

株価指数先物の時系列分析： SP500の価格変動

白石 典義, 大槻 聰幸

1. はじめに

株式や債券等の金融資産の価格は日々絶え間なく変化している。これまでこれら金融資産の将来価格の水準を予測しようとする試みが数多くなされ、また現在も積極的に行なわれている。しかし、その難しさはここに改めて言及する必要もないであろう。

ところが、金融資産の価格水準ではなく、その変動の幅すなわち変動率（ボラティリティ）のパターンを時系列分析の手法を用いてモデル化し、価格の将来変動を予測しようとする要請が近年急速に高まってきている。これは、株式や債券等といった金融資産の現物取引に加え、それらの派生商品（デリバティブ・アセット）である先物やオプションが市場に導入され、それらの取引が活発化していることに理由があると思われる。投資家が現物取引だけを用いて利益をあげようとする場合、当該金融資産の将来価格水準を予測しなければならない。しかし、先物やオプションまたはそれらを現物と組み合わせた取引を用いれば、将来価格がどれくらいで変動するのかを予測できさえすれば、それによって利益を得ることができる。すなわち、金融資産の価格が将来上昇するのかまたは下落するのかその上下の水準変化に関わりなく、将来価格のボラティリティを予測できれば、投資家は現物、先物、オプション取引を活用し利益をあげることができるのである。また先物取引の場合であっても、同様に当該先物のオプション取引を利用することができる。

このような背景を踏まえ、本稿では金融資産価格のボラティリティに焦点を当て、そのパターンをモデル化する時系列分析の理論と手法を述べるとともに、応用として米国シカゴ・マーカントイル取引所（CME）上場の

株価指数先物 SP500 を対象に行なった実証分析の結果を考察することにする。

2. 金融資産価格のボラティリティ

株式や債券等の金融資産を取りあげその現物価格の動きを観察すれば、通常の実物財等の価格に比較して、一定期間内に大きく変動することがわかるであろう。派生商品である先物のボラティリティも同様に大きく変化している。それは金融資産市場が、実物財を扱う市場のように需要者はほとんど常に需要者として、供給者もまたほとんど常に供給者として取引が行なわれる市場ではなく、同一の市場参加者が需要者と供給者の機能を併せ持ち、これらの機能を利益機会に呼応してダイナミックに使い分けることができる市場だからである。つまり、金融資産市場は投資家が需要者と供給者の機能を使い分け利益を追い求める市場裁定が早い市場であるとともに、予測できない（ランダムに発生する）新情報に瞬時に反応しようとする市場であるため、結果としてボラティリティが大きく変化するのである。さらに先物は、対象とする資産のリスクをヘッジするために用いられるだけでなく、裁定取引、スプレッド取引、加えて投機取引といったタイムリーな取引に頻繁に利用されることから、短期間に大きな価格変動を示す場合が多いであろう。

例として、米国シカゴ・マーカントイル取引所上場の株価指数先物 SP500 を取りあげ、1989年3月限月契約のボラティリティが1988年8月から翌年1月までの半年間どのように変化したかを図1に示そう。価格の動きは高値、安値、終値を用いて表わす。ボラティリティの指標として、ヒストリカル・ボラティリティ(HV)とインプライド・ボラティリティ(IV)を用いる。HVは先物SP500の終値の日次収益率を使用し、直近の20取引日に対して標準偏差を求めたものである。IVの計算には、オプションの価格評価モデルとして最も広く用いられているブラック・ショールズ公式を用いる[2]。

$$P_o = f(P_f, r, E, t, \sigma_f)$$

しらいし のりよし 立教大学
〒171 豊島区西池袋3丁目
おおつき としゆき 国際大学

ここで、 P_0 =株価指数先物 S P 500 オプションの現在価格、 P_f =株価指数先物 S P 500 の現在価格、 r =利子率、 E =権利行使価格、 t =最終取引日までの残存期間、 σ_f =株価指数先物 S P 500 の収益率の標準偏差である。 P_0 、 P_f 、 r 、 E 、および t の観測値を入力し σ_f を逆算し求める。

この期間ほぼ常に I V が H V を上回っていることは注目値するであろう。H V は移動平均的な計算方法からくる動きを示しているといえよう。すなわち、直近20日間の日次収益率を用いて H V を求め、翌日には新しい日次収益率を加えるとともに一番古いものを除外し計算するため、比較的反応が遅れた動きを示す。それに対し、I V は投資家の予想ボラティリティを表わしていると同時に、投資家心理を反映してオーバーに動いているのかもしれない。いずれにしても、H V や I V は真のボラティリティの推定値であり、他の推定方法が存在する。次節で述べるボラティリティの時系列モデルもその1つである。

