OR メモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた知恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい観点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，“新鮮に”，しかも，“コンパクトに”表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわしたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡潔に！　加筆訂正をお願いする場合があります)

三角座標上のランダムポイント

柳井　浩

正3角形の領域にランダムに点を播くという問題がある．正3角形を

$$x_1+x_2+x_3=1 \quad (1)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \quad (2)$$

という3つの数 (x_1, x_2, x_3) に対応する3角座標と考えれば，これらの条件を満たす‘ランダム・ポイント’を作る問題と考えられる．それほど難しい問題というわけではないのだが，間違えやすいので，注意を要する．

例をあげよう．3つの一様乱数

$$r_1=\mathrm{rnd}[0,1) \quad (3)$$

$$r_2=\mathrm{rnd}[0,1) \quad (4)$$

$$r_3=\mathrm{rnd}[0,1) \quad (5)$$

をとっても，これらがそのまま条件(1)を満たすとはかぎらない．そこで，

$$x_1=\frac{r_1}{r_1+r_2+r_3} \quad (6)$$

$$x_2=\frac{r_2}{r_1+r_2+r_3} \quad (7)$$

$$x_3=\frac{r_3}{r_1+r_2+r_3} \quad (8)$$

として見れば，これは標準化の計算であるし，($r_1=r_2=r_3=0$ というごく特別な場合を除けば)条件(1)および(2)も満たしている．式も対称な形をしているので，一様なランダム・ポイントが得られるかのようにも思える．

ところが，これでは一様にならないのである．(6)−(8)式の変換が3次元空間から3次元空間への変換ならば，Jacobian が一定でないことで，これが示せるのだが，(1)式という条件がついているので，ベクトル(x_1, x_2, x_3)は本質的には2次元のベクトルである．だから，Jacobian を用いるのも不具合である．——図解してみることにしよう．

図解が容易なように，次元を1つ下げて考えることに

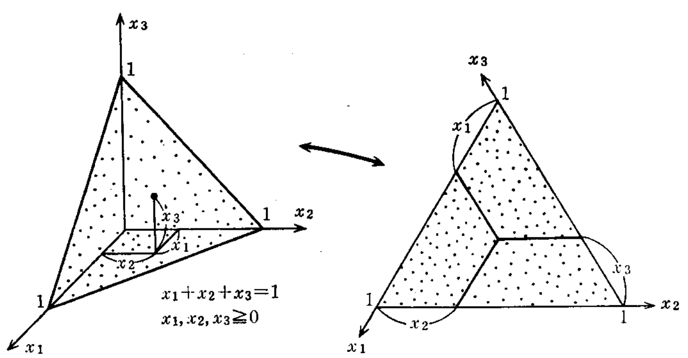

図１　３角座標

やない　ひろし　慶応義塾大学　理工学部
〒223 横浜市港北区日吉本町３―14―１

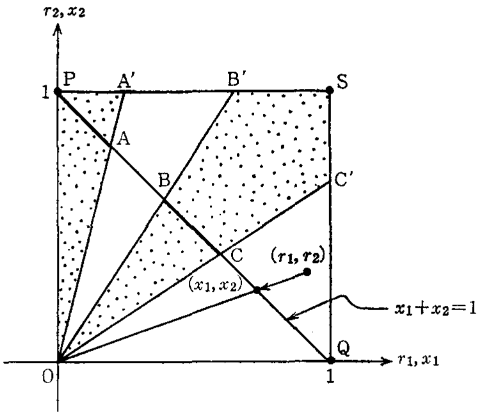

図 2 対角線への射影

する．つまり，

$$r_1=\mathrm{rnd}\,[0,1) \tag{3'}$$

$$r_2=\mathrm{rnd}\,[0,1) \qquad (4,)$$

として，

$$x_1=\frac{r_1}{r_1+r_2} \tag{6'}$$

$$x_2=\frac{r_2}{r_1+r_2} \tag{7'}$$

を定義すれば，

$$x_1+x_2=1 \tag{1'}$$

$$x_1,\ x_2\geqq 0 \tag{2'}$$

という条件を満たす．（もっとも，(1′)(2′)式を満たす乱数を作るだけなら，$x_1=r_1$，$x_2=1-r_1$ とすればよいので，(6′)(7′)のような面倒な手続きは不要であるのだが）

r_1, r_2 をヨコ軸およびタテ軸にとれば，点(r_1, r_2)の存在する範囲は図**2**に示すような単位正方形となる．そして，(1′)および(2′)式からもわかるように，点(x_1, x_2)は対角線ＰＱ上にある．また，(6′)，(7′)式から明らかなように，

$$x_1:x_2=r_1:r_2 \tag{9}$$

であるから，点(x_1, x_2)は原点０と点(r_1, r_2)を結ぶ直線上にある．したがって，(6′)および(7′)式は点(r_1, r_2)を原点０を中心として対角線ＰＱに射影するものだということになる．

いま対角線上，図のように３点Ａ，Ｂ，Ｃをとろう．ランダム・ポイント(r_1, r_2)は単位正方形上に一様に分布するから，△PA′Oと□OB′SC′上にあるランダム・ポイントの期待個数はこれらの図形の面積に比例する．そして，これらの図形内のランダム・ポイントはそれぞれ区間［ＰＡ］および［ＢＣ］に射影される．したがってこれらの区間内にある点(x_1, x_2)の期待個数も，これらの図形の面積に比例する．

ところで，点(x_1, x_2)が一様に分布しているのであれば，

$$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{BC}} \tag{10}$$

のとき，これらの区間に射影される点の期待個数は等しくなければならない．しかし，図２からも明らかなように，(10)式が成立しても△PA′Oと□OB′SC′の面積は等しくなるとは限らない．

