

帯状領域への円・楕円の充填

矢島 俊彌

1. はじめに——問題

プラスチックの帯からフロッピーディスクの原材料を打ち出すことを考えてみよう。円形のディスクを帯状の材料から打ち出すのであるから、ディスクをどのように配置しようと“切り屑”が出る。しかし無駄はできるだけ少なくしたい。これは板取り問題と呼ばれる変形^{ペリメーション}の多い一群の問題の1つである。特殊な問題ではあるが、応用範囲も広いので、基礎的な考察をする意味があると考えた。本稿ではこの問題を、「一定の幅を持つ無限に長い帯状領域に、充填率ができるだけ大きくなるように、円または楕円を重ねないように充填する問題」として定式化し、考察を加えることにする。

円の充填については、すでにいくつかの基礎的考察がなされている。無限平面に円を充填する場合には、図1のように、各々の円が他の円と正六角形の頂点で接する「蜂の巣配置」と呼ばれる配置が、充填率最大を実現することが知られている[1]。このときの充填率 d は、

$$d = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0.9088\cdots \quad (1)$$

である。ここで充填率というのは、

$$\text{充填率} = \frac{\text{充填部分の面積}}{\text{材料の面積}} \quad (2)$$

として定義される比率である。我々は以下においても、このように定義される比率を用いて議論を進めることにしよう。

2. 円の充填

無限に長い帯状領域に単位円を充填するさいの最密充填率も部分的にはすでに知られている。

やじま としや 慶応義塾大学 理工学研究科

〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

受理 平成元年9月4日

再受理 平成元年11月8日

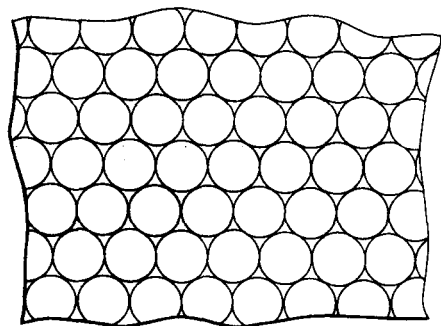


図1 無限平面における円の最密充填

まず帯の幅 x が、

$$x = \sqrt{3} \cdot (k-1) + 2 \quad (k \text{ は正の整数}) \quad (3)$$

の場合には図2のように、帯の境界線以外では各々の円が他の円と六角形の頂点で接する配置が可能である。これは無限平面の場合と同様、「蜂の巣配置」と呼ばれ、その充填率は、

$$d(x) = \frac{\pi}{x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x-2}{\sqrt{12}} \right) \quad (4)$$

で与えられる。

この値はまた、帯状領域に円を充填する場合の最大値であることが証明されている[2]。言い換えれば、帯の中が(3)式のような特殊な長さでないときにも、充填率は(4)式の値を越えることができないのである。

