このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた知恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい観点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも，"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡素に！加筆訂正をお願いする場合があります)

一般化逆行列を用いてLPの一般解を求めよう

矢部　博

以下は，ＬＰの授業そのものというよりは，教養課程の線形代数をひと通り勉強した２，３年次の学生相手に応用線形代数のような授業の中で，例題としてＬＰを取り上げる場合のお話しです．

「たとえば(1)〜(12)の手順で，以下のような図を用いて講義してみてはいかがでしょうか」というもので，学生たちの理解の手助けになれば幸いです．なお，[1]，[2]を参考にしました．

(1)　まずは，n 次元実線形空間 R^n の定義は教えてあるものとする．ここではＬＰの例題を取り上げるので実空間に限定するが，実際には複素空間で講義をした方が良い場合もあるだろう．内積は $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^n a_i b_i$ を使う．

(2)　R^n から R^m への線形変換を表わす $m\times n$ 行列 A に対して A の range sace $R(A)=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in R^n\}\subset R^m$，null space $N(A)=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\subset R^n$ を定義する．$R(A)$は A の列ベクトルの張る空間，$N(A)$は A の行ベクトルと直交する空間である．結局，A は R^n から $R(A)$への変換ということになる．

(3)　部分空間Mの直交補空間$M^\perp$を定義し，$R(A)^\perp=N(A^T)$, $N(A)^\perp=R(A^T)$を証明する．(A の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ で表わせば $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$ となるから，$R(A)^\perp$ は各 $\boldsymbol{a}_i$ と直交するベクトルの集合，すなわち $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{v}=0$ なる $\boldsymbol{v}$ の集合になる．よって $R(A)^\perp=\{\boldsymbol{v}\mid A^T\boldsymbol{v}=0\}=N(A^T)$が示せる)．

(4)　空間の直和分解 $R^n=N(A)\oplus N(A)^\perp=N(A)\oplus R(A^T)$，$R^m=R(A)\oplus R(A)^\perp=R(A)\oplus N(A^T)$ を教える(図１参照)．

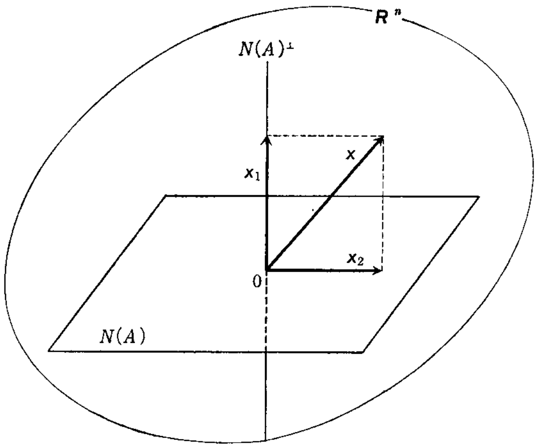

図 1　R^n の直和分解 $R^n=N(A)\oplus N(A)^\perp$

(5)　R^n の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は図１に示すように，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ と一意に直和分解できて，$\boldsymbol{x}_1$ を $\boldsymbol{x}$ の $N(A)^\perp$ への正射影，$\boldsymbol{x}_2$を$\boldsymbol{x}$の $N(A)$への正射影と呼ぶ．また $\boldsymbol{x}_1=P\boldsymbol{x}$ なる線形変換が存在して，この P を $N(A)^\perp$ への正射影行列と呼ぶ．このとき行列 P は $P^2=P$, $P^T=P$ という大事な性質をもち，前者は「射影」のための条件，後者は「正」射影であるための条件である（授業ではここをていねいに教える)．

(6)　線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の意味を教える：R^n の任意ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$（図１）と分解できるから，$A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}_1$ となる．すなわちAは R^n から $R(A)$への線形変換ではあるが，本質的には $N(A)^\perp$ から $R(A)$ への橋渡しを考えれば良い．よって図２にあるように，$\boldsymbol{x}_1$から$\boldsymbol{y}$へ

