ファイナンスのための確率過程入門
（I）

岸本 一男

0. はじめに

確率過程論は，今や証券市場分析の基本的ツールとして定着しつつある．この結果，真面目な証券市場理論の教科書は，確率過程や確率微分方程式の解法についての知識を前提とせざるを得なくなりつつある．しかし，現在の4年制大学の経営工学専攻の講義において，時間的に連続な系の確率過程論に十分な時間をさく習慣は，必ずしも確立していない．このギャップの結果，真面目な学生諸君（ならびに，その結果としての卒業生諸兄）の間に，フラストレーションが高まっている場合が見受けられる．本稿は，このフラストレーションを一時的に，しかし，速効的に解消することを意図して書かれたものである．本稿は到底本格的な入門記事では有り得ず，また，網羅的でも有り得ない．ごく初等的な確率論と4年制大学の教養課程の微分・積分の知識のみを仮定して，証券市場分析に最低限必要な確率過程の内容に対象を限り，主観的たるの批判を恐れず，できるだけ教科書の行間を補う工学部での講義風スタイルで，数学的には厳密でなく解説を試みたものである．第1回は，確率論の予備知識を，一見厳密性も気にした風に述べる．第2回以後は，もはや厳密性の装いをかなぐりすてて，伊藤積分，拡散方程式，その他の話題を順次，直観的・実用的理解に重点をおいて説明する．

1. 確率論の定義

1.1 確率論の基礎

証券市場理論の教科書での確率過程の記述に確率空間の利用が不可欠であるか否かは別として，実際には，証券のふるまいを確率空間を用いて記述する教科書が存在する．教科書の入り口で無用の門前払いを受けるのはあまりにロスが大きいので，このような記述に怖じ気づかなくなることを目標に，確率空間についての最低限の知識を説明する．

一般的な議論はかえってわかりにくくなるので，2つの例について考えてみよう．

すべての目が等確率で出現するサイコロを考えよう．“サイコロの目 i $(1\leqq i\leqq 6)$ が出る”という事件を素事象（あるいは標本点，見本点）と呼ぶことにし，ω_i と記す．目の出方は6通りであるから，この各素事象 ω_i の生起確率は当然 $P(\{\omega_i\})=1/6(1\leqq i\leqq 6)$ となる．このとき，たとえば，偶数の目が出るという事象 $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ の生起確率は自然に $P(A)=[A$ の要素数$]/[\Omega$ の要素数$]=3/6=1/2$ と定まる．単に偶数の目の場合のみならず，素事象の集合 $\Omega=\{\omega_i: 1\leqq i\leqq 6\}$（$\Omega$ は基礎空間あるいは標本空間と呼ばれる）のすべての部分集合に対して自然に確率が定まることが理解されるであろう．このように，基礎空間の要素数が有限である場合には，確率の定義に何の困難もない．

ところが，Ω の要素数が“無限大”の場合，たとえば，開区間$(0,1)$の中からその要素Xを“等確率”で選択しようとする場合には，話は簡単ではなくなる．“要素 $X\in(0,1)$が選択される”という素事象 $\omega_x(\in\Omega)$ が生起する“確率”を p だとしてみよう．$p>0$ だとすると，全確率は発散してしまう．$p=0$ と定めれば，ω_x がある素事象の集まり $A\subset\Omega$ に含まれる確率を，別な何らかの情報なしに計算することはできない．つまり，Ω の要素数が有限だったときのように，個々の素事象に確率を割り振ることを通じて，Ω の任意の部分集合に対する確率表現を定めようとしても，不可能であることがわかる．

