社会選択ルールの実行可能性とゲーム理論

渡辺　隆裕

1. はじめに

われわれが多数決という決め方を問題とする場合，多数の意思によって集団の決定を行なうことの是非を論じることが普通であり，「多数決が多数の意思を反映している」ということに対しては疑いはしない．だが決定過程において，全員が偽りの表明をしているとしたら，多数決が多数の意思を反映しているという前提自身が崩れることになる．

決められた形にしたがって自分の意思を表明し，あらかじめ決められたルールにしたがって決定を行なうような「決定ルール」についての研究が，Arrow を先駆者として今世紀半ばより目ざましい発展をとげてきた.「何を望ましい社会選択と考えるべきか」

しかしこのような決定ルールの研究においては，各個人は皆正直に自分の意思を表明するものと仮定し，分析されていた．なぜなら個人の行動を扱うのに適切な理論的枠組みが存在しなかったからである．しかし本来は各個人は必ずしも正直に自分の意思を表明するとは限らない．したがって「ある決定ルールにおいて，個人は自分の意思を正直に表明するだろうか？」ということはかねてから問題となってきた．

データ理論という人間行動を扱う理論が登場し，発展をとげるにしたがい，この問題を扱う道具だても整備されてきた．そして Farquarson[4], Vickrey[10] の先駆的な取り組みを経て，Gibbard[5], Satterthwaite[1] Hurwicz[6] がこの問いに対し基本的なモデルを与え，同時にある種の不可能性を証明した．彼らのモデルは一般的な形でまとめられて，社会選択理論の一分野として重要なトピックとなった．これが本小論で扱う決定ルールの「実行可能性問題(implementation problem)」である．

わたなべ　たかひろ　東京工業大学 工学部 社会工学科
〒152 目黒区大岡山2―12―1

2. 戦略的操作の例

個人が自己に有利なように，本来の意思を偽って表明することを戦略的操作という．ここではまずこの戦略的操作の例を見てみよう．

例1）順位評点法（Borda 方式）における例

順位評点法とは，代替案が k 個の時に，各個人が最も好むものから順番に $k-1$ 点…0点と点数をつけてゆき，各代替案の合計点数が最も高いものを当選としようという投票方法である．

さて，いまある大学のサークルで自分たちのマドンナを決める投票が行なわれるとしよう．サークルの人数は20人，マドンナ候補は a，b，c，d の4人にしぼられ，投票は順位評点法で行なうことになったとする．

マドンナ選びに熱心なA君．このA君の代替案（マドンナ候補）に対する選好（マドンナを好きな順序）は a，b，c，d の順序であったとしよう．

さてA君はいろいろと聞き回って，この代替案に対してA君以外の19人がどの案に何点入れるかの情報を得たとしよう．

A君以外の19人の投票結果：

a…30点　b…32点　c…27点　d…25点

さてここでA君が正直に投票したとすると

A君の正直な投票：

a…3点　b…2点　c…1点　d…0点

正直な投票の結果：

a…33点　b…34点　c…28点　d…25点

よってbがマドンナとなる．

しかしここでA君が偽って投票したとすると，

A君の選好を偽った投票：

a…3点　b…0点　c…2点　d…1点

偽った投票の結果：

a…33点　b…32点　c…29点　d…26点

よってaがマドンナとなる．

この場合，実際に選ばれた結果は，A君の自分を有利

にしようとする行動のために，本来選ばれるべき結果と異なっている．

例2）競売の例

Xさんが自分では100ドルの価値を持つ品物を競売にかけるとする．競売は自分がその品物を買い取る値段を紙に書いて，いちばん高い値の人に（その値で）落札する方法をとる．いま，Aさんは320ドル，Bさんは300ドルでこの品物を買っても良いと考えているとしよう．ここで各自は実際に売買された額と自分の持っている価値との差額を利益と考えているとする．また売買しなかった人の利益は0ドルと考える．買い手は安く入札すると，落札したときの利益は高いがそのぶん落札できるチャンスは減る．

