との対応は定かでない．しかし実は，この極限が連続時間上の確率過程を定義していることを，証明することが可能である．そして，ここまでの計算過程は，確率過程の確率積分と呼ばれる手続き（あるいは量）を，かなり忠実に説明したものになっている．事実，ここで見られた基本的性質は，時間的に連続なプロセスでの確率積分を厳密に定義する場合にも素直に遺伝する．

かくして一群の解が得られたが，これらの解は，数学的な立場からはいずれも正当なものであり（あるいは正当化されうるものであり），いずれを採用するべきかについての議論には，何らかのファイナンスの立場からの考察・検証が不可欠である．

もし Y_t の世界での簡明さを意図するなら，(3.1.6)が，あるいは(3.1.7)で $\lambda=1/2$ とおいたもの（両者の一致は偶然ではない）が，もっとも平明な解であろう．この解を導くアプローチ，特に（$\mathrm{b}_{0.5}''$）を一般的に厳密に定義したものは Stratonovich 積分として知られている確率積分であり，制御論等でしばしば用いられる．しかし，証券市場分析の立場からすると，このアプローチは不適当な（より正確には，不適当と信じられている）性質を有している．証券の収益の期待値は，

$$\begin{aligned}r(t)&\equiv E[(X_t-X_0)/X_0]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\\&\quad\exp\left[-\frac{\{y-\mu t-(1-2\lambda)\sigma^2 t/2\}^2}{2\sigma^2 t}\right]dy\\&=\exp(\mu t+\lambda\sigma^2 t/2)\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

で与えられるわけである（各自筆をとって確かめよ）が，$\lambda>0$ ではこの値は，確率的変動がなかった場合の収益率 $\exp(\mu t)$ より狭義に大きい．このことは，確率的変動が収益の期待値を増加させることを意味している．もし，投資家の証券に対する見積の変動が証券価格の変動を引き起こすのだとすれば，その変動は収益率の期待値に対して影響を与えるとは考えにくい（と素朴には考えられる）．別な言い方をすれば，$\mu=0$ のとき過程はマルチンゲールであるべきである．われわれは，すでに(3.1.8)より，（b_0''）の場合，すなわち，（b_λ''）で $\lambda=0$ とおいた場合に計算した極限のみが，マルチンゲールとなることを知っている．$\lambda=0$ の場合を，連続時間のもとでより一般的に厳密に定義したのが，伊藤積分と呼ばれる確率積分である．このような事情から，確率積分を意識して用いたファイナンスの理論研究は，大半が伊藤積分の立場をとっている．“入門”をめざす本稿でも伊藤積分を中心に扱わなくてはならない．

3.2 伊藤積分と確率微分方程式

伊藤積分を正確に定義するには，確率空間をどのようにとるか，確率変数列が収束するとはどういうことか等についてのいくつかの定義と，関連する諸定理とを述べることが必要である．しかし，本稿の性格からして，この条件を正確に記述することはかえって混乱をまねくおそれが強いので，大局を見失わない範囲で大幅に省略した不完全な記述を行なう．

［定義 3.1］ 適当な条件（(t,ω)に関して同時可測で，任意の有限期間に対して，その自乗積分の期待値が有限）を満足する確率過程 $\{\Phi(t;t):t\geqq 0\}$ が与えられたとする．今，期間$[a,b]$の分割を $\Delta=\{t_i: a\leqq t_0\leqq t_1\leqq\cdots t_n\leqq b\}$ で定義すると，1つの分割に対してただ1つの関数（(t,ω)-階段関数と呼ばれる）を，次のように定めることができる：

$$\Psi(t;\omega)=\Phi(t_k;\omega).\quad(t_k\leqq t<t_{k+1};\ k=0,\cdots,n-1)$$

階段関数 $\Psi(t;\omega)$のブラウン運動 $B=\{B(t;\omega):t\geqq 0\}$ に関する確率積分を

$$\begin{aligned}\int_a^b\Psi(t;\omega)\,dB(t;\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(t_k;\omega)\,[B(_{k+1};\omega)\\-B(t_k;\omega)]\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