帯の幅が一般の場合 ($x \neq \sqrt{3} \cdot (k-1) + 2$) には、蜂の巣配置をしても幅方向に隙間が空いてしまう。その分

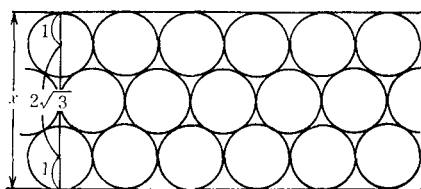


図2 蜂の巣配置

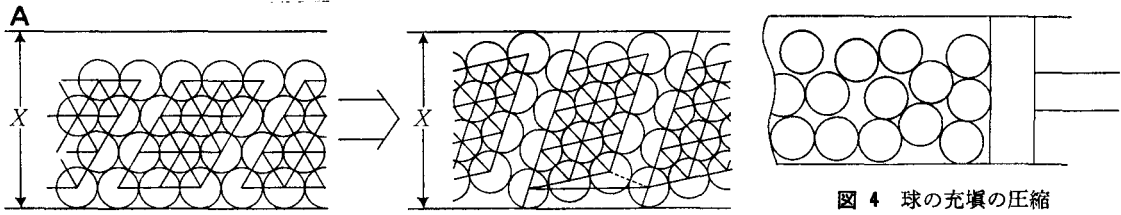


図 4 球の充填の圧縮

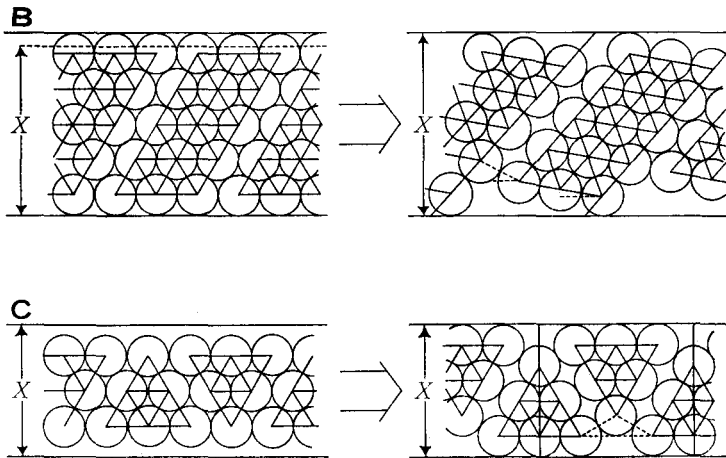


図 3 候補となった充填パターン

を長さ方向で縮めて充填率の向上をはかる方法はいろいろ考えられ、それなりに充填率が改善される。しかし、その1つが“充填率最大”の意味で“最良”であることを数学的に証明することは、きわめて困難に思えた。パターン1つ1つについて、異なった定式化とパラメータの最適化が必要だからである。そこで、ここでは有望と思われるいくつかの配置パターンを候補として考え、その中で最も大きい充填率を示すものを、**優良解**として提示することにした。それゆえ、今後さらに優れたパターンが発見されれば、この**優良解**もそれに席をゆずらなければならないが、そのような場合でも本稿の議論はその部分の変更だけで成立するものである。本稿はそのような意味での“工学的迂回”を方法論としている。

優良解の候補としては次のA, B, Cの3つのパターンをとりあげた。(図3)

図4に示すような細長い箱に球を一重に敷いて右側から長さ方向に圧力を加えれば、球が作る“石垣”は亀裂を生じて長さを縮め、せり上がって箱の幅を満たすであろう。そのときの“石垣”の形を想像して得たのがこれらのパターンである。

これら3つのパターンについて充填率を計算した。計算は初等的であるが、複雑なものであったので詳細は省略するが、この中で充填率が最も大きかったのはパターンCであり、その充填率は

$$d(x) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot \pi}{2 \cdot x \cdot (2 \cdot \cos \alpha + k - 1)} \quad (5)$$

($x = 2 + 2 \cdot \sin \alpha + (k-1) \cdot \sqrt{3}$) という式で与えられる。そこでこのパターンCの配置を**優良解**と認めることにした。

横軸を帯の幅 x 、縦軸を充填率をとってこの配置パターンCの充填率の変

化をグラフにあらわしたのが図5である。これを**充填率図**と呼ぶことにする。

横軸は、蜂の巣配置が可能な帯の幅が整数で表わされるよう、パラメータ化してある。したがって、パラメータ k が整数のところでは充填率が高く、そこから外れると下がるので、そのグラフは図5のような“たるみ”をつないだ形を示す。そしてそのたるみは、幅 x の増加につれて小さくなっていく。

3. 楕円の充填

次に、楕円の場合を考えてみよう。楕円は、アフィン変換によって円から生成される。アフィン変換とは、直線 g 、および倍率 λ を任意に設定する時、平面上の各点 P を

$$F P' = \lambda \cdot F P \quad (6)$$

となるような P' に変換する写像である。ここで直線 g をアフィン変換の“基線”と呼び、 F は P および P' の基線 g への正射影である(図6)。また、倍率 λ は任意の実数であるが、ここでは一般性を失うことなく、 $\lambda \geq 1$ の場合のみを扱うことにする。

