A Study on the Matching Theory and the Arc Routing Problem.

猿渡康文（東京理科大学　工学研究科経営工学専攻）指導教官　西田直矩教授

1. はじめに

近年，巡回路問題（Routing problems）が盛んに研究されている．これらの問題を考えるとき，その緩和問題として扱われるネットワーク問題などが重要な役割を果たしていることがわかる．本研究では，巡回路問題の中の容量制約付き枝巡回路問題（Capacitated Arc Routing Problem：CARP）に焦点を当てる．この問題は，NP困難な問題であり［4］，厳密解法は提案されていない．本研究では，CARPに対する巡回路構築アルゴリズムと呼ぶ厳密解法を提案する．さらに，その緩和問題として扱う一般グラフの重み最小マッチング問題（Minimum-Cost Perfect Matching Problem：MCPM）を扱う．MCPMは，線形計画問題として定式化され，単体法を利用した解法が提案されている［2］［3］．本研究では，ルート緩和マッチングと呼ぶ新しい概念を導入した解法を提案する．

2. MCPMに対するルート緩和アルゴリズム

2.1 ルート緩和マッチング

与えられたネットワーク上の任意の点を定め，ルートとする．ルート緩和マッチングとは，ルート点以外のすべての点にはマッチングの枝が必ず1本接続しているが，ルート点には1本以上のマッチングの枝が接続しているマッチングのことである（図1）．また，ルート点に接続するマッチングの枝の本数をルート次数と呼ぶ．この問題は，線形計画問題のルート点に関する制約式が1本だけ緩和された問題となっている．

2.2 ルート緩和マッチングの性質

ルート緩和マッチング問題は，ルート点に関する制約式を目的関数に導入したラグランジュ緩和問題で，そのラグランジュ乗数λをパラメータとしたパラメトリック線形計画問題（L_λ）とみることができる．このとき，目的関数を最小化するために，λをパラメトリックに減少させると，ルート次数は増加することはないという性質がある．さらに，L_λの目的関数値が元問題の最適値でないときは，λを減少させるとその目的関数値は厳密に増加する．またL_λの目的関数値が元問題の最適値と等しくなるのは，λを減少してもその目的関数値が変化しないときである．これは，ルート次数が1となったことを意味する．これらの性質より，λをパラメトリックに減少させ，ルート次数が1となった時点でアルゴリズムを終了させれば，最適解が得られることがわかる．λを減少させても，その目的関数値が元問題の最適解を下回っていれば，λの減少分はL_λの目的関数値の増加分を超えないことから，十分小さなλに対して，ルート次数は1となることが示される．

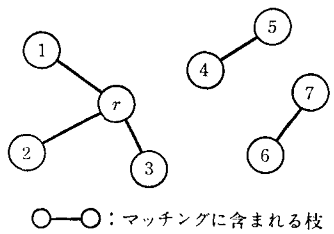

図1　ルート緩和マッチングの例　r：ルート点

これらの性質を利用するために，λをルート点に対する双対変数に対応させ，十分に大きな値を付加する．この値をパラメトリックに減少させて，ルート点を根とする交互道木（図2）を成長させる．λの値の減少によって，花アルゴリズム［3］と同じ，木の成長，花の縮約や花の拡張および，主変数の更新を行なう．主変数の更新では，ルート次数は2減る．この手順をルート次数が1になるまで繰り返すことで最適解を得ている．

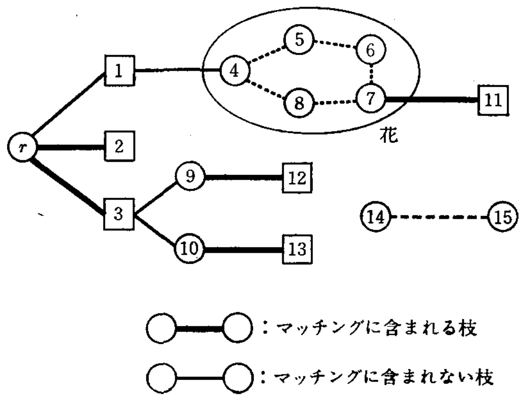

図 2　交互道木の例

本研究では，数値実験を行なってアルゴリズムの妥当性を確認した．

3. 巡回路構築アルゴリズム

3.1 問題の定義

CARPは，無向ネットワーク $G=(N,A,C)$ と枝上に付加された非負の需要が与えられたとき，トラックの積載容量W以下ですべての需要を満足するような閉路(cycle)の集合の中で，巡回にかかわる費用の合計が最小であるものを求める問題と定義する．ただし，Nは点の集合，$A(\subseteq N\times N)$は枝の集合である．またCは枝に付加された費用の行列である．

3.2 点複製下界値計算法

CARPに対して，最適解の下界値を与える解法がいくつか提案されている[1][4][5]．本研究では，分枝限定法を利用するのに有効な点複製下界値計算法を提案する．

点複製下界値計算法では，図3のようなネットワークの変換を行なっている．得られる修正ネットワーク$G_1=(N_1,A_1,C_1)$では，N_1は，Nの点のコピー点の集合(ファミリー)の集合と，総需要QとWから得られる必要な最小のトラックの集合N^Sからなっている．A_1は，N_1の完全グラフからなる枝の集合で，各々のファミリー間を結ぶ枝を需要のある枝と呼ぶ．さらにC_1は，2点が同じファミリーの点であれば0，N^Sの点同士を結ぶか需要のある枝ならば∞，さらに別々のファミリーの点であれば，G上で計算した最短路の費用とする．このG_1上でMCPMを解き，その最適値にG上の需要のある枝の費用の合計を加えた点複製下界値に対して，次の定理が成り立つ．

