出力結果の解析

伏見　正則

1. はじめに

“LP，PERT，シミュレーション”がORワーカー愛用の3大道具といわれたのは大分前のことであった．現在では，どのような道具（手法）がベスト・スリーかは知らないが，それでもこの3つがあいかわらずよく使われていることは間違いないであろう．しかし，このうち前の2つとシミュレーションでは，道具としての性格がずい分異なる．すなわち，前の2つは，モデルの構造が明確で，ソフトウェアも完備しており，データさえ集めれば，容易に解が得られ，その解釈についても，特に疑義が生ずることは少ないであろう．それに対して，シミュレーションでは，まずモデルを構築し，予備的実験を繰り返す等，試行錯誤によってその妥当性を検証するところから始めなければならない．モデルができ上がったら，本格的実験を行なって解が得られることになるが，この解についても，またよく吟味してみる必要がある．たとえば，多くのシミュレーションでは，乱数を使って，確率的変動が内在するシステムの解析を行なうので，得られた解は，得られる可能性のある解の集団のうちのいくつかに過ぎない．したがって，そのことを念頭において解を吟味し，適確な最終的判断を下さなければならない．このようなわけで，シミュレーションのプロセスはORの教科書に書いてある実践的ORの手順そのものであるともいえよう．したがって，これについて一般的議論を展開することはほとんど不可能である．本稿では，複雑なシステムの混雑現象の解析（待ち行列のシミュレーション）のような場面を念頭において，シミュレーションの最終的段階，すなわち，得られた解の吟味・解析法をめぐる話題について述べる．ただし，取り上げる手法はごく一般的なものなので，適用できるのは待ち行列のシミュレーションに限られるわけではない．なお，議論の数学的厳密性は無視していることをお断りするとともに，逆瀬川［4］が同様の話題を扱っているので，参考にされることをお勧めする．

ふしみ　まさのり　東京大学　工学部　計数工学科
〒113 文京区本郷7－3－1

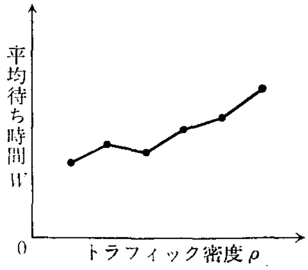

図 1　シミュレーション結果のまずい表示法

4. 線には幅がある

“線には幅がない”というのが初等幾何学の常識であるが，シミュレーションによって得られた線には幅があることを認識することが，結果を吟味する上できわめて重要である．

図1は，あるシステムの混雑現象をシミュレーションによって解析した学生S君が卒業論文の発表会で示した図である．すぐにT先生から質問が出た．「トラフィック密度が大きい方が平均待ち時間が小さくなっているところがあるが，そのからくりを説明したまえ．」S君答えていわく「それは，乱数が悪いのです」

確かに，一般に使われている乱数発生ルーチンの中には，あまり性質の良くないものも多いことは事実である．しかし，いまの例では，乱数が悪いというよりは，S君の実験のやり方や図の描き方の方が悪いというべきであろう．各トラフィック密度（ρ）に対してシミュレーションを1回行なっただけで結論を出そうというのは無理である．それは，サイコロを1回だけ振って5の目が出たのを見て，「このサイコロは5の目が出やすい」という“結論”を出す無謀さに似ていると言えよう．

