On Job Schedulings in Stochastic Flow Shops and Related Results in Tandem Queues

（確率フローショップ問題に対するスケジューリングと直列型待ち行列への応用）

東京工業大学　理工学研究科情報科学専攻　**牧本　直樹**（指導教官　森村英典教授）

1. はじめに

フローショップは，スケジューリング理論における重要なモデルの1つで，これまでにいろいろな研究がなされている．また，処理時間が確率変数で与えられる確率フローショップについても，最近いくつかの結果が報告されている [1,2,6]．しかし，バッファについては，全くないか逆に無限容量を持つ，という仮定の下で解析されていることが多く，バッファの容量と最適スケジュールの関係については，よくわかっていない．本論文では，同一機械からなる確率フローショップを考え，ある種の処理時間分布の下では，バッファがない場合の最適スケジュールが，任意容量のバッファに対しても最適になることを示す．

一方，フローショップと直列型待ち行列の間には，一種の双対関係があることが知られている [6]．本論文では，次に，この関係を使って直列型待ち行列でのサーバーの順序が，客の退去過程に与える影響について考察を行なった．その結果として，指数サーバーの直列型待ち行列ではサーバーの順序が退去過程に影響しない，ことに対する新しい証明を与えている．

2. フローショップモデル

m台の同種の機械M_j $(j=1,\cdots,m)$と，n個のジョブ$J_i(i=1,\cdots,n)$からなるフローショップを考える．各機械の間には任意容量のバッファが存在する．J_iのM_jでの処理時間は各々独立な確率変数$X_i{}^j$で与えられる．各機械が同種であるという仮定から$X_i{}^j$の分布はiにのみ依存してjには依存しない．すなわち$X_i{}^j$ $(j=1,\cdots,m)$は，1つの分布関数F_iからの独立なm個のサンプルとなるジョブの処理時間の生成確率変数をX_iと書くことにする．取り得るスケジュールは，リストスケジュール$L=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$に限定して考える．ただしLは，$J_{i1},J_{i2},\cdots,J_{in}$という順序で処理を行なうスケジュールを表わしている．スケジュールLの下での最大完了時間(makespan)を$M(L)$で表わし，以下では，$M(L)$を最小にするスケジュールについて考察する．2つの非負確率変数X, Yに対して，次のことを定義する．

定義1　X, Yが non-overlapping$\Leftrightarrow P[X\leq Y]=1$ or 0.

定義2　$X<_{st} Y \Leftrightarrow P[X>t]\leq P[Y>t]$ for all $t\geq 0$.

また，n個の non-overlapping なジョブに対して，

定義3　スケジュール$L=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$が$SPT-LPT$ $\Leftrightarrow X_{i1}\leq\cdots\leq X_{ik}$かつ$X_{ik}\geq\cdots\geq X_{in}$となる$k$が存在する．

3. 最適スケジュール

Foley and Suresh [1,2]は，バッファが全くない場合に，以下で述べる処理時間分布の下での最適スケジュールを求めている．本論文では，機械の間に任意容量のバッファが存在する場合でも，同様のスケジュールがやはり最適になることを示す．

まず，n個のジョブがすべて non-overlapping である場合には，次の基本的な結果が成立する．

定理1　任意の$SPT-LPT$スケジュールLに対して makespan は同じ分布になり，しかもバッファ容量に依存しない．さらに，L'を任意のスケジュールとすると，$M(L)<_{st}M(L')$.

次に，non-overlapping なジョブ$J_1,\cdots,J_n$に任意の処理時間分布を持ったジョブYが加わった場合（ジョブは n+1 個ある）を考える．以下では，$SPT(k)$ ($LPT(k)$)は，k個の non-overlapping なジョブを処理時間の短(長)い順に並べたスケジュールを表わす．

定理2　$L=SPT(n)-Y$ or $Y-LPT(n)$, L'を任意のスケジュールとすると，$M(L)<_{st}M(L')$．また，$M(L)$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

の分布はバッファ容量に依存しない．

次に，上記の $n+1$ 個のジョブに，さらに任意の処理時間分布を持ったジョブ Z が加わった場合を考える．この場合は問題が非常に難しくなり，次のような結果を得るにとどまっている．

定理 3 makespanの平均を最小にするスケジュールは，$SPT(k)-Y-SPT(l)-LPT(m)-Z(k+l+m=n)$ という形のスケジュールかその逆順の中に存在する．

