時系列分析の現状と問題点のいくつかについて

藤井　光昭

1. 序　論

日常生活で，毎日毎日の気温の変化に注目したり，日毎の株価の変動に大きな関心を持ったりして，刻々と変化していく数値に関心を持たなければならないことも多い．**図1(a)**はある人の心電図の一部であり，**図1(b)**は1980年1月から1987年6月までの日本の1世帯当りの1カ月の消費支出（総務庁統計局編集「日本統計月報」より）を図にしたものである．これらのもととなるデータのように，測定した時間の順序にしたがって測定値を並べたものを時系列（time series）と呼んでいる．時系列分析または時系列分析（time series analysis）は，これらの時系列が時間とともにどのように変化していくかといったことの統計的な分析などをさすものである．

時系列の分析は，さまざまな分野で必要であり，古くから種々の立場で分析されてきている．ここではその統計的な分析について，その現状の一部の紹介といくつかの問題点を述べることにする．

時系列は一般的にいえば，さまざまな形で時間の経過とともに変化していくはずであるが，通常「時系列解析」または「時系列分析」としてその統計的分析が論じられているものは，それらのなかで定常性（2節で定義）を持つもの，あるいは何らかの意味で定常性を持つものが関係しているものの分析をさすことが多い．ここでもその範囲で話を進めていくことにする．

上で述べた意味の時系列分析において，周期性の検出や将来の値の予測は多くの場面でしばしば必要になるものであり，古くからその方法などが論じられてきてい

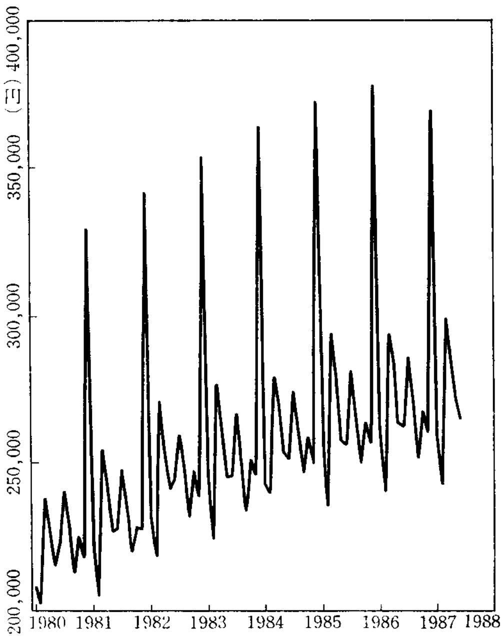

図1(b)　1世帯当りの1カ月の消費支出

ふじい　みつあき　東京工業大学　理学部　情報科学科
〒152　目黒区大岡山2丁目12－1

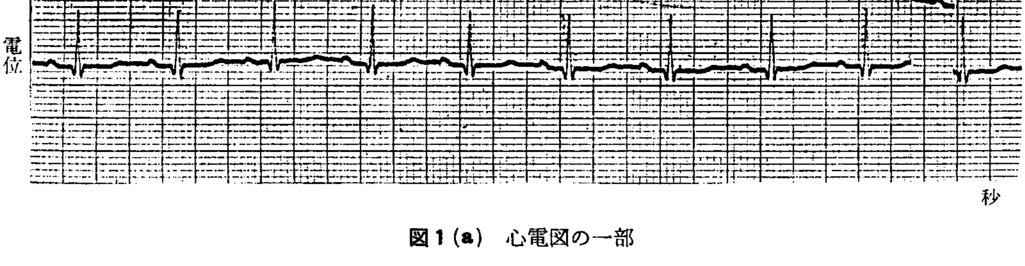

図1(a)　心電図の一部

る．フーリエ解析など数学の解析学での方法が用いられてきた．しかし1930年代以降において確率論における確率過程論の研究や推測統計の理論等の飛躍的発展にともない，時系列分析の理論もこれらの理論を用いる等により大きな発展をとげている．しかし時系列の数学的取扱いのむずかしさや複雑さのために，統一的な理論や小標本の理論などが十分にできあがっていないのが現状である．

このようなことを考慮に入れて，以下において時系列分析の現状と問題点のいくつかを述べることにする．紙面が限られているため，次のような構成にすることにする．**2.** では，時系列分析の現状と問題点について，オペレーションズ・リサーチの多くの分野と関係があると思われるテーマを中心に，内容に深く立ち入ることはしないができる限り広くその分析の位置づけや意味づけを述べることにする．そのなかの重要な，そして最近話題になっているテーマのうちの1つについて，**3.** で少し詳しく述べることにする．ここでは，ＡＩＣ理論などで最近注目されている時系列へのモデルのあてはめについて，通常とは少し界なった観点から述べる．