それでは，シミュレーションは何回繰り返したらよいか？　これに対しては，もちろん一般的な答えはない．問題の性質や，結果に対して要求される精度による．結

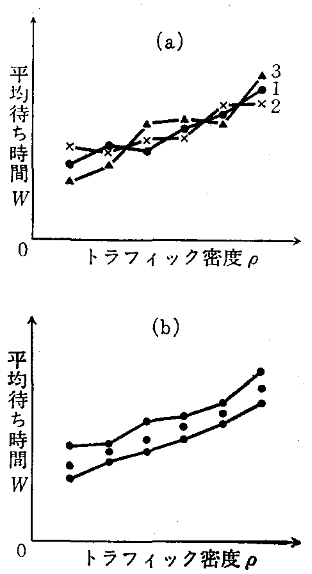

図 2 シミュレーションを3回繰り返した結果

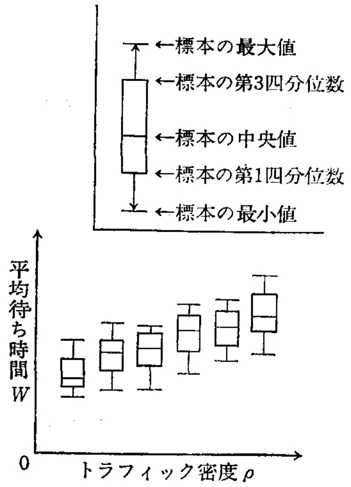

図 3 箱ひげ図

論を出すまでの時日や計算料金によって制約されることもあろう．しかし“最低3回は繰り返す”ことにするのがよいであろう．そうすれば大きめの値，中くらいの値，小さめの値の3つ（いわゆる松竹梅の3点セット）が得られ，バラツキ具合に対してごく大ざっぱな見当をつけることができる．なお，この場合3回のシミュレーションでそれぞれ**図2**(a)の1，2，3のような結果が得られたとしても，このような図は描かないで，たとえば**図2**(b)のようにした方がよいことは説明するまでもないであろう．かくして“幅のある線”が得られることになる．

得られた“線の幅”が所望の精度に比べて大きすぎる場合には，シミュレーションの回数をもっと増やす必要がある．この場合には，得られた結果を，いわゆる箱ひげ図（**図3**）によって示すことが推奨されている．

3. 統計的推測

箱ひげ図を描くことによって，各ρに対して平均待ち時間がだいたいどのくらいの値をとるかはわかるが，もっと定量的な評価をする必要があれば，統計的推測法を使うことになる．その概要は次のとおりである．特定のρについて，シミュレーションによって得られた平均待ち時間を$W_1, \cdots, W_N$とする．これらは，ある未知の分布$F(w)$からのランダムサンプルと考えられる．このサンプルから，未知の分布の形が完全にわかればうれしいが，それは通常不可能であるから，その分布の平均値μ，分散σ^2，あるいはパーセント点(たとえば，$F(w) \geqq 0.9$を満たす最小のWは，この分布の上側10パーセント点と呼ばれる）などを推定する．

分布の平均値（母平均）μは，サンプルの算術平均

$$\overline{W}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n$$

によって推定するのがふつうである．またσ^2はサンプルの不偏分散

$$s^2=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(W_n-\overline{W})^2$$

によって推定する．$\overline{W}$およびs^2はそれぞれμ，σ^2の不偏推定量である．μの推定に“幅をつける”ときには，ふつう$\overline{W}\pm 2\frac{s}{\sqrt{N}}$とする．これは$\overline{W}-2\frac{s}{\sqrt{N}} \leqq \mu \leqq \overline{W}+2\frac{s}{\sqrt{N}}$であると結論を下しても，ほぼまちがいがないことを意味する．(なかには$\overline{W}\pm\frac{s}{\sqrt{N}}$を採る人もいて，$s/\sqrt{N}$あるいは$2s/\sqrt{N}$は1つの数値として書かれているので大変に紛らわしい．注意する必要がある．）もっと正確に言えば次のとおりである．W_nが**正規分布からのランダムサンプルならば，**

$$\frac{\overline{W}-\mu}{s/\sqrt{N}}$$

は自由度が$N-1$のt分布をする．したがってこのt分布の上側100αパーセント点を$t_\alpha(N-1)$と書くことにすれば

$$\Pr\left\{-t_\alpha(N-1) \leqq \frac{\overline{W}-\mu}{s/\sqrt{N}} \leqq t_\alpha(N-1)\right\}$$
$$=\Pr\left\{\overline{W}-t_\alpha(N-1)\frac{s}{\sqrt{N}} \leqq \mu \leqq \overline{W}+t_\alpha(N-1)\frac{s}{\sqrt{N}}\right\}$$
$$=1-2\alpha$$

が成り立つ．$t_\alpha(N-1)$の値は統計数値表に載っているが，よく使われる$\alpha=0.025(1-2\alpha=0.95)$の場合には，$N \geqq 20$ならばほぼ2に等しい．前記の$s/\sqrt{N}$の係数2は，このような意味を持っている．そして，区間$\overline{W}\pm 2\frac{s}{\sqrt{N}}$は，$\mu$に対する（近似的に）95%の信頼区間であると言われる．

W_nが正規分布以外の分布からのランダムサンプルであっても，Nが20程度以上であれば，中心極限定理のお蔭で以上の議論は近似的に成り立つ．しかし，ランダムサンプルでない場合には，以上の議論は成り立たない．ランダムサンプルであることを保証するためには，良い乱数列を使い，しかも乱数列の同じ部分を使わないよう

にすることが必要である．

ときには σ^2 の推定にも"幅をつける"必要があるかもしれない．W_n が正規分布をしている場合には s^2 の分布法則がわかっている（すなわち s^2/σ^2 が自由度 $N-1$ のカイ2乗分布をする）ので，それをもとにして σ^2 に対する信頼区間を構成することができる．しかしこの方法は"正規分布"という仮定がくずれると破綻をきたすので次の方法（ジャックナイフ法）が推奨されている．

