



このコラムは、ORにかかわる概念、知識(手法、原理)、それらの図解、よい教材や問題、実学ORの実施経験、そこから得られた知恵やアドバイス、失敗談と教訓、新しい観点、視座、フレームワーク、未だ解けていない問題、面白い研究テーマなどを、“新鮮に”、しかも、“コンパクトに”表現し、提示していただくものです。ユニークなアイデア、フレッシュな見方、発想、だれかと意見をたたかわせたい問題提起など、ふるってご投稿ください。(原稿は、刷り上がり、半ページから3ページに納まるようにお書きください。簡潔に！加筆訂正をお願いする場合があります)

OR 1-2-3 (その1 LP島の探訪)

権藤 元

OR誌に新しくORメモランダム欄が設けられたのを機会に、いまパソコンのソフトではワープロの一大郎に並んで、ベストセラーを続けているスプレッドシートのロータス1-2-3によるORを紹介したいと思います。

スプレッドシート上でのORとは、紙と鉛筆の代わりにディスプレイ画面とキーボードでOR手法を試みようというわけです。進め方としては、何でもすぐ質問したがるHELPさんと、何でもすぐ実行しながら考えるGOさんとの対話によって紹介します。なお、OR手法は一応ご存じでも、ロータス1-2-3は白紙の方を前提とします。

ORのどこを訪ねるのかは、あたかも熱気球に乗ってふんわりと空の旅を続けながら、気が向いたら天下りて探訪するという具合に、風のまにまにお天気次第で、2、3カ月に一度お目にかかることとなるでしょう。

まず今回は、LP島に降りてみましょう。ここでは次の例題を使ってLPの教育をしているようです。

例題 ある会社で2種類の製品A、Bを作ろうとしている。製品Aを1kg作るには石炭が9トン、電力が4kWh、労力が3人日必要である。製品Bを1kg作るには石炭が4トン、電力が5kWh、労力が10人日だけ必要である。ところがその会社ではいまのところ利用できるのは、石炭が360トン、電力が200kWh、労力が300人日までで、それ以上は使えない。製品Aは1kgについて7万円の利益を生じ、製品Bについて12万円の利益を生む。石炭、電

力、労力についての上記の制限の下で、利益が最大になるように製品Aおよび製品Bの生産量を定めたい。

(森口繁一「線形計画法入門」(日科技連)より)

では、さっそく2人の対話に耳を傾けてみましょう。
H：LPの教育にロータス1-2-3をお使いと聞きましたが、何をねらって始められたのですか。

G：そうですね。LPの基礎として、シンプレックス表をワンステップずつ進めることを演習しておきたいですね。だが、ピボット演算を掃き出し法から始めたのでは、その計算に時間が取られ、学生もそんな面倒な計算には興味を示しませんから、きわめて効率の悪い話になってしまいます。そこで、ロータスは行列の積を簡単な操作で求めることができるので、掃き出し法を行列の積計算に代えて、試行錯誤でピボットをいろいろ選択しながらシンプレックス表のステップを進めて最適解に到達してもらうこととしたのです。ゲーム感覚でシンプレックス表のステップを進めながらシンプレックス基準を理解しようというわけです。

H：どんな効果がありましたか。

G：机上ではシンプレックス基準を理解することは困難といった学生が結構多く含まれているのですが、パソコンの前で30分もあればともかく全員最適解に到達しました。ピボットの選択には回り道をしているものも多く、ストレートに比べて2倍も3倍もステップを費やした剛の者もいました。いや、回り道をした学生ほどシンプレックス判定基準の意味を体験的に理解したといえます。わたし自身もシンプレックス判定基準は人間にはなくてもよく、コンピュータのために必要な手順だが、人

ごんどう はじめ 近畿大学 工学部 経営工学科
〒737-01 呉市広古新開5-3-1

単位行列(マスター)				ステップ1	1 =	利益	A生産量	B生産量	石炭残量	電力残量	労力残量
1.00	0.00	0.00	0.00	利益	0.00	1.00	-7.00	-12.00	0.00	0.00	0.00
0.00	1.00	0.00	0.00	石炭残量	360.00	0.00	9.00	4.00	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	1.00	0.00	電力残量	200.00	0.00	4.00	5.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	労力残量	300.00	0.00	3.00	10.00	0.00	0.00	1.00