この困難を解決する最も普通のアプローチは，以下の

きしもと かずお 筑波大学 社会工学系
〒305 つくば市天王台1－1－1

通りである．まず，特別な場合として，ある選択された要素Xが$(0,1)$のある開区間(α,β)（$0\leqq\alpha<\beta\leqq1$）の中に含まれる確率について考えよう．“等確率”の条件のもとでは，Xがこの区間に含まれる確率は，区間の幅に比例するはずであるから，$\beta-\alpha$と定めるのが当然であろう．この命題を自明なものとして受け入れたときに，どの程度のことが定まるかを検討する．すでに，区間に対しては確率が定まったのだから，その合併集合，たとえば互いに重ならない2つの開区間の和集合$(\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)$（$0\leqq\alpha<\beta<\gamma<\delta\leqq1$）の要素$X$が選択される確率も自然に定まる．すなわち，2つの背反事象（両方同時には生起しえない事象）の和だから$(\beta-\alpha)+(\delta-\gamma)$でなくてはならない．さらにこれら区間に和集合・補集合を取る演算（共通集合の求める演算はこれの組合せで作れる）を任意の有限回繰り返してえられる任意の集合に対しても同様に確率が自然に定義される．確率論の（というよりはむしろ測度論の）基本的結果である Hopf-Kolmogorov の拡張定理と呼ばれる定理は，この確率がこれらの集合の族（集まり）を含み，しかも和集合・補集合をとる演算の加算無限回の繰り返しに関し閉じている最小の集合族(Borel 集合族)に対して拡張できることを保証する．このときBorel 集合族の元(Borel 集合)でない集合のなかにも出現確率が0となることが自然に判明するもの(零集合)が存在するので，もし必要を感ずるなら，先に得られたBorel集合族にさらに各Borel集合と零集合との和集合をすべて追加する．(完備化と呼ばれる.)この結果，最終的に得られた集合族の各要素(Lebesgue 可測集合）に対してまでは，以上の手続きで素直に確率が定まったことが理解されるであろう．

ここで残念なことは，$(0,1)$の部分集合のなかには，このような手続きでは得られず(つまり Lebesgue 可測集合ではなく，したがってもちろん Borel 集合でもなく）いかなる値を割り振っても前後との整合が取れなくなるものが存在することである．この反例をここに示すゆとりはないが，数学的にはよく知られた事実として認めていただきたい．すると，生起確率Pは，個々の素事象に対して定めることもできず，また，基礎空間Ωのすべての部分集合に対して同時に確率を定義することもできないことが判明したことになる．

以上の事実から，確率論は，Ωのすべての部分集合に対して確率を定めようという試みを放棄する．直ちに問題となるのは，生起確率を定める関数Pの定義域となるべきΩの部分集合族は何かということである．これは先の例だと，Borel 集合族あるいは Lebesgue 可測集合の族（あるいは，その他の適当な集合族）となるわけであるが，いくつかの可能性がありうるので，それを明示する必要が生じてくる．つまり，“確率”の記述には，基礎空間Ω，Ωの部分集合の集まり（$\mathscr{A}$と記そう），および$\mathscr{A}$上で定義され$(0,1)$に値を取る集合関数Pの3つ組（$\Omega,\mathscr{A},P$）が必要になることが結論される．

ところで，$\mathscr{A}$は確率が定義されている部分集合の集まりである．当然，次の最低限の条件は満足されている必要がある．

（A 1） 少なくとも，Ωに対しては，確率（当然1でなくてはならない）が定義されている．

（A 2） 素事象からなるある集合Aに確率が定義されていれば，Aに含まれない素事象の集合(余事象)にも確率が定義されている．

（A 3） 素事象の集合の有限個あるいは可算無限個の列$A_1, A_2, \cdots$の各々に確率が定義されていれば，“そのいずれかが生起する”という事件に対しても確率が定義されている．

これらを式で表現すれば，次のようになる．

（A 1'） $\Omega\in\mathscr{A}$,

（A 2'） $A\in\mathscr{A}\Rightarrow A^c\in\mathscr{A}$,

（A 3'） $A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

（A 1'）-（A 3'）を満足する集合族を**σ代数**と呼んでいる．（A 3'）で加算無限個の和集合を取れることが重要で，これにより，各種の極限操作を定義することが初めて可能になることに注意しよう．

また，$\mathscr{A}$の要素に対して定義された集合関数Pは，確率である以上，最低限次の条件を満足しなくてはならない．

（B 1） 事象Aの生起する確率は負にならない．

（B 2） 加算無限個の背反事象（どの2つも同時には生起しない事象）のいずれかが起こる確率は，個々の事象の起こる確率の和に等しい．

（B 3） Ωの中のいずれかの要素が生起する確率は1である．

これをPが満足すべき式として表現すれば，次のようになる．

（B 1'） $P(A)\geqq0$,

（B 2'） $P(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$,

（B 3'） $P(\Omega)=1$.