N 個のデータ $W_1, \cdots, W_N$ の中から i 番目のデータ W_i を除いたものについて，その平均値 $W_{(i)}$ および不偏分散 s^2 を計算する：

$$\overline{W}_{(i)}=\frac{1}{N-1}\sum_{n\neq i}W_n,\ s_{(i)}{}^2=\frac{1}{N-2}\sum_{n\neq i}(W_n-\overline{W}_{(i)})^2$$

この操作を $i=1, \cdots, N$ について行ない，さらに

$$Z_i=Ns^2-(N-1)\,s_{(i)}{}^2$$

を計算する．Z_i が σ^2 の不偏推定を与えることは容易にわかる．次に，$Z_1, \cdots, Z_N$ の平均 Z と不偏分散 s^2 を計算する：

$$\bar{Z}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_i,\ \ s_Z{}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$$

このとき，

$$\frac{\bar{Z}-\sigma^2}{s_Z/\sqrt{N}}$$

は近似的に自由度が $N-1$ の t 分布をするので，σ^2 に対する近似的な信頼区間を次のようにして構成することができる．

$$\Pr\left\{\bar{Z}-t_\alpha(N-1)\frac{s_Z}{\sqrt{N}}\leqq\sigma^2\leqq\bar{Z}+t_\alpha(N-1)\frac{s_Z}{\sqrt{N}}\right\}\approx 1-2\alpha$$

4. 独立でないデータにもとづく推測

前節では，同一の分布からのランダムサンプル（独立な観測値）にもとづく統計的推測法について述べたが，シミュレーションでは，独立でないデータが得られ，それにもとづいて推測を行なわなければならないことも多い．たとえば，図1でS君が求めた平均待ち時間はどのようにして計算したものであろうか？　これにはいくつかの可能性が考えられるが，おそらくある時間内にシステムから退去した客の待ち時間 $V_1, \cdots, V_M$ の総計をその人数で割って求めたものであろうと推定される．ところで，ある客の待ち時間が長ければ，次の客の待ち時間も長いことが多いであろうから，$V_1, \cdots, V_M$ が互いに独立であると仮定して統計的推測を行なうのは無理である．そこで，データの間に次の相関構造を仮定しよう：

データは定常状態からのサンプルで（注1），その平均値は μ，分散は τ^2，共分散は $\mathrm{Cov}[V_j, V_{j+k}]=R(k)$ すなわち添字の差のみに依存する．

ここで，$R(k)=R(-k)$，$R(0)=\tau^2$ であり，$\rho(k)=R(k)/R(0)$ は自已相関係数と呼ばれるものである．

平均値 μ は，相関の有無にかかわらず，サンプルの平均値

$$\bar{V}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}V_j$$

によって推定できる．しかし推定量としての $\bar{V}$ の分散は相関のない場合の値 τ^2/M とは異なり次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{V}]&=\frac{1}{M^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^{M}V_j\right]\\&=\frac{1}{M^2}\left\{\sum_{j=1}^{M}\mathrm{Var}[V_j]+2\sum_{k<j}\mathrm{Cov}[V_k, V_j]\right\}\\&=\frac{\tau^2}{M}\left\{1+2\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-\frac{k}{M}\right)\rho(k)\right\}\end{aligned}\qquad(1)$$

そして，ふつうは前述のように $\rho(k)>0$ であるから，$\bar{V}$ のバラツキは相関のない場合より大きいことになる．逆にデータの不偏分散 s^2 の期待値を計算してみると，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[s^2]&=\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{M}(V_j-\bar{V})^2\right]\Big/(M-1)\\&=\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{M}(V_j-\mu)^2-M(\bar{V}-\mu)^2\right]\Big/(M-1)\\&=\{M\tau^2-M\,\mathrm{Var}[\bar{V}]\}/(M-1)\\&=\tau^2\left\{1-\frac{2}{M-1}\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-\frac{k}{M}\right)\rho(k)\right\}\end{aligned}$$

となり s^2 は τ^2 を過小評価する傾向がある事がわかる．なお(1)式の｛ ｝内はサンプル数 M が大きい場合には

$$c=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho(k)\qquad(2)$$

にほぼ等しい．この値は数十程度の大きさになることもまれではない．そして相関のない場合に N 個のサンプルによって得られる推定精度と同じ精度の推定をしようとすれば，ほぼ $M=cN$ 個のサンプルをとることが必要となる．

