

非ガウス型時系列モデリング

北川 源四郎

1. まえがき

時間と共に不規則に変動する対象の観測値の系列が時系列である。航空機や船舶の振動、工業生産プロセス、地震や気象などの自然現象、経済活動などの観測によって得られるデータの多くはこのような時系列と考えられる。このような一見不規則な変動の中に確率的な構造を見いだすことにより、対象の理解を深めると共に、将来の動きの予測や制御を実現しようとするのが時系列解析の目的である。

時系列解析では1970年代頃から時系列モデルにもとづく時間領域での研究が活発に行なわれてきた。線形定常な時系列に関しては自己回帰モデルや自己回帰移動平均モデルにもとづく解析、予測、制御の方法が確立しており(赤池, 中川1972)、その後の研究は、非定常あるいは非線形な時系列の解析が対象となってきた。

非定常モデルとしてはBox-JenkinsのARIMAモデルがよく知られているが、このモデルは平均値がドリフトするような特殊な非定常性を表現したモデルにすぎない。1979年になると赤池がベイズモデルの実用化に成功し、これを契機に大規模なパラメータを用いて経済時系列の季節調整法、地球潮汐の解析法、コーホート分析などさまざまなモデルが実用化された(Akaike 1979)。

ところで、時系列 y_n のモデルについて考えてみると、ベイズモデルの多くが未知の状態 x_n を用いて、線形ガウス型の状態空間モデル

$$\begin{aligned}x_n &= Fx_{n-1} + Gv_n \\ y_n &= Hx_n + w_n,\end{aligned}\quad (1)$$

の形で表現できることがわかる(Harrison and Stevens 1976, Anderson and Moore 1979)。この状態空間表現は時系列モデルとしてきわめて自然であることと、カルマンフィルタなどの効率的な計算法を利用できること

きたがわ げんしろう 文部省統計数理研究所

〒106 港区南麻布4-6-7

から、時系列モデルの構成が自在に行なえるようになった。典型的な応用例としては季節調整、時変スペクトルの推定、信号抽出などがある。

このように、状態空間表現にもとづく時系列のモデリングはきわめて便利であったが問題がないわけではなかった。たとえば、確率構造が時間と共に変化する非定常時系列ではその変化の仕方にはゆっくりした滑らかな変化と急激な変化が混在することが多い。この場合、通常の線形ガウス型のモデルでは急激な変化をうまく検出することはむずかしいので、このような状況を適切に表現する複雑なモデルを構成することが必要となる。また、データにしばしば存在する異常値の影響を除去するためには異常値の自動検出かロバスト推定の導入が必要となる。さらに、非線形性を含むシステムや離散過程なども通常の状態空間モデルではうまく処理できない例である。

これらの問題を解決する方策を考えてみよう。確率構造の変化はパラメータの変化に対応するが、システム雑音 v_n に裾の重い分布を想定すると滑らかな変化とごく小さな確率で生じる急激な変化の両方をうまく表現できる。同様に、異常値の処理のためにも観測雑音 w_n に裾の重い分布を用いれば良いことがわかる。また、システムの非線形性が存在すると必然的に状態の分布は非ガウスとなる。このようにさまざまな問題を解決するためには非ガウス性を取り扱うことが必須となる。以下では非ガウス型状態空間モデルを利用した時系列モデルの構成法を紹介する。

2. 非ガウス型状態空間モデルと状態推定

次のような条件付き分布で表わされた非ガウス型状態空間モデルを考えることにする。

$$\begin{aligned}x_n &\sim Q(\cdot | x_{n-1}) \\ y_n &\sim R(\cdot | x_n),\end{aligned}\quad (2)$$

ただし、 y_n は観測値、 x_n は未知の状態ベクトルとす

る。明らかに、この非ガウス型モデルは通常の線形ガウス型状態空間モデルの拡張となっており、よく知られた時系列モデルだけではなく非線形、非ガウス、離散モデルなども統一的に取り扱うことができる。初期ベクトル x_0 は、ある分布 $p(x_0|Y_0)$ にしたがうものとする。また、観測値および状態の集合を $Y_m \equiv \{y_1, \dots, y_m\}$ および $X_m \equiv \{x_1, \dots, x_m\}$ と書くことにする。このとき、状態推定の問題は $p(x_n|Y_m)$ 、すなわち情報 Y_m のもとで状態 x_n の条件つき分布を求める問題である。たとえば、トレンドの推定のためにはトレンドを状態 x_n の一成分とすれば良いように、時系列解析の多くの問題が状態推定の問題として解くことができる。特に、 $n > m$, $n = m$, $n < m$ のとき、これらは予測、フィルタ、平滑化と呼んで区別される。