最後に，$J_1,\cdots,J_n$ が任意の処理時間分布を持ち，ジョブ Y, Z の処理時間が non-overlapping の順序で $J_1,\cdots,J_n$ より短い場合を考える．

定理 4 スケジュール $L=(i_1,\cdots,Y,\cdots,Z,\cdots,i_{n+2})$ からジョブ Y，Z を両端へ動かして得られるスケジュールを $L'=(Y, i_1,\cdots,i_{n+2}, Z)$ とする．このとき，$M(L')<_{st} M(L)$ が成り立つ．

4. 直列型待ち行列におけるサーバーの順序

2段の単一サーバー直列型待ち行列を考える．n 番目の客は，時点 t_n に到着し，サーバー1，2でそれぞれ A_n，B_n だけサービスを受けて退去する．到着過程 $T=(t_n)$ は任意に固定して考え，そのときの退去過程を (D_n) とする．一方，2つのサーバーの順序を交換したときの退去過程を $(\bar{D}_n)$ とする．このとき，A_n, B_n がともに定数であるか，指数分布にしたがう場合には (D_n) と $(\bar{D}_n)$ が確率的に等価になることが知られている（[5]他）．本論文では，この結果を多少の拡張も含めて新しい方法で証明する．

今，n 番目の客のサーバー1，2からの退去時点を L_n，D_n とすると

$$L_n=\max_{1\le i\le n}\{t_i+\sum_{k=i}^{n}A_k\},$$

$$D_n=\max_{1\le i\le n}\{t_i+\max_{i\le j\le n}\{\sum_{k=i}^{j}A_k+\sum_{k=j}^{n}B_k\}\}$$

が成り立つ．また，サーバーの順序を交換したシステムに対しても，A_n と B_n を交換することによって $\bar{L}_n$ と $\bar{D}_n$ の直接表現が得られる．これらの式を比較して次の結果が得られる．

定理 5 すべての $n\ge 2$ について

$$\frac{P[L_{n-1}\le s_{n-1}-x\,|\,D_1=s_1,\cdots,D_{n-1}=s_{n-1}]}{P[B_n>x\,|\,A_n+B_n=u]}$$

$$=\frac{P[\bar{D}_{n-1}\le s_{n-1}-x\,|\,\bar{D}_1=s_1,\cdots,\bar{D}_{n-1}=s_{n-1}]}{P[A_n>x\,|\,A_n+B_n=u]}$$

が任意の $0\le s_1<\cdots\le s_{n-1}$, $u\ge 0$, $0\le x\le s_{n-1}$ に対して成り立てば (D_n) と $(\bar{D}_n)$ は確率的に等価である．A_n, B_n がともに定数の場合に，この式が成立することは容易にわかる．また，A_n, B_n がそれぞれパラメータ $\lambda_n=\lambda+c_n$，$\mu_n=\mu+c_n$（λ，μ は定数，$c_n\ge 0$）の指数分布にしたがう場合にも成立することが帰納的に示せる．到着過程は任意であるから，確定または指数サービスの直列型待ち行列では，何段であってもサーバーの順序は退去過程に影響しないことがわかる．最後に，$c_n=0$ のときのサービス率の最適配分について次の結果を得た．

定理 6 平均サービス時間の和が固定されている場合（$1/\lambda+1/\mu=$const.）は，$\lambda=\mu$ のとき各客の退去時点が convex ordering の順序で最も早くなる．

参考文献

[1] Foley, R. D. and S. Suresh. (1984) "Stochastically Minimizing the Makespan in Flow Shops." *Naval. Res. Logist. Quart.*, 31, 551-557.

[2] Foley, R. D. and S.Suresh.(1986) "Scheduling nnon-overlapping jobs and Two Stochastic Jobs in a Flow Shop." *Naval. Res. Logist. Quart.*, 33, 123-128.

[3] Kijima, M. and N. Makimoto.(1988) "On Interchangeability for Exponential Single Server Queues in Tandem." to appear in *J. Appl. Prob.*

[4] Kijima, M., N. Makimoto and H. Shirakawa. (1988) "Stochastic Minimization of the Makespan in Flow Shops with Identical Machines and Buffers of Arbitrary Size." to appear in *Opns. Res.*

[5] Lehtonen, T. (1986) "On the Ordering of Tandem Queues with Exponential Servers." *J. Appl. Prob.*, 23, 115-129.

[6] Pinedo, M. (1982) "Minimizing the Expected Makespan in Stochastic Flow Shop." *Opns. Res.*, 30, 148-162.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．