やべ　ひろし　東京理科大学　工学部
〒162 東京都新宿区神楽坂１－３

行くことが本質的であって，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ へ移ろうが，$\boldsymbol{z}$ から $\boldsymbol{y}$ へ移ろうが関係ない．($\boldsymbol{x}_1$ に正射影されるベクトルならば何でもよい)

(7) …ということは，逆に $\boldsymbol{y}\in R(A)$ が与えられた場合には $\boldsymbol{x}$ もしくは $\boldsymbol{z}$ へ戻すことは無理であって，そのような意味では A の逆行列は必ずしも存在するとは限らない．(学生たちは「A が n 次正則行列ならば A^{-1} が一意に存在する」ことは習っているだろう．そこでこの場合には $N(A)=\{$原点のみ$\}$，$N(A)^{\perp}=R(A^T)=R^n$ となるので，$R(A)$ から R^n への逆変換が可能であることを指摘する) 他方，線形変換 A は $N(A)^{\perp}$ と $R(A)$ の間では全単射になることが示せるので，$N(A)^{\perp}$ と $R(A)$ は1対1に対応し，したがって $R(A)$ から $N(A)^{\perp}$ へ戻すことが可能になる．この意味で $R(A)$ から $N(A)^{\perp}$ への逆変換が考えられて，この逆変換を表わす行列を A の一般化逆行列と呼び A^- で表わす．A^- は n 行 m 列の行列である (図2参照)．

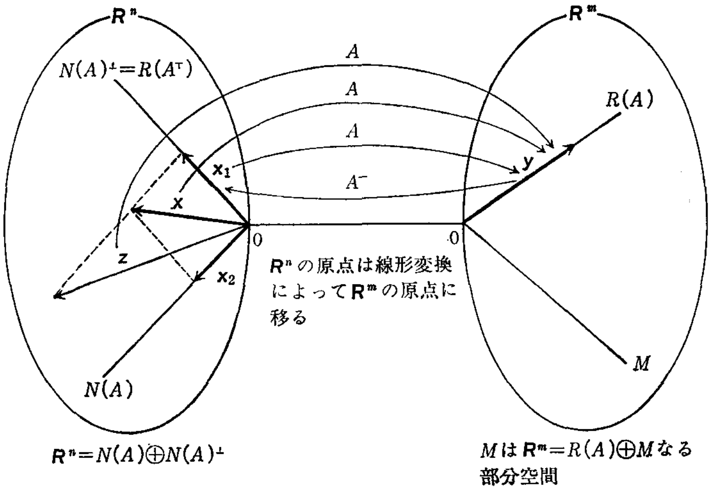

図 2 A と A^- の幾何的解釈 ($\boldsymbol{x}\xrightarrow{A}\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ を意味する)

(8) 以上が A^- の幾何的解釈である．改めて式で表わせば

(i) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$,　(ii) $\boldsymbol{x}_1=A^-\boldsymbol{y}$,　(iii) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}_1$

となる．(i)を(ii)へ代入してその(ii)を(iii)へ代入して，再び(i)と比べれば $A\boldsymbol{x}=AA^-A\boldsymbol{x}$ となるので，結局，A^- の満たすべき条件は $AA^-A=A$ となる．これが一般化逆行列 A^- の代数的な定義である．ただし A^- は A に対して必ず求まるが，一意ではない．一意性を保証するためには，さらに3つの条件を付加することが必要で，次の条件を満たす $n\times m$ 行列 X が一意に存在することが知られている：

(a) $AXA=A$，(b) $XAX=X$，(c) $(AX)^T=AX$,
(d) $(XA)^T=XA$.