Kitagawa(1987)には、この非ガウス型状態空間モデルに対しても、よく知られたカルマンフィルタと同様に予測分布、フィルタ分布および平滑化分布が以下のように逐次的に得られることが示されている。

一期先予測：

$$p(x_n|Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1})dx_{n-1} \quad (3)$$

フィルタ：

$$p(x_n|Y_n) = \frac{p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})}{p(y_n|Y_{n-1})} \quad (4)$$

ただし $p(y_n|Y_{n-1})$ は $\int p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})dx_n$ によって求められる。

平滑化：

$$p(x_n|Y_N) = p(x_n|Y_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_{n+1}|Y_N)p(x_{n+1}|x_n)}{p(x_{n+1}|Y_n)} dx_{n+1} \quad (5)$$

3. 非ガウス型モデルの同定

われわれの考える非ガウス型モデルには、通常いくつかの未知パラメータが含まれる。パラメータ推定の統一かつ優れた方法として最尤法が知られているが、上記の公式を利用すると次のように簡単に対数尤度を求めることができる。

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log p(y_1, \dots, y_N) \\ &= \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $p(y_n|Y_{n-1})$ は(4)式で求められたものである。したがって、この $l(\theta)$ を目的関数とすることにより、数値的最適化によって未知パラメータの最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めることができる。これにより、原理的には状態空間表

現をもつ時系列モデルの一般的な推定法が与えられたことになる。

また、いくつかの時系列モデルが考えられる場合には、それぞれのモデルの統計的あてはまりの悪さを

$$AIC = -2 \max l(\hat{\theta}) + 2(\text{パラメータ数}). \quad (7)$$

によって評価することができる。したがって、AICの小さな値をとるモデルを採用することによって、客観的なモデル選択が実現できる。

4. 状態推定公式の数値的実現

以上のように非ガウス型のフィルタを用いることにより、広範な時系列モデルを統一的に取り扱うことができるようになるが、フィルタの公式を実際どのように計算するかが残された問題である。

モデルが線形ガウス型の場合には、条件付き分布 $p(x_n|Y_{n-1})$, $p(x_n|Y_n)$ および $p(x_n|Y_N)$ はすべて正規分布となるので平均と共分散行列だけを考慮すればよく、(4)–(6)式は通常のカルマンフィルタおよび固定区間スムーザと等価になる。しかし、一般には状態の条件付き分布 $p(x_n|Y_m)$ は非ガウス分布となるのでこのような方法は使えない。これらを何らかのガウス分布で近似する方法としては拡張カルマンフィルタや2次フィルタなどがよく知られているがいろいろな欠点が知られている。

本稿では、これらの分布を直接、数値的に近似する方法を紹介する。近似の方法としては階段関数近似、折れ線近似、より一般にはスプライン近似などが考えられる。このとき、上式は数値計算を利用して実現することができる。この方法は大規模な数値計算を必要とするので現実的ではないと考えられてきたようであるが、計算機の高速化によって、現在では少なくとも低次元の問題に関しては、きわめて有力な方法である(Kitagawa 1987)。

また、数値計算の適用が現実的でないような高次元の問題に対してはガウス分布の混合で近似するガウスとフィルタを利用する方法がある(Anderson and Moore 1979)。この場合、各密度関数を

$$p(x_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_{in} \varphi_i(x_n) \quad (8)$$

と正規分布 φ_i の和で近似すると、予測分布およびフィルタ分布もガウス分布の和で表現できることがわかる。したがって、それぞれのガウス分布の平均、共分散および重み係数だけを求めれば良いことになるが、都合の良いことにこれらは通常のカルマンフィルタを利用して求めることができる。