通常の場合，(1)式の｛ ｝内の値，あるいはその近似値である(2)式の c の値は不明であるから，何らかの手段によってそれ，あるいは $\mathrm{Var}[\bar{V}]$，を推定する必要がある．このためにいろいろな方法が提案されている([4])が，ここではまずバッチ法と呼ばれるものにについて述べる．

データ $V_1, \cdots, V_M$ を相続く m 個ずつまとめてひと組（バッチ）にして，各バッチでの平均値を計算する：

$$B_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}V_{(i-1)m+j},\quad 1\leqq i\leqq K$$

ただし，$M=mK$ であるものとする．m が大きければ，$B_1,\cdots,B_K$ の相関はもとの系列の相関よりも弱いと考えられるので，その不偏分散

$$s_B{}^2=\frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(B_i-\bar{B})^2$$

は，τ^2/m に対する比較的よい推定量であると考えられる．したがって，$s_B{}^2/K$ は $\mathrm{Var}[\bar{B}]=\mathrm{Var}[\bar{V}]$ に対する比較的よい推定量である．ふつうは，Kは20～30程度にとり，またmは，$k\geqq m$ では$\rho(k)$がほぼ0と見なせる程度に大きくとる．この場合には，中心極限定理により，$B_1,\cdots,B_K$ はほぼ正規分布をするものと見なせるから，t 分布を使ってμに対する信頼区間を構成することができる．すなわち

$$\bar{B}-t_\alpha(K-1)\frac{s_B}{\sqrt{K}}\leqq\mu\leqq\bar{B}+t_\alpha(K-1)\frac{s_B}{\sqrt{K}}$$

が近似的に信頼度 $100(1-2\alpha)$%の信頼区間となる．

次に，$\mathrm{Var}[\bar{V}]$ を推定するためのもうひとつの方法として，時系列のスペクトル解析法を利用する方法を簡単に紹介しておこう．

$$f(\omega)=\frac{\tau^2}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho(k)\cos k\omega$$

は，データ $V_1,V_2,\cdots$ を生み出している確率過程のスペクトル密度関数と呼ばれているものである．これと(2)式の c との間には

$$c\tau^2=2\pi f(0)$$

という関係がある．したがって，サンプル数Mが大きければ，(1)式から

$$\mathrm{Var}[\bar{V}]\approx 2\pi f(0)/M$$

という近似式が得られ，$f(0)$ がわかれば $\mathrm{Var}[\bar{V}]$ がわかることになる．スペクトル密度の推定のしかたについては，いろいろな提案と問題点がある([2])が，ここでは自己回帰モデル（ARモデル）を利用する方法について簡単に述べる．

データがp次の自己回帰過程 AR(p)

$$V_j-\mu=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l(V_{j-l}-\mu)+\varepsilon_j,\quad \varepsilon_j\sim \mathrm{N}(0,\sigma_\varepsilon{}^2)$$

からのサンプルであると見なせるものとする．この場合には，

$$f(\omega)=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{2\pi|1-\sum_{l=1}^{p}\alpha_l e^{-\mathrm{i}l\omega}|^2},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1}$$

であることがわかっているので，

$$\mathrm{Var}[\bar{V}]\approx\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{M(1-\sum_{l=1}^{p}\alpha_l)^2}$$

となる．したがって，統計解析用ソフトウェア等を使って $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$，$\sigma_\varepsilon{}^2$ を推定することにより，$\mathrm{Var}[\bar{V}]$ を推定することができる．

5. あとがき

本稿で取り上げた話題，なかでも独立でないデータの解析法については，現在さまざまな研究が行なわれているが，まだ決定的な方法はないように思われる．ひとつの参考にしていただければよいと思う．最後に，パデュー大学の B. Schmeiser 教授からいろいろな資料や情報を提供していただいたことを記して感謝したい．

（注1） シミュレーションの初期の段階で得られるデータは，定常状態からのサンプルとは見なせないことが多いので，これを捨てる等の措置が必要である．この問題については［4］を参照されたい．

参 考 文 献

［1］ P. Bratley, B. L. Fox, and L. E. Schrage : A Guide to Simulation, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1987.

［2］ 藤井光昭：時系列分析の現状と問題点のいくつかについて，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 34 (1989), No. 10, pp. 517-523.

［3］ B. D. Ripley : Stochastic Simulation, John Wiley & Sons, New York, 1987.

［4］ 逆瀬川浩孝：シミュレーションで何がわかるのか，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 32(1987), No. 2, pp. 233-238.