3. ボラティリティの時系列モデル

p_t を取引日 t の決められた時刻に観測された市場価格としよう。通常は終値が用いられる。また d_t を t 日に支払われた現金配当とする。配当が 0 以外の数値を取るのは株式の場合だけであって、しかも年に高々数日である。日次収益率 X_t はこれらを用いて、 $x_t = (p_t - p_{t-1} + d_t) / p_{t-1}$ と計算できる。 $\{X_t\}$ を収益率を生成する確率過程とすれば、観測された x_t は確率変数 X_t の実現値と見なすことができる。

ボラティリティの変化をモデル化するために、Taylor [5] によって提案された積プロセスを取りあげることしよう。積プロセス $\{X_t\}$ は、

$$X_t = \mu + V_t U_t \quad (1)$$

と表わされる。ここで $\{U_t\}$ は $U_t \sim N(0, 1)$ にしたがう正規ホワイトノイズであり、 $\{V_t\}$ は $V_t > 0$ かつ

$\text{var}(X_t | v_t) = v_t^2$ を満たす定常確率過程とする。さらに $\{V_t\}$ と $\{U_t\}$ は独立であると仮定する。これより、

$$EX_t = \mu + E(V_t U_t) = \mu + EV_t EU_t = \mu$$

$$E(X_t - \mu)^2 = E(V_t^2 U_t^2) = EV_t^2 EU_t^2 = EV_t^2$$

となり、 X_t の平均と分散はいずれも一定であることがわかる。しかし条件付分散 $\text{var}(X_t | v_t)$ は時間に依存し

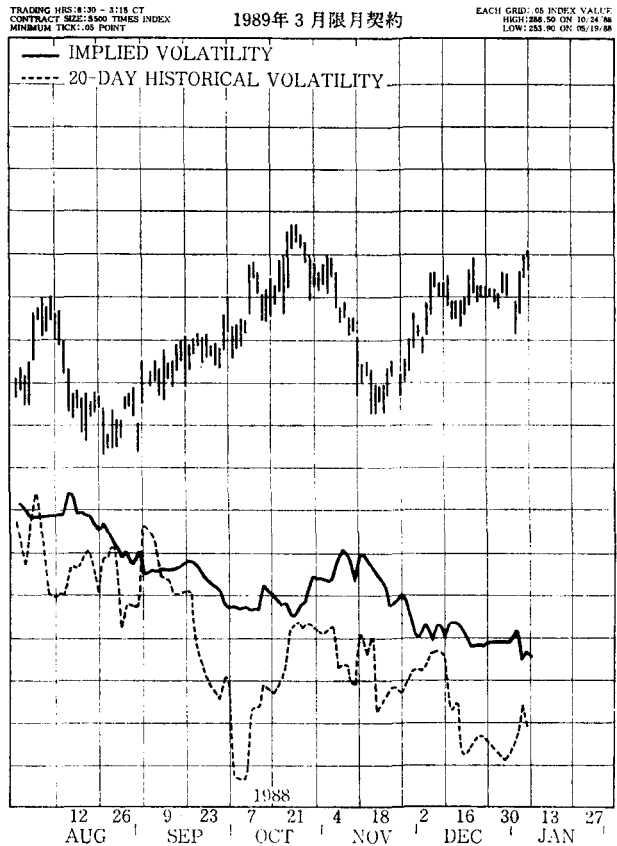


図 1 株価指数先物 S P 500 の価格変動
出所：CME Futures and Options Review

た v_t^2 の値に等しい。 v_t は V_t の実現値である。したがって、市場は t 日にその取引活動を通じて v_t を決定し、その日の収益率 x_t はこの固定された v_t を所与として、分散 v_t^2 を持つ確率分布からの 1 つの観測値であると考えられる。

ボラティリティの変化を条件付標準偏差 v_t の変動として捉え、市場が予測できない出来事や新情報によって v_t が変化するとしよう。そこで、 v_t はその過去の値 v_{t-j} 、 $j > 0$ および市場と独立な外生的要因によって生成されると仮定する。したがって、 $V_t = f(V_{t-1}, V_{t-2}, \dots, \eta_t)$ と表わされる。ここで η_t は v_{t-j} 、 $j > 0$ と独立なイノベーションであり、同時に過去の収益率 x_{t-j} 、 $j > 0$ とも独立であるとする。このように V_t は外生的要因を表わす η_t によって生成されるのであるから、 $\{V_t\}$ と $\{U_t\}$ の独立性の仮定から、 η_t は $\{U_t\}$ と独立である。