ここでAさんは280ドル以上で入札する人はいないとみて280ドルと入札した．一方Bさんは290ドルと入札した．結果としてはBさんが290ドルで落札する．

この場合，選択ルールを設計するのは，売り手のXさんであり，xさんにとって望ましいのはより高く品物が売れることである．しかしここで「社会的に望ましい」という状態として，全員の「利益の合計」を評価としてみよう．

上述の例では各個人の利益は

xさん：290ドル－100ドル＝90ドル

Aさん：0　ドル

Bさん：300ドル－290ドル＝10ドル

よって利益の合計は200ドルとなる．

利益の合計を最大にする取り引きは，xさんとAさんがtドル（$300 \leqq t \leqq 320$）で品物を取り引きした時である．利益の合計は

xさん：tドル－100ドル

Aさん：320ドル－tドル

Bさん：0ドル

で220ドルとなる．

このような取り引きを社会的に望ましい状態と考えると，望ましい取り引きとは

「品物に対して一番高い価値を持った人が，買い手の品物に対する二番目に高い価値と一番高い価値との間の価格で取り引きを行なう」……（＊）

ような代替案が選択されることである．上述の例はこれが満たされていない．

3.　実行可能性問題

以上のような決定ルールの戦略的操作に関するモデルは，1つにまとめることができる．以下にそれを示す．

まずモデルを構成する要因は，個人と代替案である．個人を $N=\{1,\cdots,n\}$ 代替案を $A=\{a,b,c,\cdots\}$ で表わす．ここで代替案とは，最終的に決定するすべての異なった状態を表わす．例1ではマドンナが代替案である．例2では（落札者，落札価格）の組が代替案となる．たとえば，（Aさん，290ドル）などが1つの代替案である．

個人はこの代替案に関して好みの順序を持っていると考えられる．この順序を選好と呼ぶ．個人iの取り得る選好の集合を$\boldsymbol{R}_i$としよう．例1ではa,b,c,d，b,c,a,dなどが$\boldsymbol{R}_i$の1つの要素となる．数学的に定義するならば$\boldsymbol{R}_i$はA上の二項関係$A\times A$の部分集合の集合であり，どのような部分集合になるかはモデルによって定められる．ここで$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\times\cdots\times\boldsymbol{R}_n$とする．個人$i$の選好を$R^i$とし$R=(R_1\cdots R_n)$とする．ここで$(a,b)\in R_i$ならば$i$は$a$を$b$より好むを表わすと考える[2)]．

n人の本来の選好の組Rから望ましい代替案を選択するルールをここでは「社会的選択ルール」と呼ぼう．例1では，順位評点法で選ぼうというのが全体の意思であり，これが社会的選択ルールであると考えられる．例2では，(＊)を満たす代替案の集合を選択するルールと考えられる．このように，社会的選択ルールというものを代替案を1つ選ぶのか，代替案の集合を選ぶのかを考えることで問題が変わるが，ここでは，代替案の集合を選ぶものとして考える．社会的選択ルールを$f:\boldsymbol{R}\to\mathscr{P}(A)$として定義する．（ここで$\mathscr{P}(A)$は$A$のべき集合を表わす）

「実際の決定ルール」は，個人の意思を表明する部分と，そこから代替案を選択するルールの2つからなる．たとえば例1では，各マドンナに対する点数づけが意思表明の部分で，最高得点の候補を選ぶというのが選択ルールとなる．例2では，入札が意思表明の部分で，最高値の人とその値段で取り引きをするというのが選択ルールとなる．

この「実際の決定ルール」は1つの代替案を選ぶものと考える．各個人がその決定ルールにおいて可能な意思表明の集合をS，個人iの意思表明をs_iで表わす．n人の表明された意思から1つの代替案を選択するルールを$\pi:S^n\to A$とする．「実際の決定ルール」を与えるとい

うことは(S,π)を与えることであるが，πを与えることが同時に定義域であるSをも与えることになるので「実際の決定ルール」を与えるとはπを与えることであると考える．πの集合を$\prod$で表わす．

個人が自分の選好，他人の選好，与えられた決定ルールπをもとにいかに行動し意思表明を行なうかを「個人の行動」と呼ぼう．「個人の行動」は n 人の選好と決定ルールが決まるとn人の意思表明の組の集合が決まってくる関数と考えられる．