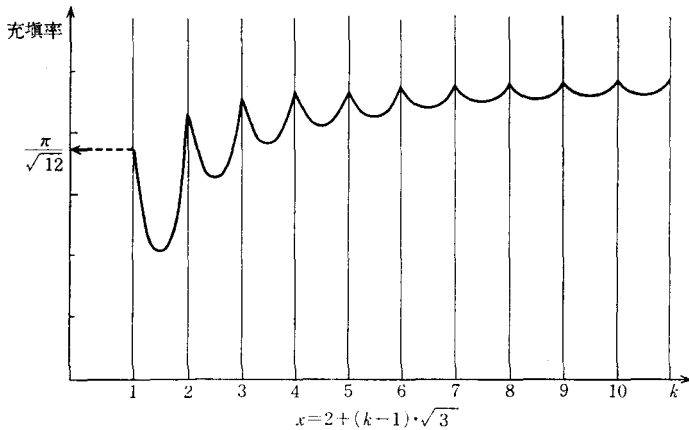


図 5 円の優良充填の充填率図

アフィン変換はいわば図形を一方方向に引き伸ばすような変換であるから、円は楕円になるわけである。またアフィン変換は、明らかに次の3つの性質をもっている。

- (1)直線は直線に変換される。
- (2)平行線は平行線に変換される。
- (3)図形の面積比は変換によって不変。

これらの性質から、

帯状領域に配置した円群にアフィン変換をほどこせば、同じ充填率で帯状領域に配置した楕円群が得られることがわかる(図7)。

こうして得られた楕円の帯状領域への充填では、充填されている楕円の長軸はすべて同一の方向、すなわち基線 g の法線方向を向いている。各楕円の長軸がさまざまな方向を向いているような充填は、アフィン変換では求めることはできない。そのような任意の充填は多種多様であり、そのすべてを考察するのは、困難である。またそのような楕円について考察する場合にも、まずその評価の基準として、軸が一方方向を向いた楕円の充填を考えると不可欠で、避けて通れないものと考えられる。よってここでは、アフィン変換で求められる、楕円の長軸がすべて同一方向を向いているような配置の中で、さしあたってそれ以上高い充填率が得られないようなものを求め、それを優良解として提示することにする。

さてここで、幅 x の帯状領域における単位円の配置が与えられ、これが充填率 d を持つものとしよう。これに対して帯と角 θ をなすような法線を持つ直線 g によって倍率 λ のアフィン変換をほどこせば、

$$\begin{aligned} \text{幅 } x' &= \lambda \cdot x \cdot \frac{\sin \eta}{\sin \theta} \\ \tan \eta &= \frac{1}{\lambda} \cdot \tan \theta \end{aligned} \quad (7)$$

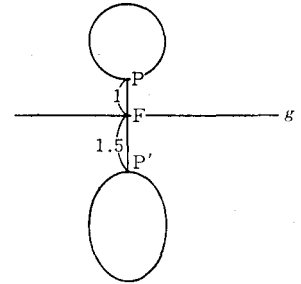


図 6 アフィン変換の例

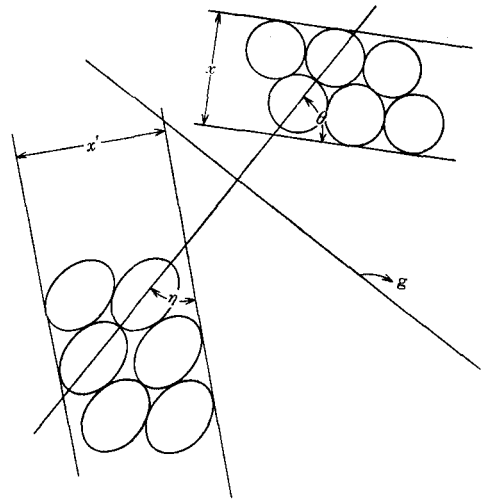


図 7 蜂の巣配置のアフィン変換 $\lambda=1.5 \theta=60^\circ$

の帯状領域において、

$$\text{短軸の長さ} = 2 \times 1 \quad (8)$$

$$\text{長軸の長さ} = 2 \times \lambda \quad (9)$$

の楕円を充填率 d で配置したものが得られる。いま、長軸の長さを固定して考えよう。すなわち短軸 $= 2 \times 1$ 、長軸 $= 2 \times \lambda$ の楕円の充填問題である。このような楕円の充填は、アフィン変換において倍率を λ に保ちさえすれば異なる θ についても得られるので、 θ を変化させれば、いろいろな幅の帯状領域に対する充填が得られる。式(7)からわかるように、その帯の幅 x' の値は

$$x \leq x' \leq \lambda x \quad (10)$$

の範囲の値をとりうる。すなわち幅 x の帯状領域における充填率 d の円の配置が得られれば、これから、式(10)で与えられるような範囲の幅を持つ帯状領域における短軸