ただし，(B 2') の左辺でΣが用いられているのは，合併集合の演算において，事象 A_n が背反事象であること，すなわち，A_m が起これば $A_n(m \neq n)$ が生起しないことを示している．(B 1')－(B 3')を満足する集合関数を**確率測度**と呼んでいる．

一般に，“確率”を定義しようとすると，ほぼいつでもこの例で述べたのと同様のプロセスを踏むことを余儀なくされる．そこで，“確率”の定義はいつでも基礎空間Ω, σ代数 $\mathscr{A}$, ならびに確率測度Pの3つからなる組$(\Omega, \mathscr{A}, P)$として定義することにしてしまえば，これらの議論の繰り返しを節約することができる．かくして，厳密性を意識する場合の確率モデルは，いつでもこの3つ組からその記述を開始する．この3つ組のことを，**確率空間**と呼ぶ．

以上で，確率論の教程の最初の数行を終えるところまで到着した．この地点からしばらくの間，確率論の教科書は，もっぱらその取り扱うすべての内容をこの枠組みで首尾一貫して記述するために，大変な紙数を使う．たとえば，条件付き期待値の定義ひとつにしても，数行ですむものではありえない．しかし幸いなことに，現在著者の知る限りでは，これらの“正当化のための正当化(確率論研究者の方ごめんなさい)”の部分については，特に正確に理解しなくても，本稿のここまでで述べたストーリーと述語（の直観的意味）の知識をもとにして，あとは，もっぱら初等確率論からの類推で証券市場の教科書を読み進んでも，一応の理解は可能で，かつ致命的な困難も引き起こさない．よって，以下第1節の残りと第2節では，それらの大半をはしょり，説明上必要な箇所だけ拾いながらの大急ぎの解説を行なう．

1.2 基本的な定義

確率測度Pは，基礎空間Ωの元（要素）である素事象に対してではなく，σ代数 $\mathscr{A}$ の元に対して定義されているのであった．第**1.1**節では特に定義することなく用いたが，通常，$\mathscr{A}$ の元を**事象**と呼んでいる．したがって，“Aが事象である”といえば，Aに対して確率測度が定義されていることを同時に意味している．

こうなってくると，重要なのは $\mathscr{A}$ の元を明確に表現することであって，Ωは別に“サイコロの目の出方の集合”とか“開区間$(0,1)$”とかに特定せず，抽象的な“森羅万象”だと考えても問題は起こらない．たとえば，Xをある時刻での証券価格，Ωを“およそ世の中で起こりうるありとあらゆる出来事の集合”だと考えてみる．$\omega \in \Omega$が定まれば，証券価格Xは定まるはずであるから，証券価格Xは，Ωで定義された実数値関数と考えることができる．一方，証券価格が定まったからといって，別に世の中のすべての事件が定まるわけではないから，結局，$X=a$ という事件は素事象ではなく，Ωのある部分集合を定めている．そして，この時のΩの元とは何かというのは，もはや哲学の次元の問題だと思われる．

さて，Ωで定義された実数値関数(たとえば証券価格) $X(\omega)$ を考えよう．結局この $X(\omega)$ の確率的なふるまいこそ，われわれに最も関心のあるものである．当然気にしなくてはならないことは，この関数をあまりに特殊に選んで，“証券価格は a 以下である”という条件を満足するΩの部分集合さえ事象にならない，という事態が発生しては困ることである．この事態に予防線を張りながら，**確率変数**が次のように定義される：確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ の基礎空間Ω上で定義された実数値関数が，任意の実数 a に対し，$\{\omega : X(\omega) \leqq a\} \in \mathscr{A}$ を満足するとき，Xを確率変数と呼ぶ．確率論の教科書では，このことを，次のように表現している：Ω上で定義された実数値関数がA可測のとき，Xを確率変数と呼ぶ．