で定める．この時階段関数の列 $\{\Psi_m(t;\omega):m=1,2,\cdots\}$ を適当に選んで $\Phi(t;\omega)$に収束（正確には平均自乗収束）するように取れる．このような(t,ω)-階段関数に対する確率積分の極限（正確には平均自乗収束極限）は，収束列の取り方に無関係に一定である．このようにして定義される確率変数を，$\Phi(t;\omega)$ の確率積分と呼び，

$$\int_a^b\Phi(t;\omega)\,dB(t;\omega)$$

と記す． □

この定義の本質的な箇所は，(3.2.1) の右辺が前進差分で定義されていることである．もし，ここが，たとえば後退差分 $B(t_k;\omega)-(t_{k-1};\omega)$で定義されていたなら，定義の内容が異なってしまうことは，前節の例からも推測される．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

前節の例については，(b_0'')の例が，$\mu=0$ の場合にマルチンゲールになること，すなわち，$E[X_t|X_0=a]=a(t>0)$ を見た．一般には，次の定理が成り立つ：

［定理 3.1］ ブラウン運動 $B=\{B(t;\omega):t\geqq 0\}$ と，（確率積分が定義可能であるための諸条件を満足する）確率過程 $\Phi=\{\Phi(t;\omega):t\geqq 0\}$ に対して，次の積分で定義される確率過程 $X=(t;\omega):t\geqq 0\}$ はマルチンゲールである：

$$X(t;\omega)=\int_a^t \Phi(t;\omega)\,dB(t;\omega). \qquad \square$$

ファイナンスの教科書を読むにあたってぜひとも必要なのが次の定理であり，伊藤の公式（あるいは伊藤の微分法則）と呼ばれる．

［定理 3.2］ $F(x)$ を2階連続微分可能関数とし，$B=\{B(t;\omega):t\geqq 0\}$ をブラウン運動とする．確率空間や積分可能性等に関する適当な条件を満足する2つの確率過程 $\Phi=\{\Phi(t;\omega):t\geqq 0\}$ と $\Psi=\{\Psi(t;\omega):t\geqq 0\}$ を用いた関係式で定義される確率過程

$$X(t;\omega)=X(0;\omega)+\int_0^t \Phi(t;\omega)ds + \int_0^t \Psi(t;\omega)dB(t;\omega) \qquad (3.2.2)$$

（伊藤過程と呼ばれる）に対し，次の関係式が成立する：

$$F(X(t;\omega))=F(X(0;\omega))+\int_0^t F_x(X(s))\Phi(s;\omega)ds + \int_0^t F_x(X(s;\omega))\Psi(s;\omega)\,dB(s;\omega) + \frac{1}{2}\int_0^t F_{xx}(X(s;\omega))\,\{\Psi(s;\omega)\}^2 ds. \qquad (3.2.3) \quad \square$$

確率過程 $X=\{X_s:s\geqq 0\}$ と，適当な積分可能条件を満足する実数値関数 $\alpha(X_s,t)$ と $\beta(X_s,t)$ が次の関係式を満足したとする（以下，誤解はないと思われるので $X(t;\omega)$ と X_t の2つの記法を混用しよう）：

$$X_t=X_0+\int_0^t \alpha(X_s,s)ds+\int_0^t \beta(X_s,s)dB_s. \qquad (3.2.4)$$

右辺が X_s を含んでいるので，左辺の X_t はこのままでは陽には定まっていない．しかし，X_s が定まれば，右辺の確率変数が定まり，左辺と等しいか否かのチェックが可能である．つまり，(3.2.4) は，確率積分を用いて定義された方程式である．この時，(3.2.4) を

$$dX_t=\alpha(s,X_t)\,ds+\beta(s,X_t)\,dB_t \qquad (3.2.5)$$

とも記し，確率微分方程式と呼ぶ．ランダムウォークの時間的分点間隔を0に近づけた極限で (3.1.7) が得られたことを思い起こそう．この事実は，対応する確率微分方程式

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dB_t \qquad (3.2.6)$$

を変数変換して $Y_t=\log X_t$ に関する方程式に表現すると，その解の $y_0=0$ の条件下での Y_t の密度関数が (3.1.7) で $\lambda=0$ とおいたもの，すなわち