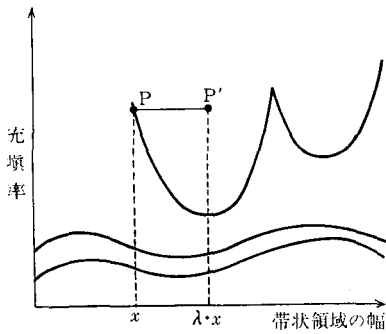


図 8

2×1, 長軸 2×λ の楕円の充填率 d の配置が得られることになる。

言い換えれば, 充填率図上, 点 P で表わされるような円の配置が可能ならば, 図 8 に示すように, これを始点とする線分 PP' 上の点のすべてに対応

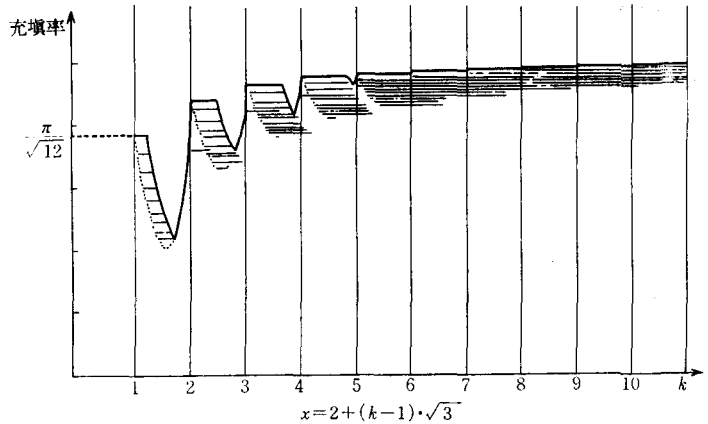


図 9 楕円の充填率図 ($\lambda=1.2$)

する幅の帯への楕円(2×1, 2×λ)の配置が可能になる。このことを用いれば, 円に関する優良充填図を変換して楕円のそれを作成することができる。

こうして帯の幅と充填率との関係を示したのが, 図 9 ~ 図 11 の充填率図である。特に倍率 λ が大きければ, あらゆる幅で円の最密充填と同じ充填率での充填が可能であることがわかる。図中で, 太線で示したのが, 帯状領域における楕円の優良充填率である。

例題

以上の考察から, 帯状領域の幅 x' と楕円の形 (具体的にはアフィン変換の倍率 λ) が与えられた時に, 優良充填を求める手順を例題によって示せば次のようになる。

幅 $x' = 6$ の帯状領域に, 長軸 1.4, 短軸 1 の楕円を, 円の蜂の巣配置と同じ充填率で充填する, という問題を例に説明しよう。

まず, 倍率 $\lambda = 1.4$ でアフィン変換して幅が 6 となるような “もとの” 帯幅 x を求めねばならない。式(10)より,

$$x \leq 6 \leq 1.4 \cdot x \quad (11)$$

であるから x の取り得る値は,

$$\frac{1}{1.4} \cdot 6 \leq x \leq 6 \quad (12)$$

である。この範囲で, 単位円を充填した場合に, 充填率が最も高くなるような帯

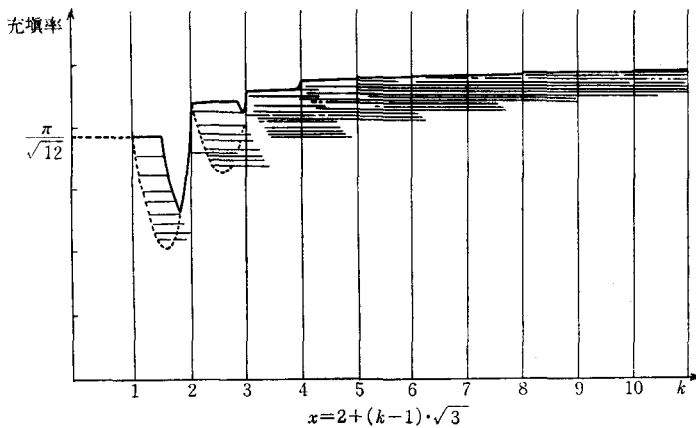


図 10 楕円の充填率図 ($\lambda=1.4$)