この X を Moore-Penrose 型一般化逆行列と呼び，$A^{\dagger}$ で表わす．(授業では，さらに $A^{\dagger}$ の幾何的解釈や線形最小2乗法との関連性を述べる)

(9) 次に連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．これについては次の定理が知られている：

「$AA^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ となる適当な A^- が存在することが，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件である．このとき，この A^- を用いて一般解は $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ で与えられる．ただし I は単位行列，$\boldsymbol{v}$ は R^n の任意ベクトルである．」

ここで $(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ が $N(A)$ に含まれることに注意しておく．

例として $x_1+2x_2=2$ の一般解を求めてみよう．$A=[1,2]$，$\boldsymbol{b}=2$，$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2]^T$ に対して，たとえば一般化逆行列のひとつとして $A^-=[1,0]^T$ とおける．このとき $A^-\boldsymbol{b}=2[1,0]^T=[2,0]^T$ は非同次方程式 $x_1+2x_2=2$ の特殊解，$(I-A^-A)\,\boldsymbol{v}=-v_2[2,-1]^T$ は同次方程式 $x_1+2x_2=0$ の一般解に相当する．そして $x_1+2x_2=0$ の一般解を $A^-\boldsymbol{b}$ の分だけ平行移動すれば非同次方程式 $x_1+2x_2=2$ の一般解 $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ が得られる (図3)．

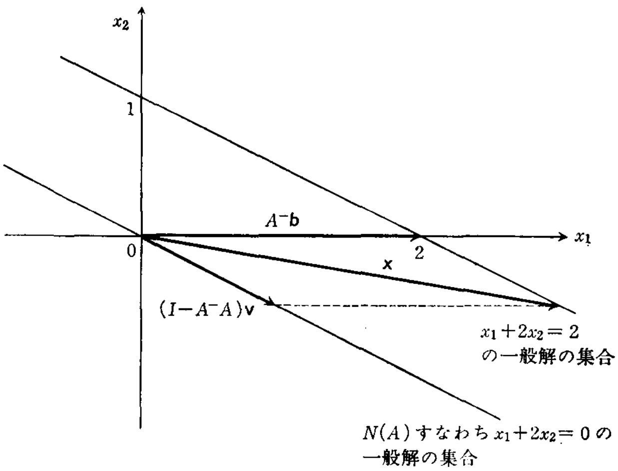

図 3 $x_1+2x_2=2$ の一般解

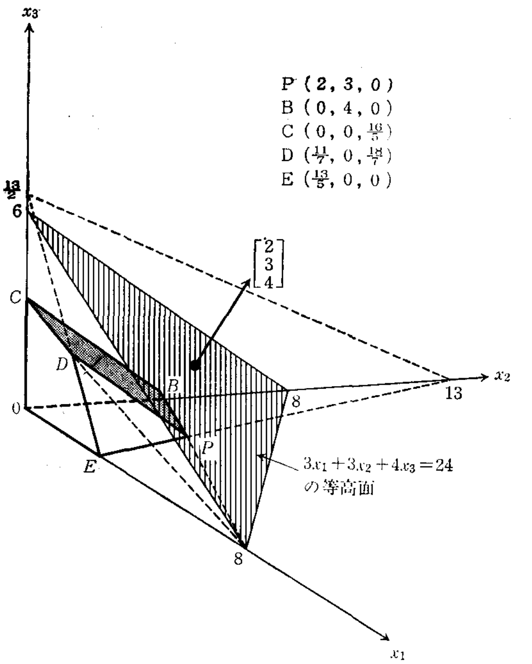

図 4　ＬＰの例題の実行可能領域(第１象限)