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[-\frac{\{y-(\mu-\sigma^2/2)t\}^2}{2\sigma^2 t}\right] \qquad (3.2.7)$$

で与えられることを示唆している．事実，(3.2.2) と (3.2.6) とを比較して $\alpha=\mu X_t$, $\beta=\sigma X_t$ に注意しつつ，(3.2.3) において $F(X)=\log X$ とおくと，

$$d\log X_t=(\mu-\sigma^2/2)\,dt+\sigma dB_t \qquad (3.2.8)$$

が得られる．(3.2.4) と (3.2.5) とを比較すれば，(3.2.8) は次の式をシンボリックに表現したものである．

$$\log X_t=\log X_0+\int_0^t(\mu-\sigma^2/2)\,dt+\int_0^t \sigma dB_s. \qquad (3.2.9)$$

この積分は右辺に X_t を含んでいないので，直ちに積分できて (3.2.7) が得られる．これらの事実は，しばしば，ファイナンスの文献の中で利用される．

方程式 (3.2.5) の解の正確な定義，解の存在や一意性についての議論は，数学的立場からは重要であるが，本稿の主旨からして省略する．

3.3 伊藤積分で記述される世界

伊藤積分で記述される確率過程は，感覚的に理解しにくいところがある．ファイナンスでよく用いられる確率微分方程式 (3.2.6) の解の振る舞いを，改めて眺めてみることにしよう．

時刻 $t=0$ でこの解の対数が $y_0=0$ であるという条件のもとでは，Y_t の密度関数が (3.2.7) にしたがうことは，すでに学んだ．(3.2.7) は正規分布であり，その中央値（および平均値）は $(\mu-\sigma^2/2)t$ である．この値が，単純に μt とはならずに分散 σ^2 に依存した補正項が含まれてしまうことが注意を要する点である．次の3つの場合を考えよう：

(C1) $\mu<0$;

(C2) $0\leqq\mu<\sigma^2/2$;

(C3) $\sigma^2/2\leqq\mu$.

(C2) の場合の $X_t=\exp Y_t$ の振る舞いに注目する．この時，(3.2.7) をみれば，時刻 t において証券価格 X_t が元本を割り込んでいる確率 $P[X_t<X_0]=P[Y_t<Y_0]$ は時間の経過とともに増大して，1に近づいていくのである：

$$\lim_{t\to\infty} P[X_t<X_0]=1.$$

実は，より強い命題が成立することも容易にわかる．すなわち，元本のみならず，任意に与えた実数 $a(>0)$ に対し，

$$\lim_{t\to\infty} P[X_t<a]=1 \qquad (3.3.1)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が成立する．一方(3.1.8)において $\lambda=0$ とおけば，その時刻 t における収益率は

$$r=\exp(\mu t) \qquad (3.3.2)$$

で与えられ，分散 σ^2 の影響を受けずに増加していく．大半の投資家が損をしているのに，期待収益率が増加していくのは，巨利を博しているごく少数の投資家がいるからである．

このことを念頭におきながら，伊藤積分で記述されるいくつかの模型的世界を頭の中で描いてみることは，実務的直観を養うには有用であろう．

＜例1＞

きわめて多数の“個人”からなる“社会”を想像しよう．各“個人”はその利用できる“生産財”をもとに，他の“個人”とまったく独立に（“搾取”も“助け合い”もなく）“生産活動”を行ない，その結果として，各“個人”に帰属する“生産財”の量 X_t は，確率微分方程式(3.2.6)にしたががって変動すると仮定する．

