

任意の三角形分割から凸な面が構成できるか

杉原 厚吉

次の問題を考えよう。

「 $x-y$ 平面上の任意の有限点集合 P と、 P の凸包内部の任意の三角形分割 T (ただし各三角形の頂点は P の要素であるとする) が与えられたとき、 P の各要素に適切な z 座標を与えて T を 3次元空間へ持ち上げ、下に凸な三角形網が張れるか」(図1参照)

この問題を何ら心の準備なく突然聞かされた人の1つの典型的な反応は、「たとえば、回転放物面 $z=x^2+y^2$ の上へ P の各要素を持ち上げればいいんじゃないの?」というものである(筆者自身の反応もそうであった)。しかし、これは間違っている。 P の各要素を $z=x^2+y^2$ の上へ持ち上げて凸包を作ると、その $x-y$ 平面への投影図は P の Delaunay 三角形分割と一致する [1] という性質を思い出せば、これが間違いであることは容易に理解できよう。

すぎはら こうきち 東京大学 工学部 計数工学科
〒113 文京区本郷7-3-1

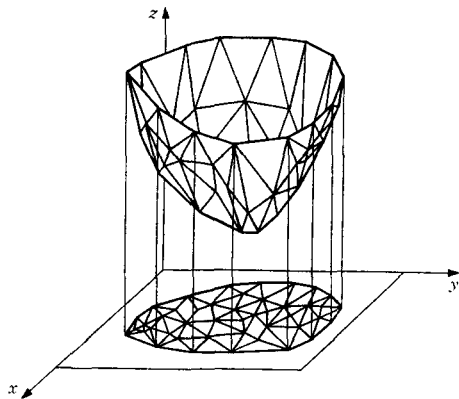


図1 平面の三角形分割とそれを持ち上げてできる下に凸な三角形網

実は、最初の問題の答は「否」である。図2(a)に示す三角形分割が反例の1つである。どんなにがんばっても、これを持ち上げて下に凸な三角形網が作れないことは、次のようにわかる。

この三角形分割 T の各頂点の z 座標を適当に与えて、下に凸な三角形網が張れたと仮定する。 T を構成する三角形 f_i に対応して空間に張られた三角形を F_i と書くことにする。 $x-y$ 平面上の任意の点 p を固定し、 p を通り z 軸に平行な直線と面 F_i の載っている平面との交点を z_i とする。このとき、 p から $x-y$ 平面上の任意の方向へ延ばした半直線が三角形 f_i と f_j をこの順序で通過するなら、 $z_i > z_j$ が成り立つ。なぜなら、空間に張った三角形網は下に凸であるから。

ところで、図2(b)に示すように点 p を選ぶと、半直線 a, b, c からそれぞれ $z_1 > z_2, z_2 > z_3, z_3 > z_1$ が得られることになり矛盾である。したがって、図2(a)は、下に凸な三角形網の投影図ではあり得ない。

参考文献

- [1] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

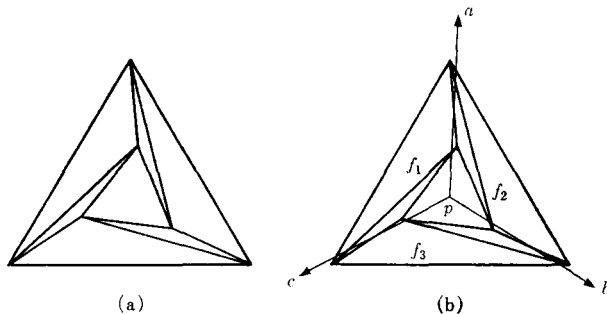


図2 反例