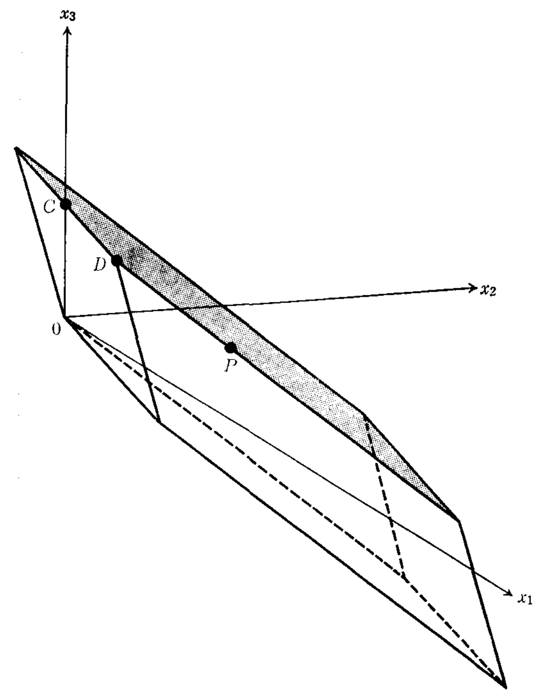

図 5　ＬＰの例題の実行可能領域

(10)　それではＬＰの話題に移ろう．ここでは以下のＬＰを考える：

(ＬＰ＊)　$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq A\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}\}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^m$, $\boldsymbol{c}\in R^n$

(ＬＰ＊)が実行可能であると仮定して，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ の有界性を議論しよう．$\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{x}$ とおくと，固定した A^- に対して(9)より $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{u}+(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ となる．(実は以下の話は A^- の選び方にはよらない)このとき $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq A\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}\}$ $=\max\{\boldsymbol{c}^TA^-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c}^T(I-A^-A)\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{u}\leqq\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}\in R^n\}$ となり，(授業ではきちんと示すとして) $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ の有界性は $\boldsymbol{c}^T(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ の有界性にかかわってくる．しかしながら $(I-A^-A)\boldsymbol{v}$ の大きさ(ノルム)は $N(A)$の中でいくらでも大きくできるから，結局，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ が有界であるための必要十分条件は $\boldsymbol{c}^T(I-A^-A)\boldsymbol{v}=0$，すなわち $\boldsymbol{c}\in N(A)^{\perp}$ であることがわかる．

(11)　最後に，rank $A=m$ であること，$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq A\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}\}$ が有界(すなわち $\boldsymbol{c}\in N(A)^{\perp}$)であることを仮定して，(ＬＰ＊)の一般解を求めよう．このとき

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq A\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}\}=\max\{\boldsymbol{c}^TA^-\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{u}\leqq\boldsymbol{b}\}$$

となる．ここでベクトル $\boldsymbol{z}$ の第 i 成分を z_i で表わせば $((A^-)^T\boldsymbol{c})_i>0$ のとき $((A^-)^T\boldsymbol{c})_i\,a_i\leqq((A^-)^T\boldsymbol{c})_i\,u_i\leqq((A^-)^T\boldsymbol{c})_i\,b_i$，$((A^-)^T\boldsymbol{c})_i<0$ のとき $((A^-)^T\boldsymbol{c})_i\,a_i\geqq((A^-)^T\boldsymbol{c})_iu_i\geqq((A^-)^T\boldsymbol{c})_ib_i$，なので，$((A^-)^T\boldsymbol{c})_i>0$ のとき $u_i^*=b_i$，$((A^-)^T\boldsymbol{c})_i<0$ のとき $u_i^*=a_i$，$((A^-)^T\boldsymbol{c})_i=0$ のとき $u_i^*=(1-t_i)a_i+t_ib_i\,(0\leqq t_i\leqq1)$ (a_i と b_i の内分点) とおけば，結局，(ＬＰ＊)の一般解は

$$\boldsymbol{x}^*=A^-\boldsymbol{u}^*+(I-A^-A)\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}\in R^n$$

で与えられる．

(12)　次の例題を考えよう：「制約条件

$$0\leqq5x_1+x_2+2x_3\leqq13,\quad 0\leqq2x_1+4x_2+5x_3\leqq16$$

のもとで目的関数 $3x_1+3x_2+4x_3$ を最大にせよ」

図 4 には第１象限の実行可能領域が示してある(多面体ＰＢＣＤＥＯの内部)．実際は切口が平行四辺形の筒の内部である(**図 5**)．２点Ｐ，Ｄが等高面 $3x_1+3x_2+4x_3=15$の上にあることと図４より，最適解は２点Ｐ，Ｄを通る直線上のすべての点になる．(10)の記号を用いれば

$$A=\begin{bmatrix}5&1&2\\2&4&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}13\\16\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}.$$