時刻 $t=0$ までは，“生産財”は共有されており，私有の概念そのものが存在しないとしよう．（“原始共産制”と呼ぼう．）時刻 $t=0$ からはルールが変わり，“個人”の“生産財”の“所有権”は各“個人”に帰属することになるものとする．成長率 μ があまり大きくなく，分散 σ^2 は大きい（文明が未熟であるために，経済成長率小さく，小さな事件の影響も受けやすいのであろう）とすると，（C2）が成立する．$\mu>0$ であり，“個人”の人数は十分多く，その生産は他の“個人”の生産とまったく独立であると仮定しているから，“社会”の“生産財”の総和は（大数の法則の結果として）ほ確実に増加していく．しかし，(3.3.1)により，時間が十分経過した後には，大多数の“個人”は，$t=0$ の時点で“所有”していた“生産財”のあらかたを失っていることになる．つまり，“社会”の“富”はごく少数の“個人”（“貴族”と呼ぼう）に集中することになる．“社会”全体での“生産財”の増加はさらに続くが，“貴族”に対しても，個々には(3.3.1)があてはまるので，さらに時間が経過していくと，やがて“貴族”も順次“没落”してゆき，その総数が減少してもはや大数の法則は成立しなくなってくる．“生産財”の社会全体での総和もきわめて不安定に変動するようになり，やがてほぼ確実に減少していくことになる……．

その後に何らかのルールの変更（“革命”とか“農地改革”とか呼ぼう）が起こったとし，再び“生産財”を平等に再配分してから，確率過程(3.2.6)を満足しつつ時間的変化が起こるものとする．しかし，今回は成長率 μ は大きく σ^2 が小さいとする（きっと，技術革新等の成果が花開いたのであろう）と，（C3）が成立する．富の格差はやはり生ずるが，(3.2.7)を眺めれば，この場合は大数の“個人”の“生産財”は，“革命”の時点よりはほぼ確実に増加していき，その“生活”が脅かされることはないことがわかる．（“中産階級”が中心的階層となる，と表現することにしよう）

＜例2＞

別の比喩も面白いかも知れない．多数の証券があり，個々の証券の価格が，互いに独立に確率過程(3.2.6)にしたがって変動している証券市場を考える．ただし，パラメータ μ，σ の値は各証券ごとに異なっているものとしよう．

期待収益率 μ も大きいが，分散 σ^2 も条件（C2）を満たす程度以上に大きな確率過程にしたがって変動する証券があったとし，これらのうちの1つの証券に集中的に投資する投資家を“相場師”と呼ぶことにする．（一般には相場師といえども，危険分散のために複数の証券に投資するかもしれないが，このモデルの中では，簡単のためそのようなことはないとしている．）“相場師”が取り扱う証券の期待収益率は大きいのであるから，ある程度多数の“相場師”が存在し，各人が異なる証券に投資しているなら，“相場師”全体としての収益（各々の“相場師”は，そんなものには関心がないであろうが）は，大数の法則により，ほぼ確実に市場平均収益より大きい．証券価格の変動は互いに独立としているから，当然，目だって大きな収益を上げる“相場師”も存在する．しかし，（C2）を仮定しており，“相場師”の総数は有限であはるずであるから，(3.2.6)により，早晩，すべての“相場師”の所持金は，元本（のみならず任意の正の実数）を大きく下回ることになる．つまり，期待収益率は大きくとも，“相場師”はまっとうな最期をむかえることはできないのである．

3.5 ファイナンスの立場からみた伊藤積分

伊藤積分を前提とすると“平均収益率”μ が0のとき方程式(3.2.6)の解 X_t がマルチンゲールにしたがう．ファイナンスの立場から妥当と思われるこの選択のおかげで，われわれの持っている多数のその他の“常識的判断”が通用しなくなることに注意しなくてはならない．

前節（C2）の仮定が成立した場合には，ある固定した

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

額以上の損失を受けた状態に陥っている確率は，$t \to \infty$ では確率1なのであった！　つまり，時刻 t が十分大きくなったとき，ごく少数の巨利を博した投資家が現われる一方で，残りのほとんど全員といってよい投資家は，元本をほぼ完全に失ってしまうことになる．理性ある投資家は，収益の期待値を犠牲にしてでも分散を小さくして，（C2）の状態を何とか（C3）の状態に“改善？”しようと努力するに違いない．証券理論におけるリスクプレミアム（分散を減少させるための代価）は，通常もっと素朴に導入されており，数理工学的立場からアプローチする人間にとっては，必然性を強くは感じにくいものの1つである．しかし，もしもいったん伊藤積分に立脚して(3.2.6)を考える立場に立つことを受け入れてしまうとするならば，強い必然性があることが納得される．