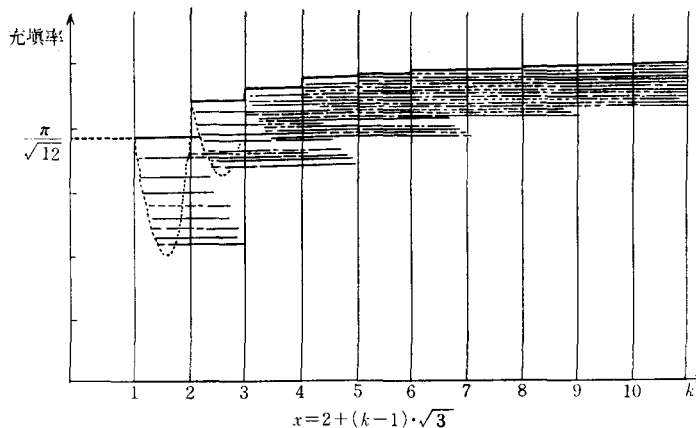


図 11 楕円の充填率図 ($\lambda=2.0$)

状領域の幅 x は、

$$x = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} = 5.4641 \dots \quad (13)$$

である(図12)。式(7)に x, x', λ の値を代入すれば、

$$6 = 1.4 \cdot (2 + (2 + 2 \cdot \sqrt{3})) \cdot \frac{\sin \eta}{\sin \theta}$$

$$\tan \eta = \frac{1}{1.4} \cdot \tan \theta \quad (14)$$

となる。これを満たすような帯と基線 g の法線がなす角度 θ の値は、 35.3° である。

幅 $2 + 2 \cdot \sqrt{3}$ の帯状領域で成立する円の蜂の巣配置を、直線 g を基線として、 $\theta = 35.3^\circ$ 、倍率 $\lambda = 1.4$ でアフィン変換して得られたのが、図13に示したような、

幅6の帯状領域における楕円の充填である。この配置は、円の蜂の巣充填、すなわち帯状領域における円の優良充填と同じ充填率をもつ配置であり、これよりも大きい充填率を示す楕円の充填を求める方法は、今のところ知られていない。よってここではこうして得られた配置を、優良充填と認めることにする。

4. まとめ——本研究の立場

最後にまとめとして、本研究の、板取り問題の研究中における立場について述べておきたい。

板取りの問題へのアプローチは大きく分けて2つの流れに集約される。1つは昔から行なわれている経験的方法によるアプローチで、実物に型紙をあてる、あるいは模型上でこの操作を行ない、試行錯誤により合理的な切り取り方を人間が視察により求めるという方法である。この伝統はコンピュータの発達とともにCAD (Computer Aided Design) として発展、今に至っている。もう一方は純粋に数理的方法によるアプローチであり、

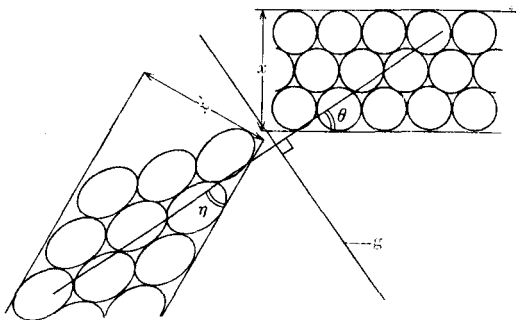


図13 アフィン変換による楕円の充填

$$\lambda = 1.4 \quad \theta = 33.5$$

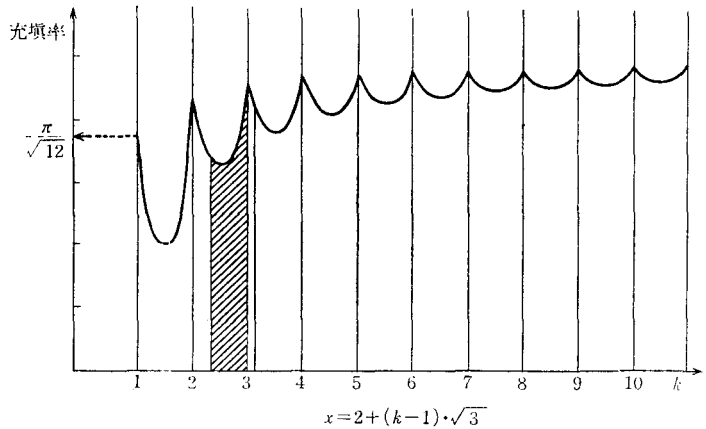


図12 x がとり得る範囲 (斜線部)