個人の行動を $E:\prod\times\boldsymbol{R}\to\mathscr{P}(S^n)$ とする．

個人の行動Eとしてどのような概念を用いるべきかがまさにゲーム理論の興味に相当している点だといえよう．各個人は自分に有利な結果を導くように表明を行なうので意思表明はゲーム理論の個人の戦略(strategy)である．よって以下意思表明と同義で戦略という言葉を用いることもある．

代替案A，個人の集合N，個人のもつ選好の集合の積$\boldsymbol{R}$，社会的選択ルールf，個人の行動Eが与えられた時に，各個人が$\boldsymbol{R}_i$の中のどんな選好R_iをもったとしても，個人がEに従った行動をした結果選ばれる代替案が，fの選ぶ代替案と一致するような実際の決定ルールπが存在するかどうかをその社会的選択ルールfの実行可能性と呼ぶ．このときのπは社会的選択ルールと同じでなくてもよい．例1で言えば社会的選択ルールとして順位評点法を考えたとしても，まったく別の実際の決定ルールを用いて順位評点法と同じ結果を導き出してもよいわけだ．

定義 3.1（fの実行可能性）

$[N,\ A,\ \boldsymbol{R},\ E]$ が与えられているとする．

このときfに対してある$\pi\in\prod$ が存在して

$\forall R\in\boldsymbol{R}\quad \pi(E(\pi,R))\in f(R)$

を満たすとき，このfは実行可能であるという．

実行可能性問題を図にすると**図1**のようになる．実行可能性問題とは与えられたfの実行可能性を問うばかりではなく，どのような性質を持つfが実行可能かを探る問題も含む．次にこのEとして支配戦略均衡を用いた場合について言及する．

4. 支配戦略均衡における実行可能性

与えられた決定ルールπにおいて，ある選好R_iを持った個人iにとって，他人がどんな意思表明をしたとしても自分が不利にはならないような表明があれば，そのような表明をiは行なうだろう．このような他人の戦略

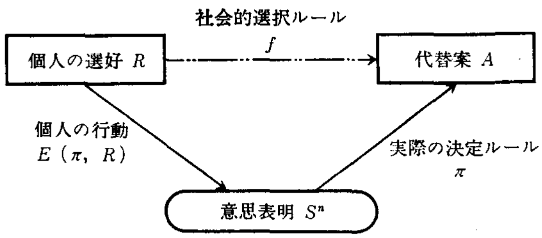

図 1 実行可能性問題

には依存せず自分を常に有利にするような戦略を，iの(そのπ, R_iでの)支配戦略 (dominant strategy) と呼ぶ．

定義 4.1 支配戦略

(π, R_iが与えられたとき) 以下を満たす個人 i の戦略s_iを個人iの$(\pi,\ R)$における支配戦略と呼ぶ．

$\forall s_{-i}\in S^{n-1}\quad \forall s'_i\in S$

$(\pi(s_i, s_{-i}),\ \pi(s'_i, s_{-i}))\in R_i$

ここで s_{-i} は $s_{-i}=(s_1\cdots s_{i-1}, s_{i+1}\cdots s_n)$ を表わす．

この概念を個人の行動として考え支配戦略的均衡概念Eを定義しよう．

定義 4.2 支配戦略均衡概念

次の個人の行動Eを支配戦略均衡概念と呼ぶ．

$E(\pi,R)=\{(s_1\cdots s_n)\,|\,\forall i\in N,$

s_iは(π,R)における支配戦略$\}$

この支配戦略均衡概念において実行可能となる社会的選択ルールはどんなものがあるだろうか？　ここで例1のような投票の状況を考えよう．すなわち社会選択ルールは（代替案の集合ではなく）1つの代替案を選ぶものとし，次に個人はa,b,c,d，a,b,d,cなどあらゆる順序で代替案を好む可能性があるとしよう．代替案に無差別なものがあっても良いとする．(すなわち$\boldsymbol{R}_i$をA上の弱順序集合とする)