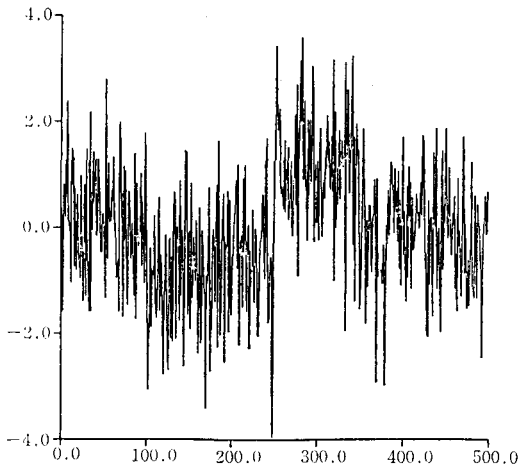


図1 平均値関数がステップ状の変化を示すデータ y_n (Kitagawa 1987)

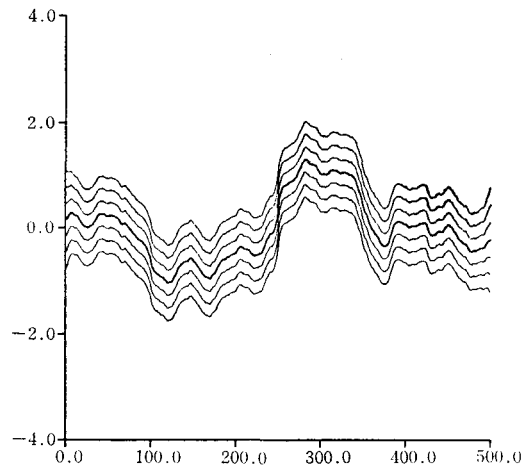


図2 ガウスモデルによって求めたトレンド t_n の事後分布 (Kitagawa 1987)

5. 数値例

5.1 トレンドの推定

図1に示したデータのトレンド推定のために、次のような単純な状態空間モデルを考えることにする。

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + v_n \\ y_n &= t_n + w_n. \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、観測雑音 w_n に対してはガウス分布を仮定するが、システム雑音 v_n については、ガウス分布の場合と、ガウス分布より裾の重いコーシー分布

$$q(v_n) = \frac{1}{\pi(\tau^2 + v_n^2)},$$

の場合の2通りを考え比較してみることにする。

ガウスモデルの場合、最尤法で推定されたモデルの AIC は 1503.03 であった。図2には、このモデルによって得られた t_n の事後分布の平均および $\pm 1, 2, 3$ (標準偏差) が示してある。この通常の推定法で得られたトレンドはうねりが生じており、また図1に明らかに見られるジャンプをうまく表現できていない。

一方、コーシー分布を用いたモデルの場合は、 $AIC = 1488.50$ となる。図3にはトレンド t_n の事後分布が図示してある。図2と図3を比較すると、コーシー分布を用いた推定値の方がはるかに滑らかな推定値が得られ、しかもジャンプも自動的に検出できることがわかる。 AIC の値からみても、この場合コーシーモデルの方があてはまりがよいことがわかる。

5.2 非ガウス型季節調整法

前項のトレンド推定の方法は経済時系列の季節調整に

拡張することができる。Kitagawa and Gersch (1984) には状態空間表現を利用して季節要因を含む時系列を
(時系列) = (トレンド) + (季節成分) + (ノイズ)

と分解できることが示されている。ただし、従来はシステム雑音 v_n および w_n はガウス分布と仮定してきたが、これらを非ガウス分布とすると今までとまったく異なる結果が得られる(Kitagawa 1989)。

図4には日本の民間企業の在庫高増加の四半期データと非ガウス型モデルによる季節調整の結果が示してある。オイルショックに対応して1973年—1974年の前後にトレンドと季節成分の急激な変化が検出されている。この結果は、標準的な季節調整法ではトレンドおよび季節成分は徐々に変化し、急激な変化は大きな残差に反映さ