図４からこのＬＰが実行可能であることは明らかである．また

$\begin{bmatrix}5&1\\2&4\end{bmatrix}$ は正則で，$\begin{bmatrix}5&1\\2&4\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix}4&-1\\-2&5\end{bmatrix}$

だから rank $A=2$ となり(11)の１番目の仮定が満たされる．Aの一般化逆行列は簡単に求まって，

$$A^-=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\\ \cdots\cdots\cdots\\ 0 \quad 0\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}4 & -1\\-2 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$$ とおけばよい．

実際，$AA^-=I$ となるので $AA^-A=I\cdot A=A$ が成り立つ．このとき $\boldsymbol{v}^T=[v_1, v_2, v_3]$ に対して

$$(I-A^-A)\,\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1/6\\0 & 0 & -7/6\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=-\frac{v_3}{6}\begin{bmatrix}1\\7\\-6\end{bmatrix}$$

となり，改めて $s=-v_3/6$ とおくと $N(A)$のベクトルは $s[1, 7, -6]^T$ (sは任意実数)で表わされる．ここで，$\boldsymbol{c}$と $[1, 7, -6]^T$ が直交することは容易に確かめられるから (11)の2番目の仮定 $\boldsymbol{c}\in N(A)^{\perp}$ が成り立つ．

よって$(A^-)^T\boldsymbol{c}=[1/3, 2/3]^T$ の各成分の符号を調べれば，$\boldsymbol{u}^*=[13, 16]^T$ となるので，求める一般解は

$$\boldsymbol{x}^*=A^-\boldsymbol{u}^*+(I-A^-A)\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v}\in R^n)$$
$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}4 & -1\\-2 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\16\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\7\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\7\\-6\end{bmatrix}$$

で与えられる．ただし s は任意実数である，図5において，これは点 P(2,3,0) を通り方向が $[1,7,-6]^T$ の直線，すなわち，2点P，Dを通る直線上のすべての点になる．

以上がおおまかな粗筋ですが，授業では，この後さらに(11)の仮定をゆるめて rank $A<m$ の場合の一般解の表現や，いわゆるＬＰの標準形 $\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqq 0\}$ の一般解の話をすることも考えられるでしょう．なお，例題はかなり人為的に作りましたが，もっとおもしろい例題がありましたら教えてください．

参考文献

[1] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E.:Generalized Inverses-Theory and Applications, Chapter 2, Robert E. Krieger Publishing Company, (1980).

[2] 竹内 啓：「線形数学」，第2，3章，培風館，(1974).

平成元年度入会者氏名

(正会員)

古川 一郎(東北大学)

(学生会員)

張 夏富(慶応義塾大学)

(賛助会員)

ＮＴＴデータ通信㈱

郵政省郵政研究所

平成2年度入会者氏名

(正会員)

岩波俊哉(㈱三和総合研究所)，岡田威真雄(中小企業金融公庫)，小野直樹(三菱鉱業セメント㈱)，加地太一(北海道情報大学)，片桐 隆(大和製缶㈱)，杉本英一(松下電子部品㈱)，高野伸栄(北海道大学)，蔦原敏夫(熊野工業高等専門学校)，谷口和正(川崎製鉄㈱)，谷本真二(高知女子大学)，平本 要(㈱望星薬局)，松沼正平(日本テレコム㈱)，三藤利雄(㈶都市経済研究所)，横田俊哉(㈱豊田自動機織製作所)，和光 純(駒沢大学)

(学生会員)

池邊淑子(東京工業大学)，片瀬成識(東京工業大学)，栗田佳文(東京工業大学)，小林浩秋(工学院大学)，斉藤努(東京工業大学)，佐藤昌志(東京工業大学)，柴田 高(筑波大学)，信田正之(東京工業大学)，並木 誠(東京工業大学)，南 竜平(東京工業大学)，牛 志升(豊橋技術科学大学)