このとき支配戦略均衡概念において実行可能な社会的選択ルールは独裁的なものしかない．

定理 4.1 Gibbard-Satterthwaite の定理

$|N|\geq 2\quad |A|\geq 3$　とする．Eは支配戦略的均衡概念，任意のiについて$\boldsymbol{R}_i$はA上の弱順序集合とする．このような$[N,\ A,\ \boldsymbol{R},\ E]$において$f$を単集合を選ぶ社会的選択ルール ($\forall R\in\boldsymbol{R}\quad |f(R)|=1$) とし，どの代替案も少なくとも1つの選好で選ばれることがあるとすると，このようなfが実行可能である必要十分条件はfが独裁的であることである．

ここで独裁的な社会的選択ルールとはある個人（独裁者）が存在して，彼の一番好むものが他人の選好に関わ

らず必ず選ばれるようなルールを言う．もちろん民主的な決定ルールではこのようなことは望ましくない．

Gibbard[5]，Satterthwaite[9]の発表したこの定理は Arrow の不可能性定理に続く社会選択論の第2の不可能性定理といわれ，その後の実行可能性問題の基本定理となっている．この定理と Arrow の不可能性定理は互いに決定ルールの「単調性」という性質と深く関連しており，Dasgupta, Hammond and Maskin[3]，Moulin[8]などにそれがきれいな形でまとめられている．

さて，このような不可能性に対して，可能性を得るために次のようなことが想定される．

① fの選ぶものを複数とする

② 個人の行動Eを違うものにする

③ πの選ぶものを複数とする

④ $\boldsymbol{R}$を制約する

ここで④について説明する．例1のような投票のモデルでは $\boldsymbol{R}_i$ としてあらゆる順序を取り得るとしておかしくなかった．しかしこの仮定はモデルによっては当てはまらない．競売の例によってこれを説明しよう．

例2の競売の場合「各自は実際に売買された額と自分の持っている価値との差額を利益と考えている．売買が行なわれなかった場合，利益は0ドルと考えている」という仮定から

(1) Aさん以外の人が落札する案はすべて（Aさん，320ドル）という案と無差別である．

(2) Aさんが落札する2つの案（Aさん，yドル）と（Aさん，zドル）ではyとzの小さい方をAさんは好む．

ということが導き出される．例1のような投票ではマドンナ a, b, c, d に対してあらゆる順序をとるとしてもおかしくはないが，例2のような競売では個人が品物に対して持つ価値はどのような価値を持っても（Aさん，300ドル），（Aさん，310ドル）のような代替案に関しては，Aさんならば前者の方を好むであろうし，Bさんならば無差別であろうというわけだ．このように投票以外のモデルでは $\boldsymbol{R}_i$ としてはA上の弱順序集合をすべてとりうるわけではない．よってこの場合は支配戦略が存在する競売ルールがある可能性がある．

Vickrey[10]の提唱した second pricing rule はこれに相当する．second pricing rule とは最高値を入札した人に，2番目の高値で落札するルールである．

例2でこのルールを適用するとどうなるだろうか．Aさんにとって自分の入札価格は落札価格に影響をおよぼさない．よってできるだけ高い価格で入札した方がよい．ただし330ドルのように自分が品物に対して持つ価値である320ドルをこえて入札すると，2番目の人が325ドルでAさんに落札したときに，Aさんの利得は -5 ドルのようにマイナスとなる．よってAさんは正直に320ドルを入札することが他人の入札に関わらず有利な入札となる．同様にBさんは300ドルで入札し，結果はAさんに300ドルで落札する．

このように second pricing rule では常に自分の持っている品物の価値を入札することが支配戦略になり，社会的選択ルール(*)を支配戦略均衡で実行可能にしている[3]．second pricing rule を応用した有名な例として，公共財と私有財の交換市場において，全員の効用の和を最大にする公共財を選択する社会的選択ルールを実行可能にする Groves メカニズムがある．

5. 実行可能性問題の現状と問題点

以上述べてきた結果は1970年代に得られた結果であり，「ゲーム理論のフロンティア」という目的からは少し離れてしまった．現在の研究の方向としては

① 「個人の行動」の所に支配戦略以外のゲーム理論のさまざまな均衡解（Nash 均衡，完全 Nash 均衡など）を適用してみる．

② 投票型だけではなくさまざまな「状況」のモデルに適用してみる．（上述の例では競売等が具体的な「状況」に当たる．この他に交換市場，契約問題など）

③ さまざまな社会的選択ルールに対して適用してみる．またここにゲーム理論で得られたやや規範的な解を考えてみる．(core, Shapley 値など)