図1 第1ステップ

間は「ゴールさえ明確ならば大丈夫だ」と、いまさらながら感心した次第です。

H: 学生が喜々としてシンプレックス表のステップを進めている姿がわかりました。そこでちょっとお尋ねしますが、ロータスでは簡単といっても行列の積はどんな調子でできるのですか。

G: ここでロータスの使用法を説明しようとは思いませんが、ロータスを全然ご存じのない方にもそんなものかと理解していただくためにお話ししましょう。

キーの操作は、メニューを呼び出したあとD(データ)M(行列)M(積)と3つを選ぶと、最初の行列、第2の行列と続けて聞いてきますから、それぞれ該当の行列をカーソルで囲んでハイライトさせて指示します。さらに求める積行列の第1行第1列の要素の位置を指示すると積行列をすぐ表示してくれます。まあ、スプレッドシートというノートの上に行列を書いておき、鉛筆(カーソル)で行列を囲みながら上述の呪文(キー入力)を唱えると行列の積が求まるというものです。

H: ロータスで計算するというイメージがわかりました。ではLPの計算について具体的に教えてください。

G: では、先ほどの例題によって説明しましょう。この問題の目的関数と3つの制約条件を、次のように等式で表わしておきましょう。

$$0 = \text{「利益」} - 7 \times \text{「A生産量」} - 12 \times \text{「B生産量」}$$

$$360 = 9 \times \text{「A生産量」} + 4 \times \text{「B生産量」} + \text{「石炭の残量」}$$

$$200 = 4 \times \text{「A生産量」} + 5 \times \text{「B生産量」} + \text{「電力の残量」}$$

$$300 = 3 \times \text{「A生産量」} + 10 \times \text{「B生産量」} + \text{「労力の残差」}$$

もちろん、「A生産量」とか「石炭の残量」などは正またはゼロの条件で、「利益」を最大にするのがこの間

題です。

H: 目的関数の式はちょっと変わっていますね。

G: ええ、左辺を数値としてシンプレックス表の形式に揃えるために移項してあります。そこで、この4つの等式をシンプレックス表としてスプレッドシート上に表現すると、図1となります。

H: なるほど、4つの式をそのままスプレッドシートに表の形式で書き込んだというわけですね。これからピボット演算ですか。

G: そうです。まず、石炭を全部使って製品Aを作ることを考えましょう。ピボットとして、図1の四角の位置を選んだこととなります。

H: ピボット演算は掃き出し法でなくて行列の積によるといっていましたね。どうするのですか。

G: そうです。ピボット演算は、ピボット行列をシンプレックス表に掛けて次のステップを求めます。図2を見てください。図2のピボット行列を図1のシンプレックス表に掛けて、ステップ2を求めます。

H: ピボット行列はどこから出てきたのですか。

G: では、ピボット行列とは何かを説明をしましょう。式で簡潔に書けば、シンプレックス表の大きさが $m \times n$ 行列のとき、ピボットの位置を p 行 q 列とすると、次のように第 p 列目だけが単位行列と異なる $m \times m$ 行列がピボット行列です。

		p 列	
	1.....0	$-a_{1q}/a_{pq}$	0.....0

	0.....1	$-a_{p-1q}/a_{pq}$	0.....0
p 行	0.....0	$1/a_{pq}$	0.....0

ピボット行列(1か2へ)				ステップ2	1 =	利益	A生産量	B生産量	石炭残量	電力残量	労力残量	
7	1.00	0.78	0.00	0.00	利益	280.00	1.00	0.00	-8.89	0.78	0.00	0.00
8	0.00	0.11	0.00	0.00	A生産量	40.00	0.00	1.00	0.44	0.11	0.00	0.00
9	0.00	-0.44	1.00	0.00	電力残量	40.00	0.00	0.00	3.22	-0.44	1.00	0.00
10	0.00	-0.33	0.00	1.00	労力残量	180.00	0.00	0.00	8.67	-0.33	0.00	1.00