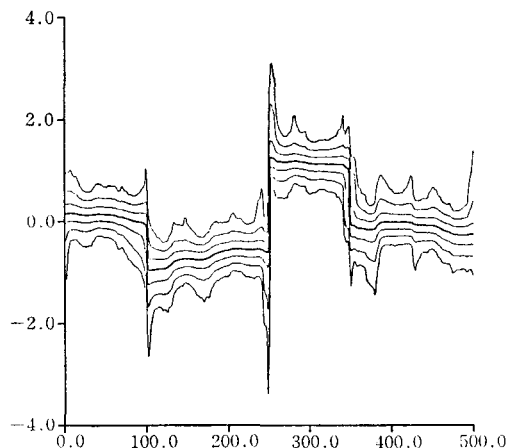


図3 非ガウスモデルによって求めたトレンド t_n の事後分布 (Kitagawa 1987)

れるのと対照的である。

5.3 分布の非対称性および異常値の処理

現実には得られるデータには、その生成機構あるいはなんらかの変換の結果、非対称な分布をしているものが多い。このようなデータに通常モデルを用いて最小二乗推定などを適用すると、いちじるしく偏った結果が得られることになる。しかし、観測ノイズの分布が既知の場合にはその分布形 $r(w)$ を直接用いて平滑化を行なうことによって良い結果が得られる。また、観測値に異常値が含まれる場合にも、 $r(w)$ に裾の重いコーシー分布などを用いることによりロバストな推定を自動的に実現することができる。

5.4 時変スペクトルの推定

スペクトル推定の有力な方法の1つとして自己回帰モデルなどの時系列モデルを利用する方法が知られている。これは、自己回帰モデル

$$y_n = \sum_{i=1}^K a_i y_{n-i} + w_n \quad (10)$$

とスペクトル $p(f)$ との間には

$$p_n(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum a_j \exp(2\pi i j f)|^2} \quad (11)$$

という関係が成り立つことを利用するものである。

そこで、時系列が非定常の場合には、(10)式で係数 a_i を時変係数 a_{in} に変えた、時変自己回帰モデルを推定すれば時変スペクトルを推定できることになる。

しかしながら、この場合には各時刻で K 個のパラメータを持つことになり、明らかに通常の方法では意味のある推定値を求めることはできない。そこで、係数の時間的変化に対して、たとえば

$$a_{in} = a_i + v_n \quad (12)$$

のような制約モデルを導入すると(10)と(12)の2つが状態空間モデルで表現できる。したがって、 v_n および w_n が共にガウス分布に従うと仮定するとカルマンフィルタによる状態推定によって時変係数 a_n の推定が可能となる(北川1986)。ただし、このガウスモデルにもとづく方法では、係数の滑らかな変化にはうまく対応できるがステップ状の急激な変化には特別な処理をしない限りうまく対応できない。しかし、この場合にもシステム雑音 v_n に対してコーシー分布のような非ガウス型モデルを