こういうわけで，(6′)－(7′)式の変換では，一様なランダム・ポイントは得られないのである．３変数の場合も，全く同様の説明が可能である．もっとも，この変換が射影変換であることに注意すれば，一様性はきわめて危いということにも気づいはずなのだが．

さて，それではどのようにすれば条件(１)(２)を満たすようなランダム・ポイントが得られるのかというと，それが意外に簡単で，まず

$$\left.\begin{array}{l} r_1+r_2<1 \text{ のとき，} \\ \quad x_1=r_1 \\ \quad x_2=r_2 \end{array}\right\} \tag{11}$$

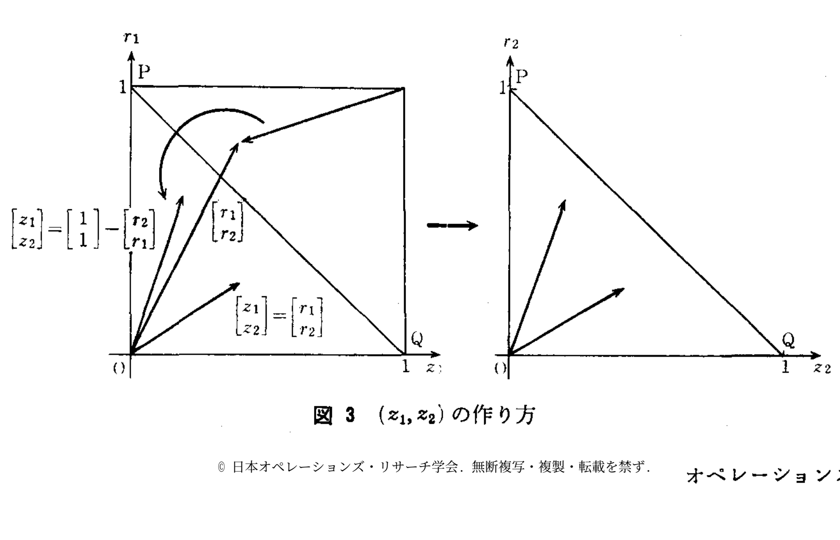

図 3 (z_1, z_2)の作り方

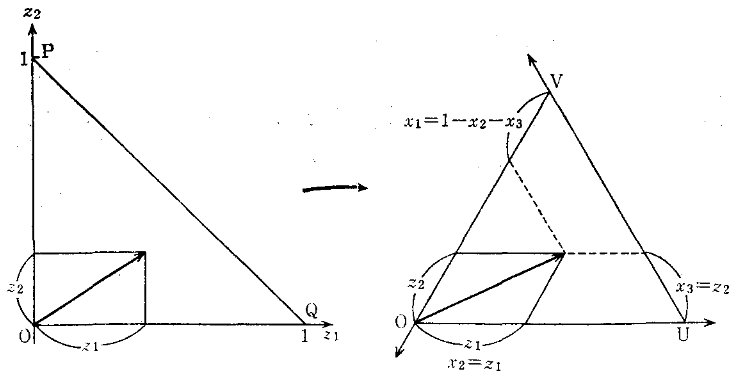

図 4 線形変換と三角座標

$$\left.\begin{array}{l} r_1+r_2\geqq 1 \text{ のとき,} \\ \quad x_1=1-r_2 \\ \quad x_2=1-r_1 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

とする．

点 (r_1, r_2) は単位正方形上に一様に分布する．(11), (12)式によれば，**図 3** において点 (r_1, r_2) が対角線PQの原点側にあるときには，これをそのまま (z_1, z_2) として採用，反対側にあるときには，これを対角線を軸として対称の点に移した点を (z_1, z_2) として採用することになる．すなわち，(11), (12)式はランダム・ポイントが一様に播かれた単位正方形を対角線で折り畳んだものになっているから，得られるものは，直角 2 等辺 3 角形 PＯQ上に一様に播かれたランダム・ポイントである．

次に，これを正 3 角形に線形変換して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OU}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OV}}$移せば，線形変換の Jacobian は一定であるから，正 3 角形上に播かれたランダム・ポイントが得られる．

この点の座標を，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OU}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OV}}$を基底として，表わせばやはり (z_1, z_2) となるが，この点の三角座標を(x_1, x_2, x_3)とすれば，

$$x_1=1-x_1-x_2$$
$$x_2=z_1$$
$$x_3=z_2$$

となる．こうして，条件(1), (2)を満たすランダム・ポイント(x_1, x_2, x_3)が得られる．

論文・事例研究の原稿募集！

ORの特徴は実践にあるといわれています．実際的な応用をぬきにした理論ということはORでは考えられません．本誌でも以前から会員の皆様からの事例研究の報告をお願いしてきましたが，まだ十分な成果をあげているとはいえません

「論文・事例研究」は企業，研究所，大学等で実際に行なった事例を論文としてまとめたものを広く会員の皆様に紹介することを目的として作られた欄です．この論文は 2 人のレフリーによって正式に審査されますが，マネジメント，行政，工学等の広い分野において適用対象の新しさ，適用方法の新しさ，適用範囲の広さ等が論理的，科学的に論じられたものでありますならば，積極的に採用する方針です．皆様のご投稿をお願い申し上げます．

投稿要領：学会原稿用紙36枚（25字×12行）以内（図・表を含む）（ワープロ可）投稿先は ＯＲ学会事務局ＯＲ誌編集委員会宛．

なお，原稿の他コピーを 2 部添付してください．

レフリー審査の結果，改訂をお願いしたり，採択されない場合があることをご了解ください．また，原稿は，採択・不採択にかかわらず，原本，コピーともお返しできません．

（ＯＲ誌編集委員会）