図2 第2ステップ

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	ピボット行列(2か3へ)				ステップ3	1 =	利益	A生産量	B生産量	石炭残量	電力残量	労力残量
14	1.00	0.00	0.00	1.03	利益	464.62	1.00	0.00	0.00	0.44	0.00	1.03
15	0.00	1.00	0.00	-0.05	A生産量	30.77	0.00	1.00	0.00	0.13	0.00	-0.05
16	0.00	0.00	1.00	-0.37	電力残量	-26.92	0.00	0.00	0.00	-0.32	1.00	-0.37
17	0.00	0.00	0.00	0.12	B生産量	20.77	0.00	0.00	1.00	-0.04	0.00	0.12

図3 第3ステップ

$$\begin{array}{ccc}
 0 \cdots 0 & -a_{p+1}^q / a_p^q & 1 \cdots 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 \cdots 0 & -a_m^q / a_p^q & 0 \cdots 1
 \end{array}$$

ここで a_{ij} はシンプレックス表の要素 ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$), a_p^q はピボットの要素を示します。

H: なるほど, この行列を表に掛けるのと掃き出し法と同じ計算をしてくれますね。では, これをロータスではどうやって求めるのですか。

G: そう先を急がないでください。ここで, まずロータスではどのように計算の指示をするのか簡単な例でお話しておきましょう。ロータスでは, シートの構成要素をセルと言って, 行と列による座標で位置を示します。行は 1, 2, 3... で, 列は A, B, C... で表示します。10を20で割って 0.5 を求める例を次に示します。

行	列	A	B
1		10	0.5
2		20	

これは, データとして A1 のセルに 10, A2 のセルに 20 と入力し, 次に計算式として B1 のセルに +A1/A2 を入力すると, 即座に 0.5 と表示されることを示します。B1 のセルは 2 重人格でオモテのシートでは 0.5 と表示されますが, ウラのシートは +A1/A2 となっています。

H: これがロータスのプログラムですか。計算式を置いていれば誰でもできそうですね。

G: それでは, ピボット行列の作り方を話しましょう。まず単位行列を作ります。直接 1, 0 をキー入力してもよいですが, あらかじめ単位行列をマスターとして作っておき, 必要なところにコピーするのがよいでしょう。

H: はあ, ワープロのコピーと同じですね。同じ文章を少し修正して何回も使うときのやり方ですね。

G: そうです。あとは, 1 行 p 列に相当するセルに $-a_{ij}^q / a_p^q$ の計算式を入力します。そして 2 行から m 行の p 列には, 1 行 p 列のセルの計算式をコピーします。

図5には図2のピボット行列の作り方を例示しましたからご覧ください。

H: そのままでは p 行 p 列の計算式が違いますが。

G: そこには, 改めて正しく $1/a_p^q$ と修正します。

H: なるほど, これでピボット行列ができましたね。あとは DMM の呪文を唱えるのですね。

G: そうです。先を急ぎましょう。第3ステップとして, 今度は労力を全部使って製品 B を作ってみましょう。ピボットは図2の四角の位置になります。その結果次の表は図3を見てください。

H: あれ, 図3の第3ステップの表では, 電力残量の行の制限値 (1 =) の列にマイナスが出ましたね。マイナスになってよいのですか。

G: よくはありません。これでは, 電力が 26.92 不足していることを示しています。シンプレックス判定基準にしたがわず勝手にピボットを選んだからで, 本来これは無駄なステップです。今度はこのマイナスが消えるようにピボットを選んでみます。それには, 電力を使いきって石炭を残すように変えてみましょう。図3の四角の位置にピボットを選ぶと, その結果図4が得られます。