前節で考えた，開区間$(0,1)$の中からその要素Xが“等確率”で出現する例において，Xを確率変数と考えよう．今，新しい確率変数 Y を，$Y=X$($X \neq 1/2$ の時)，$Y=0$ ($X=1/2$ の時) と定義する．$X \neq Y$ となることも論理的にはありうるから$X=Y$とはいえない．しかし，実際には $X \neq Y$ である確率は 0 である．このようなとき，$X=Y$は確率1で成立する，あるいは，ほとんど確実に成立するといい，特に式の中等でしばしば，$X=Y$, a. s. (almost surely) と略記する．このような2つの確率変数は**同値**であると呼ばれ，大半の場合，両者は実質上同一のものと扱うことができる．

n個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が**独立**であることの定義は，特に説明を要しない．すなわち，以下の条件が成立することである：$\{1, 2, \cdots, n\}$ の任意の部分集合 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ に対して，

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{k_i}\right)=\prod_{i=1}^{m} P(A_{k_i}).$$

また，事象 $B(P(B)>0)$ が与えられた条件のもとでの，事象 A の**条件付き確率**は，$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)$ で定義される．

第**1.1**節の例では，開区間$(0,1)$から“等確率”で点を選ぶ場合の確率空間について述べた．しかし，同様な考え方は素直に，点が“等確率”でなく，ある重みを持って選ばれる場合，さらに，区間が$(0,1)$以外に拡張さ

れる．たとえば，実数 R の中から点が選ばれるとし，Borel 集合(あるいは Lebesgue 可測集合) $B(\subset R)$ に対し，次のように確率測度を定めると，正規分布あるいは Cauchy 分布がそれぞれ得られる．

$$P(x\varepsilon B)=\int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx,\quad(\text{正規分布})$$

$$P(x\varepsilon B)=\int_B \frac{1}{\pi(x^2+1)}dx.\qquad(\text{Cauchy 分布})$$

これら定義式右辺の被積分関数は，確率密度関数と呼ばれる．ところで，Borel (あるいは Lebesgue 可測)集合の構成法を反省すれば，Aは必ずしも有限個の区間の和集合ではないので，ここでの積分は不連続な分点を無限個持つかも知れない．この場合，通常の Riemann 積分では定義できず，積分の定義に工夫(Lebesgue 積分)が必要になる．また，確率測度がいつでもこのように確率密度関数の積分表示で表現されるわけでもない．しかし，この問題をとりあえず気にしなくても，本稿の意図している当面の直観的理解には致命的な誤解を引き起こさないと思われるので，本稿を通じて，この問題にこれ以上深入りしない．

“確率変数は基礎空間上で定義されているのだ” という立場にたてば，たとえば，確率変数Xの期待値$E[X]$や分散$V[X]$も，それぞれ，

$$E[X]=\int_\Omega x(\omega)P(d\omega),$$

$$V[X]=\int_\Omega (X(\omega)-E[X])^2P(d\omega),$$

の形で記されるべきである．当然，その正確な定義も必要になる．しかし，今後本稿で取り扱う計算は，すべて，通常の初等的定義の理解で十分なので，この詳細についても立ち入らない．

念のため注意しておけば，これらの式の右辺の積分は，必ずしも有限確定とは限らない．たとえば，先にあげた正規分布に対しては，期待値と分散が μ と σ^2 になることはよく知られているが，Cauchy 分布に対しては，初等的な積分計算から期待値も分散も存在しないことが直ちに確かめられる．この注意は単なる頭の体操ではない．証券価格の日次変動の分散が有限か無限かをめぐる諸問題については，多数の議論といくつかの実証研究があったが，筆者が（偏見を持って）判断する限りでは，最終的な決着はついていない．そして，もし有限分散の仮定が覆るならば，現在用いられている大半の統計手法は，証券市場の価格分析に利用できなくなってしまうのである．