その草分けとなったのは、1961年、1963年、1965年に、OPERATIONAL RESEARCH 誌に掲載された Gilmore, P.C. & R.E. Gomory の論文[3], [4], [5] である。1965年の論文では、1次元の板取り問題から発展して、より高次元の問題についても、線型計画法の問題としてアプローチがなされている。

経験的方法は、人間の高度に発達した図形認識能力を基礎としており、個々の問題の解決にはきわめて有力であるが、得られた配置の最適性の確認に問題がある。また、数理的方法は切り取るものの形、材質など多くの条件によって制約がされており、その制約条件の難しさから、どんな問題でも解けるというわけにはいかない、というのが現状である。現実にはなにか理論、なにか経験にもとづいて、さらに良い方法を求めて研究がなされている。

板取り問題がこのように工学的に取り扱われる一方、さらに基礎的な数学の分野でも、平面における充填や被覆の問題を扱った幾何学的方法もある。Fejes Toth 「配置の問題」[1] では、さまざまなタイプの充填・被覆の問題が述べられている。また、M. C. エッシャーの描いた、同一のパターンが画面全体を覆うという絵は、充填問題の一例として、数学者の興味をひいてきた。「美の幾何学」[6] では、エッシャーの絵のほか、「紋」や繰り返し文様、寄せ木細工などについて、それらにあらわれる対称性に関する考察がなされている。

このように、実用・理論両面においてこの問題はひろく取り扱われている。しかし、これは工学と数学との融和という点から見るとまだ十分とは言えず、これらをつなぐような研究に欠けており、いわば計算幾何学的方法

によるアプローチが必要だというのが、筆者の見解である。まだ研究すべきことは山積しているが、とりあえずの結果を示して批判をおおぐべく敢えて発表する次第である。

参 考 文 献

- [1] Toth, L. Fejes, "Lagerungen in der Ebene auf Kugel und im Raum", Springer-Verlag, Heidelberg(1972).
- [2] 邦訳フェイェッシュ・トート(著), 樋口伊佐夫, 種村正美(訳):「配置の問題」, みすず書房(1983).
- [3] Gilmore, P. C. & R. E. Gomory: "A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem", Opns. Res. Vol.9 (1961), pp.849-859.
- [4] Gilmore, P. C. & R. E. Gomory: "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem-Part II", Opns. Res. Vol. II (1963), pp. 863-888.
- [5] Gilmore, P. C. & R. E. Gomory: "Multistage Cutting Stock Problem of Two & More Dimensions", Opns. Res. (1965)pp.94-120.
- [6] 伏見康治, 安野光雅, 中野義作:「美の幾何学」, 中公新書554(1979).
- [7] Rogers, C. A.: "Packing and covering", Cambridge University Press (1964).
- [2] Heppes, A: "Über Kreis-und Kugelwolken", Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12(1961).pp.209-214.

「論文・研究レポート」の原稿募集

ORの実践をわかりやすい事例を中心に紹介してほしいという会員からの要望がある一方で、OR理論の展開あるいは手法の開発など学術的な研究報告も忘れないでという注文も根強くあります。

本誌では「論文・研究レポート」という審査論文欄を設けております。この論文・研究レポートでは、特に、経営の実践に役立つ理論研究、手法あるいはシステムの開発、概念フレームおよび方法論等を扱った研究のご寄稿を歓迎いたします。

投稿要領: 学会原稿用紙36枚(25字×12行)以内(図表を含む)(ワープロ可)投稿先はOR学会事務局OR誌編集委員会宛。

なお原稿のコピーを2部添付してください。

レフリー審査の結果、改訂をお願いしたり、採択されない場合があることをご了解ください。また、原稿は、採択・不採択にかかわらず、原本、コピーともお返してできません。

(OR誌編集委員会)