さらに $\{V_t\}$ について、以下の単純なモデルを考えよう。 V_t は非負であり、その標本分布は右に歪んだ形を

取る場合が多い。そこで V_t は自然対数正規分布に従うと仮定する[1]。

$$\log V_t \sim N(\alpha, \beta^2), \beta > 0 \quad (2)$$

これより、

$$EV_t = \exp(\alpha + \beta^2/2)$$

$$\text{var}(V_t) = [\exp(\beta^2) - 1] \exp(2\alpha + \beta^2)$$

を得る。次に、 $V_t = f(V_{t-1}, V_{t-2}, \dots, \eta_t)$ の関係について、 $\log V_t$ に対する AR(1) モデルを仮定すれば、

$$\log V_t - \alpha = \phi(\log V_{t-1} - \alpha) + \eta_t \quad (3)$$

である。ただし、イノベーション $\{\eta_t\}$ は $\eta_t \sim$

$N(0, (1-\phi)\beta^2)$ に従う正規ホワイトノイズであり、 $\{U_t\}$ と独立である。 ϕ の値が 1 に近ければ、 V_t は時間に伴ってゆっくり変化することになる。

以上積プロセスについて述べたが、ボラティリティの変動をモデル化する代替的な方法は他にもあることに注意しなければならない。それらのうちで代表的な ARCH プロセス[3]について簡単に触れることにしよう。今積プロセスとは異なり、 $V_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ とし、過去の収益率 x_{t-j} , $j > 0$ が条件付標準偏差 v_t を決定すると仮定する。特に、

$$X_t - \mu = \left\{ \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_{t-i} - \mu)^2 \right\}^{1/2} U_t \quad (4)$$

ただし、 α_0, α_i は $p+1$ 個の非負パラメータであり、 $\{U_t\}$ は $U_t \sim N(0, 1)$ に従う正規ホワイトノイズであるとした時、 $\{X_t\}$ を ARCH(p) プロセス (p -th order autoregressive conditional heteroscedasticity, p 次の自

己回帰条件付不等分散) と呼ぶ。 $\{X_t\}$ が弱定常であれば、 $\text{var}(X_t) = \alpha_0 / [1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)]$ であることが知られている[3]。条件付分散は、

$$\text{var}(X_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (x_{t-i} - \mu)^2 \quad (5)$$

となり、時間に依存する。最も単純なケースである $p=1$ の時には、 $\text{var}(X_t | x_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_{t-1} - \mu)^2$ となり、収益率 x_{t-1} の平均 μ からのかい離が大きければ、大きな分散を翌日に引き起こすことになる。

積プロセスと ARCH プロセスの差異は情報集合の違いである。積プロセスでは $V_t = f(V_{t-1}, V_{t-2}, \dots, \eta_t)$ であるから、 X_t は 2 つのイノベーション U_t と η_t によって決定される。それに対し、ARCH プロセスでは $V_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ であり、イノベーション U_t が X_t を決定することになる。

Taylor[5]は、積プロセスと ARCH プロセスの両者を用いて分析を行なった経験から、金融データに対しては前者が適当であって、後者の使用はかなり疑問であると指摘している。そこで以下の実証分析では、これに従い積プロセスを用いることにする。

4. 株価指数先物 S P 500 を用いた実証分析

米国シカゴ・マーカンタイル取引所 (CME) 上場の株価指数先物 S P 500 を対象に、前節で述べた積プロセスを用いて行なった実証分析の結果を考察しよう。

表 1 分析対象契約 (株価指数先物 S P 500)