証券価格変動の実データは，必然的に離散時間上でのみ与えられる．“離散時間上の確率過程を連続時間上の確率過程と結びつけて論ずべきであるか否か”を論ずることは本稿の主題ではない．また，“伊藤積分がよいか Stratonovich 積分が適当か”を論ずることも本稿では扱わない．したがって現在までに行なわれている“実証研究”の多くが，方法論上必然的に現われる両者の差異を（少なくとも明示的には）取り扱っていなくとも，そのこと自身には問題は何もない．しかしたとえば過去の証券価格変動のデータから，伊藤積分で定義された方程式(3.2.6)（あるいはその適当な拡張）のパラメータ推定をしようとするならば，“証券価格の対数を取り，終了時刻の値から開始時刻の値を引いて期間の長さで割る”というアプローチで“平均値” μ を求めてはならない．3.1節以後見てきたように，それは Stratonovich 積分でのアプローチをとっているわけであって，伊藤積分の立場からは過大評価となってしまうであろう．

分散を示すパラメータ σ^2 が時間的に変動しないならば，伊藤積分と Stratonovich 積分との間の関係は比較的単純である．しかし，σ^2 の時間的変動が無視し得ないならば，単なるパラメータ推定上の問題を越えて困難な事態が発生する．たとえば，離散時間上で与えられた証券価格の対数の系列相関がちょうど0であることが相当に正確に示された（証券市場の“効率性”と呼ばれる概念を検証する最も古典的なアプローチ）とすれば，それは，伊藤積分のアプローチを正しいとする立場からは，（$\mu=0$ のもとでは）価格系列のマルチンゲール性の反証を与えたことになってしまう．したがって，少なくとも理論上からは，証券市場の“効率性”の実証研究も無反省に行なってはならないのである．

これらの例に限らず，伊藤積分の立場から証券価格変動の実証分析をする場合には，不用意な取扱いは危険である．Stratonovich 積分の立場に徹してしまえば，これら（数学上の）大半の問題を避けることができる．しかし，今度はそのファイナンス上の意味づけに慎重になることが要求されることになろう．

入会者氏名

（正会員）

小田島　央（国際証券㈱），神谷和也（大阪大学），木庭淳（神戸商科大学），草刈君子（富士通㈱），佐藤秀夫（国際電信電話㈱），菅原周一（安田信託銀行），鈴木隆一郎（常葉学園大学），曽根　茂（沖電気工業），戸沢哲夫（札幌工業高校），中島信之（富山大学），樋口文孝（出光石油化学㈱），安永周二（佐倉西高校），山上　伸（東京ガス㈱），山口直人（宇都宮市役所），山本康貴（帯広畜産大学），吉田　均（住友金属工業㈱），淀　繁弘（目黒高校）

（学生会員）

飯島義英（上智大学），石黒　勲（東京理科大学），麻植実（武蔵工業大学），大久保由紀子（筑波大学），古賀広志（神戸商科大学），柴田一隆（東京理科大学），渋谷　慶（東京理科大学），菅原　彰（武蔵工業大学），杉山　学（東京理科大学），寺師元裕（筑波大学），戸ヶ崎陽一（電気通信大学），宮川博貴（名古屋市立大学），孟　慶国（慶応義塾大学）

（賛助会員）

日本郵船株式会社

移動者氏名（学生→正）

秋元弘正　近畿大学→中国情報システムサービス㈱，天本徳浩　九州大学→九州大学，小柳淳二　京都大学→鳥取大学，崎田智博　東京理科大学→東燃石油化学㈱，佐藤祥子　東北大学→富士総研，田辺　匠　東京工業大学→松下電器産業㈱，二神　透　金沢大学→富山大学，松井知己　東京工業大学→東京理科大学，村上広健　法政大，→サントリー㈱，柳谷雅之　電気通信大学→NTT㈱，湯森　猛　東京工業大学→㈱コーポレイトディレクション

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．