などが組み合されて行なわれているといえよう．

しかしながら，実行可能性問題というすでに定式化した問題について，形式的にゲーム理論の解を当てはめるのは非常に問題がある．最後に，これについて考えてみる．

まず例1を思いだしてみよう．ここでA君は全員の選好を正確に把握したからこそ戦略的操作をすることができた．しかし一般的には1人だけが全員の選好情報を知っているという仮定はおかしい．（しかもA君以外の人間は正直に投票している）

そこで全員がお互いの選好を完全に知っているという状況を想定してみよう．この時には非協力ゲームの代表

的な均衡解であるNash均衡を適用して考えることができる．しかしここで「各個人の選好が完全にわかっているという社会において，各個人の意思をわざわざ表明させる必要があるのか」という矛盾が生じる．このような状況は，ゲーム理論において人間行動を探るためには必要な状況であるが，実行可能性という問題を語るためには矛盾した想定である．

そう考えると，支配戦略均衡による実行可能性は確かに意味がある．しかしながら，支配戦略均衡はかなり強い制約であり，不可能な結果が生み出される可能性が大きい．支配戦略均衡は「他人がどんな表明をしても」という状況を想定しており，これによって保証される実行可能性は十分であるが，必ずしも必要ではない．

このように考えた場合，実行可能性問題はいったい何が「問題」なのだろうか．実行可能性問題の研究は数多い反面，このような問題について取り組んでいる論文は少ないと思う．私の問題意識とは少々異なるが，Brams and Fishburn［2］，Blin and Satterthwaite［1］，Matsusima［7］の論文は，このような問題を考える上で参考となる研究である．

参考文献

［1］ Blin, J. and Satterthwaite, M.: "On Preferences, Beliefs, and Manipulation within Voting Situations", *Econometrica*, 45, (1977), 881-887.

［2］ Brams, S., J., and Fishburn, P., C: Approval Voting, Birkhauser, (1982).

［3］ Dasgurta, P., Hammond, P., and Maskin, E.: "The Implementation of Social Choice Rules: Some general rasults on incentive compatibility", *Review of Economic Studies*, 46, (1979), 185-216.

［4］ Farqurason, R.: *Theory of Voting*, Yale University Press (1969).

［5］ Gibbard, A.: "Manipulation of Voting Schemes: A general result", *Econometrica*, 41, (1973), 587-601.

［6］ Hurwicz, L.: "On Informationary Decentralized Systems", in: Mcguire and Radner (eds.), *Decision and Organaization*, North-Holland, (1973).

［7］ Matsusima, H.: "A New Approach to Implementation Problem", *Journal of Economic Theory*, 45, (1988), 128-144.

［8］ Moulin, H.: *The Strategy of Social Choice*, North-Holland (1983).

［9］ Satterthwaite, M., A.: "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: existance and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory*, 10, (1975), 187-217.

［10］ Vickrey, W.: "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, 16, (1961), 8-37.

注

（注1） Gibbard, Satterthwaiteが全く独立して発表した定理として知られるこの論文において，Satterthwaiteの論文は学位論文であり入手できないため，私自身は参照していない．後の彼の［11］を参照した．

（注2） たとえば a,b,c,d という選好は

$R_i=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(b,d),(a,d)\}$ という R_i によって表わされる．

（注3） この場合 f の選ぶものは複数であり，定理4.1の仮定と①，④の2つの部分が緩和されている．しかし f 自身を「いちばん高い価値を持った人に，2番目に高い価値で売買する」というsecond pricing ruleを考えた場合，この f はやはり実行可能であり，この場合は④のみの緩和であることがわかる．

〔オペレーションズ・リサーチ誌今後の特集予定〕

12月号　次世代生産システム
1月号　企業のリストラクチュアリング
2月号　シミュレーション（仮題）
3月号　通信とOR（仮題）
4月号　土木・建築のOR（仮題）
5月号　物流とOR（仮題）
6月号　AI・OR・DSS（仮題）