2. 時系列分析の現状と問題点

図1(a)や図1(b)のようなデータが得られ，これを分析しようとするとき，どのようなことを行なうであろうか？　これは目的によって異なるであろう．たとえば将来の値を予測したい場合等においては，時間の経過とともにこの時系列が大まかにどのような傾向で変動していくかを近似する曲線をあてはめるであろうし，変動をなるべくわかりやすい数式で表現するため数学モデルをあてはめることも考えるであろう．また過去の変動となんらかの関係を持つかどうかを調べるため，相関を調べたり周期性を調べるのも1つの方法であろう．このように時系列分析といってもその扱う時系列の性質や目的によってさまざまな分析が考えられ，その方法が論じられているのが現状である．ここではそのなかのいくつかのテーマについて，現状と問題点を述べることにする．

(1) 時系列の表現について

時系列の分析を行なうさい，そのモデルを数学的に表わしておく必要がある．これは母集団の確率論的構造を表わすものであり，何を推測したり予測したりするかを明確にするために重要でるる．

時系列は時間の経過とともに変動していく量であるから，なんらかの意味で時間のパラメータを時系列の表現に入れる必要がある．この時間のパラメータ（時点を表わす）を t とおき，t としてどのような値を考えるかについてまず述べることにする．現実問題としての t については，大まかにいって図1(a)のような場合と図1(b)のような場合がある．つまり心電図のような場合は，本来は t を連続的に変化させてそれぞれについて値があるものである．それに対して1ヵ月の消費支出のような場合は，t として1ヵ月ごと(離散値)の値で考えればよく，t を連続的に考えても意味がない．さて問題は，心電図のように連続的に変化する t に対して意味を持っている現象をわれわれがどう表現するかである．この問題を統計的な推測をからませずに，時系列の変化の構造を数学的に，あるいは確率論的に表現することも重要な問題で，それだけをねらう場合には t を連続値として表現をする必要があるであろう．たとえばある現象を確率微分方程式で表わす場合がそうである．これに対して統計的推測がからむ場合は少し複雑である．統計的推測においては多くの場合，モデルの表現にあらわれるパラメータの値の推測などを観測した標本を用いて行なうが，ほとんどの場合の連続的な t に対して観測して標本の値を得ることは不可能で，どうしても観測し標本（の値）を得るのは有限個の時点となる．そこで問題は有限個の時点をどうとるかというサンプリングの問題になる．連続的な t で表現された本来の構造を知りたいという時には，有限個の時点のとり方まで工夫が必要であろう．たとえば1秒おきに標本をとったのでは，0.5秒ごとにくりかえす周期性などは見出せない．これはスペクトル推定等において aliasing と呼ばれる問題で，ランダムな時点で標本をとる等の方法が提案されている．これに対して，等間隔な時点で標本を得ておけばそれで十分であったり，等間隔な時点でしか標本が得られない場合も現実には非常に多い．この場合には，統計的推測の観点からは連続的な t で表現されたモデルを考えてもあまり意味がなく，等間隔の t の値（離散値）で表現されたモデルを考えておけばそれで十分である．一般的にはこの方が数学的に複雑な仮定をする必要もなくなり，取り扱いやすくなり，より広範囲の時系列に適用できる．このような観点から，現在の時系列解析の多くの文献では t を離散値（しかも整数値）として扱っている．標本抽出は統計学の基本的問題で，得られた標本に従って推測理論を展開しなければならないからである．以下では標本抽出時間間隔 Δ を $\Delta=1$ として，t を整数値として扱っていくことにする．

時系列の時点 t の値を確率変数 Y_t と表わすことにし，時系列を Y_t の列 $\{Y_t\}$ とし確率過程としてとらえることにする．$EY_t^2<\infty$ であるとし，$EY_t=m_t$(平均値関数) とおき，

$$Y_t=m_t+X_t \tag{1}$$

と表わすことにする．残差 X_t は確率変数で，$EX_t=0$ である．時系列に曲線をあてはめる (m_t を定める) さいの最も単純な扱いでは，$\{X_t\}$ が t ごとに独立であることが仮定されるが，現在の大部分の時系列解析ではもう少し広く定常 (stationary) 性が仮定される．詳しくいえば，$EX_t=m$ (t に無関係に一定．本文では $m=0$)，$E(X_t-m)(X_s-m)$ が $t-s$ のみの関数(R_{t-s} とおく)であるようなものを弱定常過程，任意な個数 n と任意な n 個の時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ および時間の任意な平行移動 τ に対し$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ の同時分布と $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \cdots, X_{t_n+\tau})$ の同時分布が等しいものを強定常過程という．現在は，線形理論が多いこともあり，また確認のしやすさもあって弱定常性を仮定した議論が多いが，非線形な問題を扱うさいには強定常性の仮定が必要になるであろう．