契約	限月	取引開始日	取引終了日	契約	限月	取引開始日	取引終了日
3 月 限 月 契 約	83年3月	82年4月21日	83年3月17日	6 月 限 月 契 約	82年6月	82年4月21日	82年6月30日
	84年3月	83年3月18日	84年3月26日		83年6月	82年6月25日	83年6月17日
	85年3月	83年9月16日	85年3月22日		84年6月	83年6月17日	84年6月27日
	86年3月	85年3月18日	86年3月27日		85年6月	83年12月16日	85年6月28日
	87年3月	86年3月24日	87年3月26日		86年6月	85年6月24日	86年6月27日
	88年3月	87年3月24日	88年3月22日		87年6月	86年7月2日	87年6月24日
	89年3月	88年3月18日	88年9月15日		88年6月	87年6月29日	88年6月22日
9 月 限 月 契 約	82年9月	82年4月21日	82年9月23日	12 月 限 月 契 約	82年12月	82年4月21日	82年12月21日
	83年9月	82年9月20日	83年9月20日		83年12月	82年12月17日	83年12月19日
	84年9月	83年6月17日	84年9月27日		84年12月	83年6月17日	84年12月31日
	85年9月	84年3月16日	85年9月30日		85年12月	84年12月24日	85年12月31日
	86年9月	85年9月23日	86年9月26日		86年12月	85年12月24日	86年12月26日
	87年9月	86年9月23日	87年9月22日		87年12月	86年12月23日	87年12月22日
	88年9月	87年9月21日	88年9月15日		88年12月	88年1月29日	88年9月15日

対象期間は1982年4月21日～1988年9月15日。

取引開始日、取引終了日は取引が実際に行なわれた初日、最終日を意味する。

表 2 長期日次収益率系列の作成

3月-9月ベース		6月-12月ベース	
価格*)の観測期間	使用した契約	価格*)の観測期間	使用した契約
82年4月21日-82年8月31日	82年9月	82年4月21日-82年5月28日	82年6月
82年8月31日-83年2月28日	83年3月	82年5月28日-82年11月30日	82年12月
83年2月28日-83年8月31日	83年9月	82年11月30日-83年5月31日	83年6月
83年8月31日-84年2月29日	84年3月	83年5月31日-83年11月30日	83年12月
84年2月29日-84年8月31日	84年9月	83年11月30日-84年5月31日	84年6月
84年8月31日-85年2月28日	85年3月	84年5月31日-84年11月30日	84年12月
85年2月28日-85年8月30日	85年9月	84年11月30日-85年5月31日	85年6月
85年8月30日-86年2月28日	86年3月	85年5月31日-85年11月29日	85年12月
86年2月28日-86年8月29日	86年9月	85年11月29日-86年5月30日	86年6月
86年8月29日-87年2月27日	87年3月	86年5月30日-86年11月28日	86年12月
87年2月27日-87年8月31日	87年9月	86年11月28日-87年5月29日	87年6月
87年8月31日-88年2月29日	88年3月	87年5月29日-87年11月30日	87年12月
88年2月29日-88年8月31日	88年9月	87年11月30日-88年5月31日	88年6月
88年8月31日-88年9月15日	89年3月	88年5月31日-88年9月15日	88年12月

* X_t, P_t を t 取引日の収益率および価格 (終値) とすれば, $X_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$ 従って, t 取引日の収益率を計算するためには, $t-1$ 取引日の価格 (終値) が必要となる。

分析の対象期間はCMEで取引が開始された1982年4月21日から1988年9月15日までのブラック・マンデーを含む約6年5カ月である。ブラック・マンデーでは価格ボラティリティが急激に変化したことに注意する必要がある。先物取引では各取引日に限月の異なる複数の契約が同時に取引されている。株価指数先物 S P 500 の場合、限月は3月、6月、9月、12月である。表1に分析の対象とした契約を示そう。表から明らかなように、各契約では当該限月のほぼ1年前から取引が始まる。しかし詳細に見れば、取引は限月の約半年前から頻繁になるのであって、それ以前の月ではかなり薄商いであることがわかる。この観察結果にもとづき、分析に用いる長期の日次収益率系列を、Taylor [5] の方法に従い、次のように作成した。まず、3(6)月-9(12)月と半年間隔で限月契約のペアを選ぶ。次に3(6)月契約について、前年9(12)月から2(5)月までの6カ月間、つまり限月1カ月前までの半年間のデータを取る。同様に9(12)月契約では、3(6)月から8(11)月までの6カ月間のデータを取る。この2つをつなげれば年間データができる。このようにして、1982年4月21日から1988年9月15日までを範囲とする長期系列を3月-9月および6月-12月の2組の限月契約をベースに作成した(表2)。

Taylor [5] は、日次収益率を用いて興味ある結果を得るためには、少なくとも4年間(1000)以上の観測値が経験的に必要であったと述べている。また先物商品に

ついて、1契約からデータを収集する場合、6カ月の観測値が理想的であるとも指摘している。上に述べた収益率の長期系列はこれに従い作成したものである。さらに検討の材料として、短期系列についても分析を試みることにしよう。日次収益率の短期系列は、表1に示される29契約の個々について、取引開始直後および限月決済直前の取引が成立しなかった日を除く、継続して取引が行なわれた期間を取りあげることにした。