対象とする現象が2個以上の確率変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ で記述される場合も，議論の進め方はほぼ同様である．1変数の場合に用いた区間(α,β)のかわりに，矩形領域 $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)$ から出発し，1変数の場合とほぼ同様にして Borel 集合族を定義する．この Borel 集合族上の確率測度 P を（B 1'）−（B 3'）を満足するように定めると，確率空間が構成される．たとえば，Borel 集合Bに対して確率測度Pを，

$$P(\boldsymbol{x}\varepsilon B)=\int_B \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right\}dx_1,dx_2,\cdots,dx_n$$

で定義すれば，n 変数正規分布が定義される．

ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$，$\Sigma$ は $n\times n$ 正定値行列であり，' はベクトルの転置を意味する．$\boldsymbol{\mu}$は平均ベクトル，Σは分散共分散行列と呼ばれる．このとき，$E[X_i]=\mu_i$，$E[X_iX_j]=\sigma_{ij}$ となることもよく知られている．ただし，σ_{ij}は行列 Σ の(i,j)-成分である．

2. Brown 運動

2.1 定　義

証券価格の分析においては，ある時点 t における価格というよりは，むしろ，ある期間 $T=[0,t_0]$ にわたる価格の変動に関心がある．このことを，確率空間$(\Omega,\mathscr{A},P)$の枠組みで記述しなくてはならない．まず，素事象，すなわち基礎空間Ωの元ωが定まれば，Tでの証券価格の軌跡X_tが定まる．この関数 $X_t(\omega)$ は**見本関数**（または，見本過程，道）と呼ばれる．また，$t\in T$ を固定すると，実数値確率変数 $X(\omega)$ が定まる．このように，Xは t と ω の2変数関数であるかのように扱いうる．確率変数の族 $\{X_t,t\in T\}$ を $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上の**確率過程**と呼ぶ．

Tの元の個数が有限でない場合に確率測度Pを定めるに当っては，第1節ですでに言及した Kolmogorov の拡張定理と呼ばれる定理が，再び，有限から無限への橋渡しをしてくれる．作業は以下のように進む．すべての有限集合 $T_n=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$ に対し，これらの時刻での同時分布関数を “矛盾のないように（一致性条件と呼ばれる条件を満足するように）” 定めたとする．（n 個の確率変数の同時分布を与えるのは，n 次元ユークリッド空間 R^n あるいはその部分集合での確率測度を定める問題となり，問題は前節で本質的には解決している．）この時 Kolmogorov の拡張定理は，$t(\in T)$でパラメトライ

ズされた直積空間 R^T 上に確率測度を構成できることを保証する．したがって，確率過程 $\{X_t, t\in T\}$ の記述は，任意に選ばれた n 個 $(n<\infty)$ の時刻 $t_i\,(1\leqq i\leqq n)$ での確率変数の組 $(X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tn})$ の同時分布の適切な記述の問題になる．

多次元同時分布で，最もよく利用され研究もされているのは多次元正規分布である．この時，その分散共分散行列が縮退してその行列式が0となる極限，すなわち，n 個の確率変数が実はより低い次元の部分空間上にのみ分布している場合も取り扱いたいので，定義自身は次のように記述される：確率過程 $\{X_t,\ t\in T\}$ は，任意に選ばれた n 個 $(n<\infty)$ の時刻 $t_i\,(1\leqq i\leqq n)$ と実数 α_i に対し，1次結合

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_{ti},$$

で定義されるすべての確率変数が正規分布にしたがうとき，Gauss過程と呼ばれる．この定義が縮退した場合を含む n 次元正規分布と同値であることを知るには，両者の特性関数を比較すればよい．

現在主流となっている証券価格変動の理論は，時刻 t での証券価格 X_t が Gauss 過程の特殊ケースである Brown 運動にしたがうという前提から出発する．現在までの証券価格の日時変動に関する実証研究は，その変動が Brown 運動そのものでは有り得ないことを示しており，今後，Brown 運動の前提を拡張した試みが現われる可能性も大きい．(その萌芽的なものは，すでにいくつか存在する．) しかし，Brown 運動は最も基本的な確率過程であり，証券価格変動の理論が今後どのように発展するにせよ，Brown 運動にもとづく結果がその出発点としての位置を失うことはないものと思われる．