R_{t-s} で $t-s=h$ とおき，規準化した $\rho_h=R_h/R_0$ を時間差 h の自己相関 (autocorrelation) というが，ρ_h は h だけ離れた 2 つの時点の相関係数である．$\sum_{h=-\infty}^{\infty}|R_h|<\infty$ のとき

$$f(\lambda)=\sum_{h=-\infty}^{\infty} R_h \cos 2\pi h\lambda \tag{2}$$

をスペクトル密度関数 (spectral density function) という．弱定常性を持つ X_t は，すべての周波数 λ の $\cos 2\pi t\lambda$, $\sin 2\pi t\lambda$ の合成

$$X_t=\int_0^{1/2} \cos 2\pi t\lambda\, dZ_1(\lambda)+\int_0^{1/2} \sin 2\pi t\lambda\, dZ_2(\lambda) \tag{3}$$

と表現できる．ここで $dZ_1(\lambda)$, $dZ_2(\lambda)$ は周波数 λ の波の振幅と位相のずれを含んだ確率変数で，互いにすべて無相関であり，$f(\lambda)$ は周波数 λ の波の強さ $2f(\lambda)d\lambda=EdZ_1(\lambda)^2=EdZ_2(\lambda)^2$ を示していて，ある λ_0 で $f(\lambda_0)$ が大きな値をとれば X_t の変動に周波数 λ_0 の波の影響が強いことを示すものである．

(2) m_t の推定について

$\{X_t\}$ が弱定常性を持つとき，最小 2 乗法で求める方法について標本数が大きい場合にその良さが論じられている([4]，[9])．古くからトレンド，傾向線と呼ばれているものが，ある意味で m_t として表現されることになる．経済時系列の分析において時系列の傾向をつかむ手段として古くから移動平均法というものがある([6])．たとえば月ごとに得られる経済時系列 $\{Y_t\}$ について12カ月ごとにくり返す波が強い場合に，

$$\hat{Y}_t=(Y_{t+12}/2+Y_{t+11}+\cdots+Y_{t+1}+Y_t+Y_{t-1}+\cdots+Y_{t-11}+Y_{t-12}/2)/12$$

を求めて $\{\hat{Y}_t\}$ に注目するものである．$\{X_t\}$ に含まれる強い周期の波を除去したり，$m_t=m$ または $m_t=a+bt$ の場合の m_t のあてはめとしては意味を持つが，一般的な m_t についての $\{\hat{Y}_t\}$ が何を求めたことになっているかは，理論的には複雑である．移動平均法そのものの性質をとり上げた研究は多くない．しかしこの考え方は，非定常な時系列の扱い等において生かされるであろう．

(3) 自己相関 ρ_h およびスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ の推測について

時系列解析において最もよく行なわれる推測のなかに，ρ_h や $f(\lambda)$ の推測がある．これは $\{X_t\}$ に関する分析である．時系列が何カ月 (あるいは何年) ごとに似た傾向が現われるかという周期性に関連した分析は，種々の分野や場合において必要である．

標本を $X_1, X_2, \cdots, X_T$ とする．$h\geqq 0$ として，まず R_h の推定には標本自己共分散 $\hat{R}_h=\sum_{t=1}^{T-h} X_t X_{t+h}/(T-h)$ が用いられ，ρ_h の推定には $\hat{\rho}_h=\hat{R}_h/\hat{R}_0$ が通常用いられている．統計的推測理論の立場からは，ある原理のもとで最も良い推定量を導き出すのが通例であるが，そのようなものは現在までに示されておらず $\hat{R}_h$ とか $\hat{\rho}_h$ のように推定量を先に構成して，その統計的性質 (たとえば平均値，分散，確率分布) が示されているが，これもほとんどが標本数 T が大きいときの漸近理論である ([4]，[9])．仮説検定では $\rho_h=0$ かどうかを調べる必要が生じるが，このための $\hat{\rho}_h$ の確率分布はかなり調べられている([9])．このような議論がむずかしいのは，標本が有限個しか得られないのに知る必要のあるパラメータは無限個 (たとえば ρ_h の推定においては $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots$ を知る必要がある) であること，標本が互いに相関を持っていて数学的取扱いが複雑であり，そのため標本数を大きくしてある程度以上離れた 2 時点の値の相関を無視して，標本が独立の場合の結果の拡張の形で結果を導くなどしないと扱う方法が見出せないことなどがあげられる．このような議論をする時の出発点となる“どのような推定量を良いと考えるか”の基準すら明確でなく，たとえば最尤推定量なども簡単には求められないし，求めてもそれがどのような意味で良いのかがよくわからない．せいぜいいくつかの推定量が比較されている程度である([4]，[9])．