まず予備的な分析として、収益率 x_t 、絶対収益率 $|x_t|$ 、2乗収益率 x_t^2 の標本自己相関係数を検討しよう。Granger=Andersen [4] によると、確率過程 $\{X_t\}$ が強ホワイトノイズであるならば、 $\{|X_t|\}$ および $\{X_t^2\}$ もまた強ホワイトノイズである。ただし、強ホワイトノイズとは、確率変数が独立で同一の分布を持つことである。さらに、有限分散を持つ強ホワイトノイズの場合、 k 次の標本自己相関係数 $r(k)$, $k \geq 1$, は近似的に $N(0, 1/n)$ に従うことが知られている。ここで n は標本数を表わす。図2は3月-9月限月契約から作成した長期の日次収益率系列に対し、これら3種類の標本自己相関係数を計算しプロットしたものである。標本数は1619である。

図から明らかなように、絶対収益率および2乗収益率で高い自己相関が観察される。従って、収益率は強ホワイトノイズではないと結論されよう。同時に、絶対収益率に見られる自己相関は、大幅な絶対収益率の後には大

幅な絶対収益率が、また小幅な絶対収益率には小幅な絶対収益率が、引き続き起こる傾向を示している。2乗収益率についても同様である。これから、収益率の分散あるいは条件付分散が変化していると推測することができよう。6月—12月限月契約をベースとするもう1つの長期系列の場合にも結果は同じであった。

Taylor[5, 第3章]は、前節で述べた積プロセスによって、絶対収益率と2乗収益率に見られる自己相関のこのような特徴を説明できることを指摘した。すなわち、収益率で積プロセスに従うのであれば、絶対収益率と2乗収益率の系列には十分な自己相関が存在することを示した。この結果から、検証すべきモデルの1つとして積プロセスを取りあげることが意味があると言えよう。

先物契約ごとの短期系列を対象とした自己相関分析では、収益率、絶対収益率、2乗収益率の標本自己相関パターンはさまざまに変化し、これらの契約に共通する特徴は認めることができなかった。そこで短期系列に関する

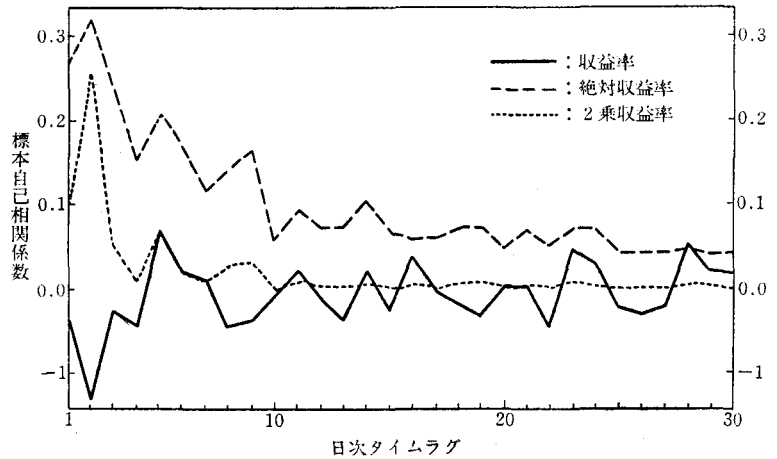


図2 収益率，絶対収益率，2乗収益率の自己相関係数

分析結果についての記述は以後省略することにする。収益率の長期系列を用いて積プロセスのパラメータを推定した結果を表3に示す。推定方法の詳細についてはTaylor[5]の第3章を参照のこと。まず収益率の分布について検討しよう。歪度(s)は -5.76 、 -5.72 である。また尖度(k)は 155.68 、 156.53 であった。分布がほぼ左右対称ならば歪度は $s=0$ に近い値を取る。尖度は正規分布の場合 $k=3$ である。これらを一見すると、収