Brown 運動 $\{X_t,\ t\geqq 0\}$ は，

（C 1） $\{X_t,\ t\leqq 0\}$ は Gauss 過程である，

（C 2） $E[X_t]=0,\ E[X_t X_s]=\min(t,s)$

で，定義される．（C 2）の第2式より分散共分散行列の (i,j)-成分は $\min(t_i,t_j)$ と定まる．その正定値性（各自確かめよ）と（C 1）とによって $(X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tn})$ $(t_1<t_2<\cdots<t_n)$ が多変量正規分布にしたがうことがわかる．（C 2）の第1式より平均ベクトルのすべての成分は常に0となる．ここで，密度関数を次の形に変形（各自導け）すると直観的な意味を理解しやすい：

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}\right\}.$$

まずこの式と独立性の定義式を比較することにより，差分で定義された $n-1$ 個の確率変数 $(X_{t1}-0,\ X_{t2}-X_{t1}, \cdots, X_{tn}-X_{tn-1})$ が互いに独立であることが直ちにわかる．証券価格変化の観点からは，このことは，任意の期間の証券価格の変化は，過去の証券価格の変化から影響を受けず，また，将来の価格変化に対しても影響を与えないことを意味している．このことを，Brown 運動は**独立増分過程**であると表現する．

またこの式を1変数正規分布の定義式と比較することにより，時刻 t_{n-1} から t_n の間での X_t の変化は，平均0，分散 t_n-t_{n-1} の正規分布にしたがうこともわかる．

次の性質も計算から簡単に導かれる（確かめよ）：任意の $t\geqq s$ に対し，

$$E[X_t|X_u,\ 0\leqq u\leqq s]=X_s.$$

ただし，この左辺は時刻 s までのすべての X_u が定まったという条件のもとでの，固定された時刻 t における確率変数 X_t の条件付き期待値である．この性質を持つ過程はマルチンゲールと呼ばれる．この定義を確率空間の枠組みで記述するには多少の考察が必要であるが，ここでは省略しなくてはなくてはならない．

マルチンゲールも，証券価格変動分析に深く関わる概念である．すなわち，証券価格がマルチンゲールにしたがうならば，現在の時点を s とし，有能な投資家が時点0から現在までの期間 $[0,s]$ のデータを利用して，将来の時点 t の証券価格を予測しようとしても，その期待値が常に現在の証券価格に等しいので，結局収益の期待値を向上させることができない．

2.2 連続性

確率過程において，X_t のある期間にわたる平均値を計算したり，あるいはその期間での見本関数の連続性を調べたりすることは，実用上重要である．しかし，ここまでの一般的な枠組みだけでは，これらの性質の調査ができないことが知られている．（まことに確率論とはやっかいなものである！）

この事実には言及しつつ，本稿の主旨にしたがって最小限度の記述で済ませよう．確率過程が可分と呼ばれる性質を満たせば，見本関数の連続性を論ずることができることがわかっている．幸い，任意の確率過程 $\{X_t, t\in T\}$ に対して，同じ確率空間上で定義された同値な確率過程 $\{Y_t,\ t\in T\}$ の中に，可分なものが存在することもわかっている．そこで，乱暴なやり方だが，可分の正確な定義は省略し，連続性等の問題を扱うときは，それ自身何の実質的制約にもなっていない“可分な”という形

容詞をいつでも“確率過程”という単語の前につけて“みそぎ”をしなくてはならないのだと考えることにしておこう．

一方，時間的な平均値等の計算が可能かという問題は，このようなおまじないではすまず，“可測過程”という実質的に制約となる概念を導入する必要がある．しかし，幸い，本節の場合のように見本関数が連続なら，積分は常に定義可能となるので，こちらの問題もここでは省略できる．