定理 1　G_1から得られる点複製下界値は，ネットワークG上のCARPの最適値の下界値を与える．

修正ネットワークG_1では，需要のある枝の組合せを禁止することが可能となった．また，数値実験によって点複製下界値が[1][4][5]で与えられる下界値より優れていることがわかった．

3.3 巡回路構築アルゴリズム

巡回路構築アルゴリズムは，分枝限定法における分枝変数を巡回路の一部として取り入れ，路を生成し，路を巡回路に成長させていく方法を基礎としている．このとき，点複製下界値計算法によって得られた修正ネットワーク上の，需要のある枝と需要のない枝が交互に存在す

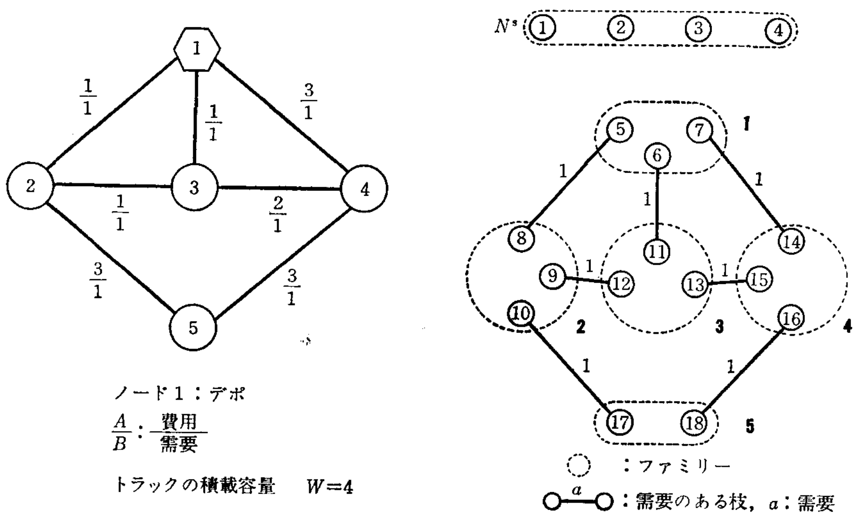

図 3　ネットワークの変換

る路を交互道と呼ぶ．交互道でその両端がデポのコピー点の集合であるN^Sに含まれるとき，この交互道をポストマン路と呼ぶ．さらに，すべての需要を満足するポストマン路の集合をポストマン巡回路と呼ぶ(図4)．

巡回路構築アルゴリズムでは，点複製下界値計算法から得られた枝集合から枝を1本選び，交互道の一部とする．次々に枝を選択して，交互道をポストマン路に成長させる．このとき，現在のトラック台数ですべての需要が満足できるかを調べる．さらに，ポストマン路をポストマン巡回路に成長させていくという方法をとっている．

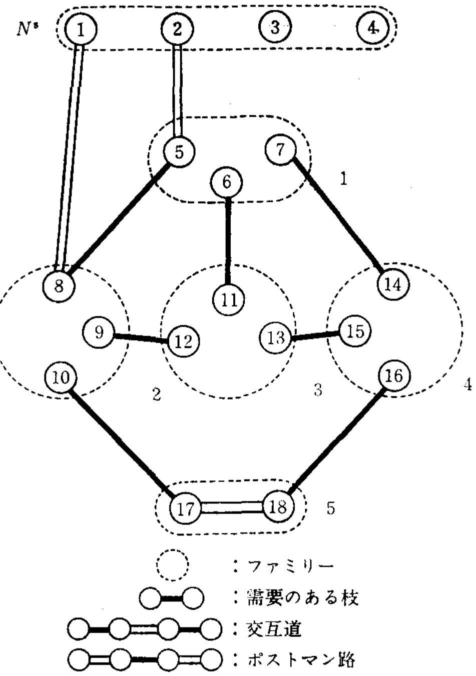

図4　交互道とポストマン路の例

参考文献

[1] A. Assad, W. Pearn and B. Golden, "The Capacitated Chinese Postman Problem: Lower Bounds and Solvable Cases," W. P. MS / S 85-032 Mang. Science and Statistics, Univ. of Maryland 1985.

[2] U. Derigs, "A Shortest Augmenting Path Method for Solving Minimal Perfect Matching Problems," *Networks*, 11, 379-390 1981.

[3] J. Edmonds and E. Johnson, "Matching, Euler Tour and the Chinese Postman," *Math. Prog*. 5, 88-124 1973.

[4] B. Golden and R. Wong, "Capacitated Arc Routing Problems," *Networks*, 11, 305-315 1981.

[5] W. Pearn, "New Lower Bounds for the Capacitated Arc Routing Problem," *Networks*, 18, 181-191 1988.

「論文・研究レポート」の原稿募集

ＯＲの実践をわかりやすい事例を中心に紹介してほしいという会員からの要望がある一方で，ＯＲ理論の展開あるいは手法の開発など学術的な研究報告も忘れないでという注文も根強くあります．

本誌では「論文・研究レポート」という審査論文欄を設けております．この論文・研究レポートでは，特に，経営の実践に役立つ理論研究，手法あるいはシステムの開発，概念フレームおよび方法論等を扱った研究のご寄稿を歓迎いたします．

投稿要領：学会原稿用紙36枚（25字×12行）以内（図表を含む）（ワープロ可）投稿先はＯＲ学会事務局ＯＲ誌編集委員会宛．

なお原稿のコピーを2部添付してください．

レフリー審査の結果，改訂をお願いしたり，採択されない場合があることをご了解ください．また，原稿は，採択・不採択にかかわらず，原本，コピーともお返しできません．

（ＯＲ誌編集委員会）