表3 積プロセスのパラメータ推定結果

系列	収益率 X_t		条件付標準偏差 V_t		$\log(V_t)$	
3 月 9 月 系 列	観測値数	1619	中央値	0.0079	ϕ	0.938
	平均	0.000358	平均	0.0110	平均	-4.845
	標準偏差	0.0153	標準偏差	0.0107	標準偏差	0.817
	t 値 ¹⁾	0.94	95% 範囲	0.0016—0.0390		
	歪度	-5.76				
	尖度	155.68				
	年複利収益率 異常値 ²⁾	9.45% 2.2%				
3 月 9 月 系 列	観測値数	1619	中央値	0.0078	ϕ	0.928
	平均	0.000368	平均	0.0110	平均	-4.847
	標準偏差	0.0154	標準偏差	0.0108	標準偏差	0.821
	t 値 ¹⁾	0.96	95% 範囲	0.0016—0.0392		
	歪度	-5.72				
	尖度	156.53				
	年複利収益率 異常値 ²⁾	9.71% 2.2%				

¹⁾ t 値は $E(X_t) = 0$ の検定値。

²⁾ 標本平均から標本標準偏差の2倍以上離れた収益率の割合。

益率の分布は左右対称ではなく、急尖的で正規分布以上に長い裾を持つと思われるかも知れない。ところが、標本平均から標本標準偏差の2倍以上離れた収益率（異常値）が標本全体に占める割合は2.2%にしか過ぎない。従って、数個の極端な異常値（例：ブラック・マンデー）が歪度推定値と尖度推定値を見せかけ大きくしていると考えられよう。

条件付標準偏差 V_t の標本平均、標本中央値、標本標準偏差から、 V_t の分布は右に歪んだ形を取ることがわかる。これより、(2)式で仮定した自然対数正規分布の妥当性を確認することができる。標本分布の95%範囲は(0.0016, 0.0390), (0.0016, 0.0392)であり、 V_t がかなりの幅で変化することを表わしている。収益率 X_t の標本標準偏差 S_x は0.0153, 0.0154だから、この95%範囲に含まれるが、 V_t の標本平均0.0110より大きい値を取る。従って、 S_x を $E(V_t)$ の推定値として代用した場合には、ボラティリティを過剰に評価してしまう可能性があると言えよう。

次に(2)式に示される $\log V_t$ の平均 α と標準偏差 β の推定値を表に示す。また、 $\log V_t$ が AR(1) モデルに従うと仮定 ((3)式を見よ) した時のパラメータ ϕ の標本推定値は0.938, 0.928であった。従って ϕ の値は1に近く、 V_t は時間に伴って比較的ゆっくりと変化していると考えられる。

以上のように積プロセスを用いれば、収益率（価格）ボラティリティの変化をかなり系統的に把握できることがわかった。ただし、この分析結果は対象とする期間にブラック・マンデーを含むことにある程度依存するかも知れない。すなわち、積プロセスのパラメータ推定値がブラック・マンデーによる収益率の急激な変化に影響を受けている可能性があることリザーブしておく必要がある。

5. おわりに

金融資産の収益率(価格)ボラティリティに注目し、その変化をモデル化する時系列分析の代表的な手法について述べてきた。それらは積プロセスとARCHプロセスであり、ボラティリティの変化を条件付分散の変動によって把握しようとするものであった。次に応用として、米国シカゴ・マーカンタイル取引所上場の株価指数先物 S P 500 を取りあげ、収益率の変動を分析するとともに積プロセスを用いて検証した。その結果得られた結論を要約すれば、

(1) 絶対収益率と2乗収益率の系列に見られる高い自己相関は、ボラティリティが時間に伴い変化することを示している。積プロセスはこの観測結果と整合的なモデルである。

(2) 条件付標準偏差はかなりの幅で変化するが、その動きは時間的にゆっくりしている。

本稿の分析結果は特定のモデル（積プロセス）を採用した上での結果であるから、無条件に受け入れることはできないが、少なくともボラティリティの変化に焦点を当てたモデルの必要性を示唆しているといえよう。また、ボラティリティと取引量の関係、高値一安値といった日々の価格変動、等を考慮したモデルの開発も必要であろう。今後のさらに進んだ研究が望まれる。

参 考 文 献

- [1] Clark, P. K. (1973) "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices," *Econometrica*, 41, 135-155.
- [2] Cox, J. C. and M. Rubinstein (1985) *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 仁科一彦監訳(1988)「オプション・マーケット」HBJ出版局.
- [3] Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1007.
- [4] Granger, C. W. J. and A. P. Andersen (1978) *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [5] Taylor S. J. (1986) *Modelling Financial Time Series*, John Wiley & Sons. 新日本証券調査センター訳(1988)「金融先物・オプションの価格変動分析」東洋経済新報社.
- [6] 刈屋・佃・丸編著(日本の株価変動) 東洋経済新報社, 1989.