さて，可分な Brown 運動の見本関数は，確率1で連続である．この事実は Kolmogorov による次の定理（証明略）から簡単に導かれる．（$\alpha=4,\ \beta=3,\ \gamma=1$）と置いて定理の条件が満たされることを計算せよ）

定理：T が有限区間で，$\{X_t,\ t\in T\}$ が可分過程であるとする．もし

$$E[|X_{t+h}-X_t|^{\alpha}]\leqq\beta h^{1+\gamma}\quad(\alpha,\beta,\gamma\text{ はある正の定数})$$

ならば，見本関数は T 上で確率1で連続である．

証券価格の時間変化を表現する見本関数が連続ならば連続関数に対する中間値の定理により，事前に購入・売却戦略を決めておいたとき，証券価格がこれら価格を越えて上昇あるいは下降する過程で，確実にその価格での取引が保証される．現在主流となっている証券価格変動の理論では，この事実が重要な役割を果たしている．

これに対して，1960年代に大きな影響力を持った Mandelbrot の理論は，見本関数が連続ではあり得ないと主張する．彼の価格変動のモデルのもとでは，新聞紙上をにぎわすほどの顕著な暴騰・暴落以外にも，小規模の不連続な暴騰・暴落が常時発生する．この不連続な価格変化のために，事前の戦略が指示する価格での購入は不可能になり，たとえば，現金と証券の所持比率を適切に運用しながら危険を取り除こうとするポートフォリオ・インシュアランスの理論等は，その正当性を失うことになる．

実際の証券市場で証券価格の履歴が連続か否かを議論することは，証券価格の値自身が離散的であること，証券の売買が成立し証券価格が変化するのは本来有限回しかないこと等を反省すれば，一見無意味にも見える．また，多くの実証研究の結果，単純な Brown 運動も，当初 Mandelbrot が提案したままの形のモデルも現実を十分には説明し得ないことがすでにわかっている．しかし，この両者の是非を論ずることは，“理論的な遊び”ではなく，実用的な手法の根拠の正当性を問うているのだということを常に認識すべきである．“見本関数は連続か”という観点からの考察は，現在までのところ十分にはなされているとは思えないので，念のため，本節をもうけて指摘しておく．

入会者氏名

（正会員）

岡野雅一（㈱博報堂），奥村　寛（川崎製鉄㈱），楠原準嘉（大和証券㈱），加瀬誠志（北海道工業大学），加藤俊明（三菱スペース・ソフトウェア㈱），岸本　康（㈱エヌ・ケー・エクサ），田中義一（㈱日立製作所），富田昌明（新電元工業㈱），仁科光雄（運輸省），藤野明彦（㈶流通経済研究所），藤原一浩（川崎製鉄㈱），松本隆一（姫路独協大学），元谷靖宏（北海道ソフトエンジニアリング㈱），山田邦夫（三菱電機㈱），山本康貴（帯広畜産大学）

（学生会員）

相田義宏（東京大学），石井宏和（東京理科大学），茨木智（京都大学），大石泰章（東京大学），崎田智博（東京理科大学），錦織睦子（埼玉大学），萬家順一（防衛大学校），宋　相載（京都大学）

（賛助会員）

日本道路公団，㈱アイネス，㈱萬綱商店

移動者氏名（学生→正）

新井浩二　筑波大学→防衛庁，奥居正道　金沢工業大学→シャープ㈱，片岡靖詞　早稲田大学→防衛大学校，片岡正昭　ミシガン大学→筑波大学，小池康文　慶応義塾大学→World ITALY S.p.A，小林誠治　関西大学→大阪府立東高等職業技術専門校，竹村　学　豊橋技術科学大学→豊橋短期大学，藤井光久　埼玉大学→建設省，増沢　香　東京工業大学→㈱東芝

岡田浩一（慶応義塾大学），喜田泰成（姫路工業大学），白井　潔（東京理科大学），本間　靖（上智大学）

会員訃報

岡田圭司氏（ＪＲ西日本取締役地域開発本部長）

平成２年４月15日急性すい炎のため逝去されました

享年51才，謹んでご冥福をお祈りします．