H: 目的関数の行にも制限値の列にもマイナスがなくなり, 最適解が求まりましたね。今のが回り道ですか。なるほど回り道をして心配ないですね。

G: そうです。学生はこの試行錯誤の過程をゲーム感

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
18	ピボット行列(3か4へ)				ステップ4	1 =	利益	A生産量	B生産量	石炭残量	電力残量	労力残量
20	1.00	0.00	1.36	0.00	利益	428.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.36	0.52
21	0.00	1.00	0.40	0.00	A生産量	20.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.40	-0.20
22	0.00	0.00	-3.12	0.00	石炭残量	84.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-3.12	1.16
23	0.00	0.00	-0.12	1.00	B生産量	24.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.12	0.16

図4 第4ステップ

ピボット行列の作り方

セル	手順1		手順2		手順3	
	オモテ	ウラ	オモテ	ウラ	オモテ	ウラ
B8	0.78	-H2/\$H\$3	0.78	-H2/\$H\$3	0.78	-H2/\$H\$3
B9			-1.00	-H3/\$H\$3	0.11	1/\$H\$3
B10			-0.44	-H4/\$H\$3	-0.44	-H4/\$H\$3
B11			-0.33	-H5/\$H\$3	-0.33	-H5/\$H\$3
説明	B8 に -H2/\$H\$3 を入力する		B8 を B9 から B11 へ コピーする		B9 に 1/\$H\$3 を入力する	
	注 H2 はコピーにより H3,H4,H5 と変化するが、 \$H\$3 はH3の絶対番地といってコピーしても変化しない					

図 5 ピボット行列の作り方

覚で遊んでいます。楽しく自ら学習していることを評価していただいてもいいのではないのでしょうか。

H：最終表が求まったら終わりですか。

G：いや、実際の演習では、ここで最終シンプレックス表から何がわかるか、今度は机上で考えさせるのです。シンプレックス表から等式の表現に戻して、シャドウプライスの意味とか、条件の限度を若干変えたときに最適解はどう変化するかを考えさせます。

428=「利益」 +1.36×「電力残量」+0.52×「労力残量」
20=「A生産量」+0.40×「電力残量」-0.20×「労力残量」
84=「石炭残量」-3.12×「電力残量」+1.16×「労力残量」
24=「B生産量」-0.12×「電力残量」+0.16×「労力残量」
これらの等式を眺めていけば、電力を1単位使い残したら利益がどれだけ減るかなど誰でもわかるでしょう。

H：対話型ORで常に唱えている「LPは最適解が求まったら終わりではない。最適解が求まってからが人間とモデルとの対話の始まりである。」ですか。

G：そうです。まず、手を使って（紙と鉛筆でなく画面とキーですが）シンプレックス法の計算をして、これからLPの醍醐味に入ろうというわけです。

H：ロータスを使ったLPの基礎学習の様子はわかりましたが、さきほどの操作を各ステップで繰り返すことはちょっと面倒ですね。なんとかありませんか。

G：よいところに気がつきましたね。ロータスでは、

決まった操作を繰り返すときには、マクロを作ることによって、その操作をワンタッチですることができます。実際に学生の演習にはマクロを用いましたので、ピボットの位置にカーソルを持ってきてマクロの名前を唱えると（実際はキー入力）、すぐ次のステップに進むという具合です。

H：マクロとは便利なものがあるのですね。カーソルの位置を知って利用することもできるのですか。

G：そうです。さらに、マクロではチェックもできずから、ゼロをピボットに選んだりしたら、エラーメッセージを表示したりもできます。凝り出すときがありませんから適当にしておかないといけません。なお、デモ用のシートも簡単にできます。いまお話しした様子をデモとして再現するシートを作りましたから、ご希望の方はご連絡ください。OR学会の会員でロータス 1-2-3をお持ちの方に限りお送りします。

H：それでは、LP島の探訪もこの辺までとしましょうか。どうもありがとうございました。

G：いずれ折りを見て、LPの発展として多目標計画法、多目的計画法、対話型計画法なども紹介することにして、今日はここまでとしましょう。お疲れさまでした。

追記 以上是对話型OR研究部会の資料を脚色したものです。