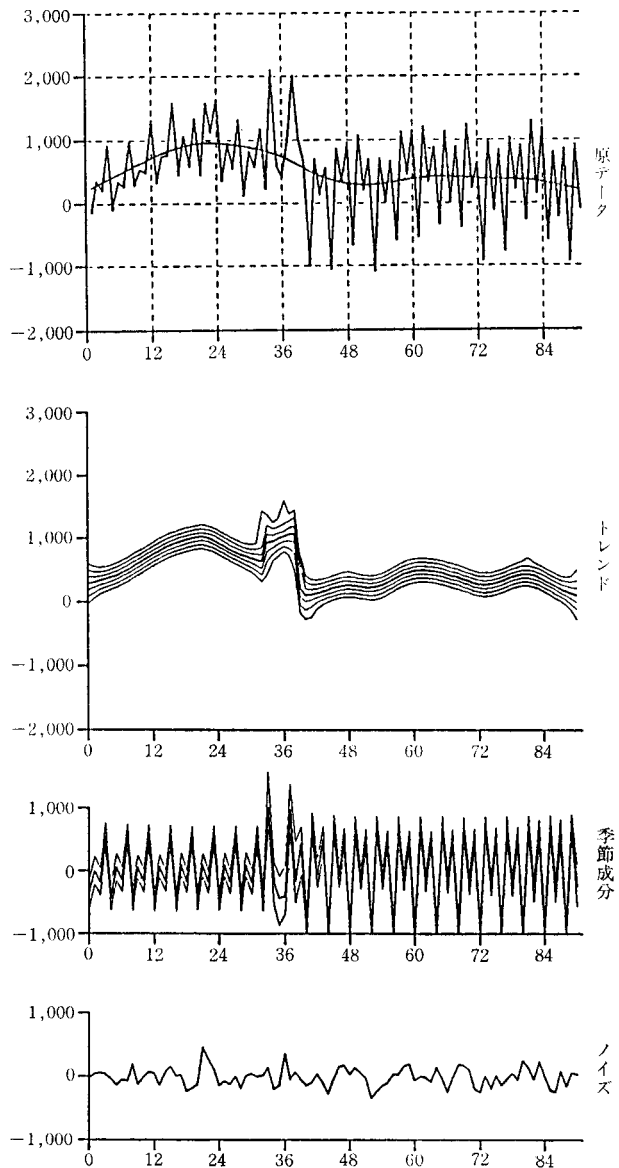


図4 非ガウスモデルによる季節調整 (Kitagawa 1989)

利用するとこのようなパラメータのジャンプも自動的に検出できるようになる。図5には、ある地震波形の時変スペクトルを求めた例が示してある。

5.5 離散過程の平滑化

本稿で紹介した非ガウス型モデルは離散過程の平滑化にも適用することができる。たとえば、東京で雨が降った日を数年間にわたって記録したデータがあるとすると、このとき、各年の同じ月日には2項分布にしたがって同じ確率で雨が降るがその確率 p_n は時間 n とともに徐々に

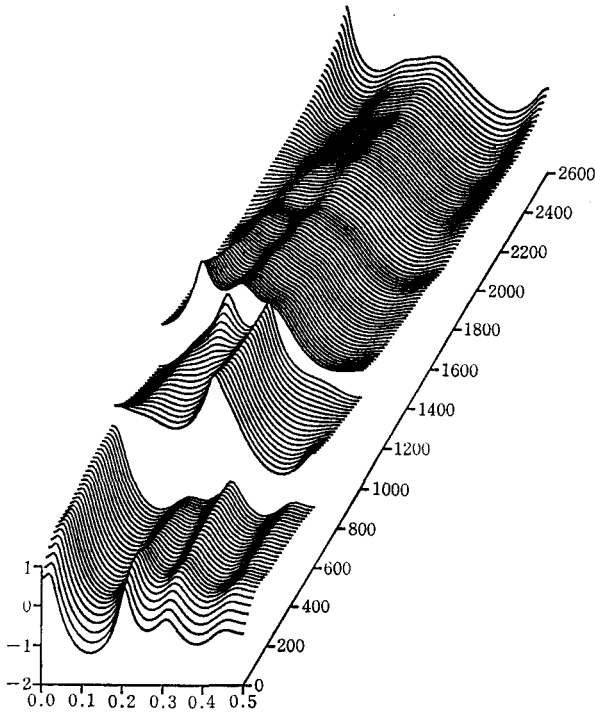


図5 地震波の時変スペクトル (北川 1986)

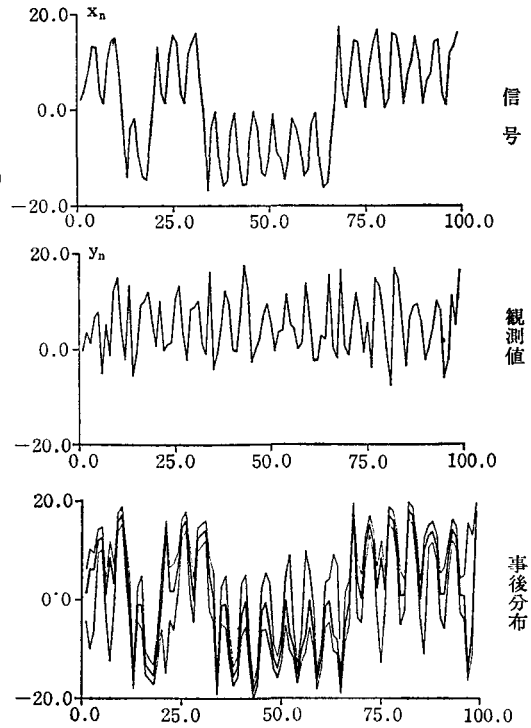


図6 信号 x_n , 観測値 y_n および非ガウスモデルで求めた $p(x_n|Y_N)$ の事後分布 (Kitagawa 1987)

