

このコラムは、ORにかかわる概念、知識(手法、原理)、それらの図解、よい数材や問題、実学 ORの実施経験、そこから得られた知恵やアドバイス、失敗談と教訓、新しい観点、視座、フレームワーク、未だ解けていない問題、面白い研究テーマなどを、"新鮮に"、しかも、"コンパクトに" 表現し、提示していただくものです。ユニークなアイディア、フレッシュな見方、発想、だれかと 意見をたたかわせたい問題提起など、ふるってご投稿ください。(原稿は、刷り上がり、半ページ から3ページに納まるようにお書きください。簡潔にノ 加筆訂正をお願いする場合があります)

任意の三角形分割から凸な面が構成できるか

杉原 厚吉

次の問題を考えよう.

「x-y 平面上の任意の有限点集合Pと、Pの凸包内部の任意の三角形分割T(ただし各三角形の頂点はPの要素であるとする)が与えられたとき。Pの各要素に適当なz 座標を与えてTを3次元空間へ持ち上げ、下に凸な三角形網が張れるか」(図1参照)

この問題を何ら心の準備なく突然聞かされた人の1つの典型的な反応は,「たとえば,回転放物面 $z=x^2+y^2$ の上へPの各要素を持ち上げればいいんじゃないの?」というものである(筆者自身の反応もそうであった)。しかし,これは間違っている。Pの各要素を $z=x^2+y^2$ の上へ持ち上げて凸包を作ると,そのx-y 平面への投影図はPの Delaunay 三角形分割と一致する [1] という性質を思い出せば,これが間違いであることは容易に理解できよう。

すぎはら こうきち 東京大学 工学部 計数工学科 〒113 文京区本郷7-3-1

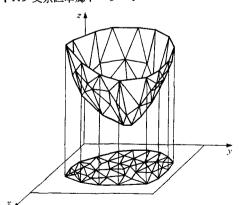


図 1 平面の三角形分割とそれを持ち上げて できる下に凸な三角形網

実は、最初の問題の答は「否」である。図 2(a)に示す 三角形分割が 反例の 1 つで ある。 どんなに がんばって も、これを持ち上げて下に凸な三角形網が作れないこと は、次のようにわかる。

この三角形分割Tの各頂点のz 座標を適当に与えて,下に凸な三角形網が張れたと仮定する。T を構成する三角形 f_i に対応して空間に張られた三角形を F_i と書くことにする。x-y 平面上の任意の点p を固定し,p を通りz 軸に平行な直線と面 F_i の載っている平面との交点を z_i とする。このとき,p からx-y 平面上の任意の方向へ延ばした半直線が三角形 f_i と f_j をこの順序で通過するなら, $z_i>z_j$ が成り立つ。なぜなら,空間に張った三角形網は下に凸であるから。

ところで、図2(b)に示すように点pを選ぶと、半直線a,b,cからそれぞれ $z_1>z_2$ 、 $z_2>z_3$ 、 $z_3>z_1$ が得られることになり矛盾である。したがって、図2(a)は、下に凸な三角形網の投影図ではあり得ない。

参考文献

[1] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

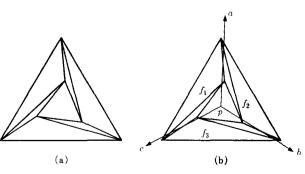


図 2 反例

1990 年 6 月号