に変化するものと見なすと

$$q_n = q_{n-1} + v_n$$

$$P(m_n | q_n, l_n) = \binom{l_n}{m_n} p_n^{m_n} (1-p_n)^{l_n - m_n} \quad (13)$$

というモデルが考えられる。ただし、 $q_n = \log \{p_n / (1-p_n)\}$ 、 l_n は観測数、 m_n は降雨回数、 $P(m_n | q_n, l_n)$ は l_n 回の観測中 m_n 回降雨がある確率である。ここで、第1式はシステム方程式、第2式は観測方程式に対応しており、それぞれ条件付き分布を与えるのでこのような離散系列に対しても本稿の方法が適用でき、データから時間と共に変化する2項確率を推定することができる。自然科学や疫学などの多くの分野で、2項分布あるいはポアソン分布に従うと考えられる観測系列があり、その変動の解析が必要となることがある。各時点での観測数が多い場合には正規近似が有効であるが、観測数が少ない場合には離散分布を直接利用する方法の方が有利であると考えられる。

5.6 非線形平滑化

非線形平滑化の例として次のような非線形モデルを考えてみよう (Kitagawa 1987) :

$$x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{25x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2} + 8 \cos(1.2n) + v_n$$

$$y_n = \frac{x_n^2}{20} + w_n \quad (14)$$

問題は信号 x_n を観測値 $\{y_n\}$ から再現することである。通常、このような場合には拡張カルマンフィルタなどの非線形フィルタが利用されるが、この例の場合にはよい結果は得られない。われわれの非ガウス型のフィルタおよびスムーザを用いると図6のように信号をよく再現することができる。

6. まとめ

非ガウス型のモデルを用いることによって従来のモデルでは困難であったさまざまな問題を解決することができる。本稿では、非ガウス型の状態空間モデルを紹介し、状態推定のためのフィルタおよびスムーザを示した。この方法は数値積分などの数値計算を利用する方法なので大量の計算を伴うが、低次元の問題については十分実用的でありさまざまな応用が考えられる。

参考文献

赤池, 中川(1972), ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社

Akaike, H. (1980), 'Likelihood and Bayes Procedure,' in Bayesian Statistics,' J. M. Bernardo, M. H. De Groot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith, eds., University Press, Valencia, Spain, 143-166.

Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1979), Optimal Filtering, New Jersey, Prentice-Hall.

Harrison, P. J. and Stevens, C. F. (1976), 'Bayesian Forecasting', Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, 38, 205-247.

Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984), 'A Smoothness Priors-State Space Approach to the Modeling of Time Series with Trend and Seasona-

lity,' Journal of the American Statistical Association, 79, No. 386, 378-389.

北川(1986), 時変自己回帰モデル, 統計数理, 34巻, 2号, 273-283.

Kitagawa, G. (1987), 'Non-Gaussian State Space Modeling of Nonstationary Time Series,' Journal of American Statistical Association, Vol. 76, No. 400, 1032-1063.

Kitagawa, G. (1989), 'Non-Gaussian Seasonal Adjustment,' Computers Math. Applic., (to appear).

坂元, 石黒, 北川(1983), 情報量統計学, 共立出版.

(会 告)

著作権の本学会帰属について

日本オペレーションズ・リサーチ学会機関誌：オペレーションズ・リサーチ，論文誌：Journal of the Operations Research Society of Japan および本学会の編集するその他の著作物に関する著作権は本学会に帰属し，すでに機関誌，論文誌あるいは投稿規程，会員名簿掲載各種規程集などには，それぞれその旨を記述しておりますが，著作権規程をここに改めて掲載いたします。

— 著 作 権 規 程 —

第1条 社団法人日本オペレーションズ・リサーチ学会(以下学会という)の機関誌「オペレーションズ・リサーチ」，論文誌「Journal of the Operations Research Society of Japan」および学会の編集するその他の著作物(以下これらを総称して学会編集著作物という)に関する著作権は，学会に帰属する。

第2条 学会編集著作物の全部または一部の転載，複製，翻訳，翻案などによる利用の許諾については，別に定める。