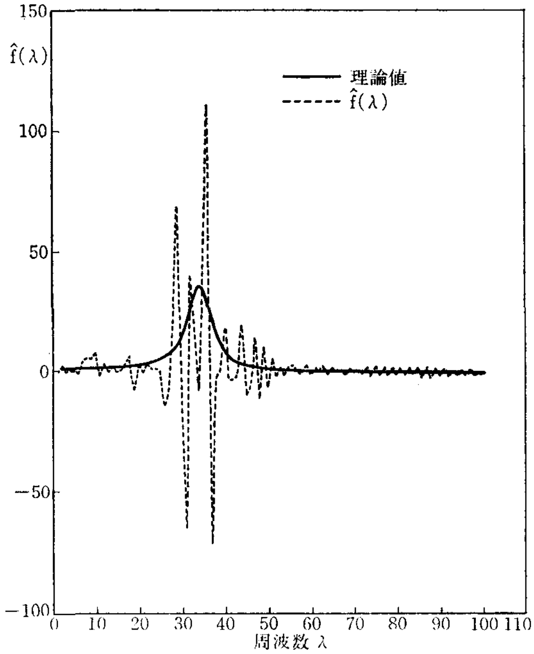

図 2 (a)　標本数 500 で $\hat{f}(\lambda)=\sum_{h=-499}^{499}\hat{R}_h\cos 2\pi h\lambda$

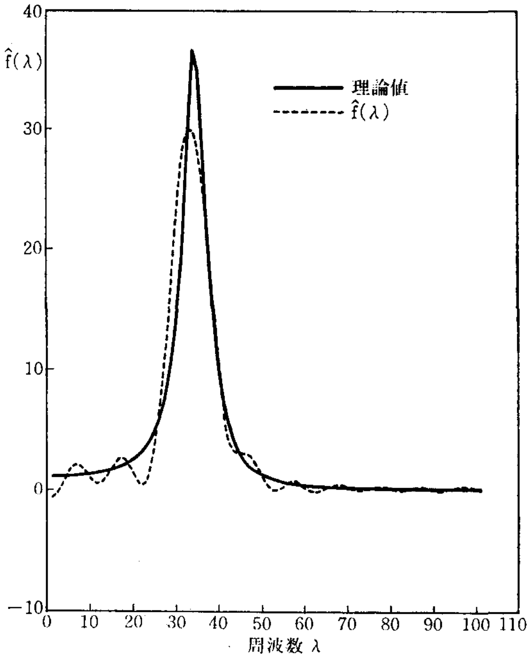

図 2 (b)　標本数 500 で $\hat{f}(\lambda)=\sum_{h=-20}^{20}\hat{R}_h\cos 2\pi h\lambda$

周期性などはある程度 R_h または ρ_h からでもわかるが，どのような周波数の波が強く含まれているかを直接的に調べるには $f(\lambda)$を求める必要がある．ところがこれを(2)式を用いて R_h の推定量を用いて推定しようとすると，無限個の R_h を知る必要があり有限個の標本からは一般的に不可能である．また $\hat{R}_h$ は h がTに近づくに従って平均する数が減少する．たとえば $h=T-1$ の時には $\hat{R}_{T-1}=X_1X_T$ となり，標本の偶然性により値が大きく変動し不安定であり，標本数Tを大きくしてもこの状況は改善されず，h が T に近い $\hat{R}_h$ を用いて $f(\lambda)$の推定を行なうとかえって $f(\lambda)$ の誤差を大きくする．これが $f(\lambda)$の推定のむずかしさである．**図 2 (a)**に $h=T-1$ まで用いた $f(\lambda)$ の推定値（点線）と真の値（実線）が示してある．**図 2 (b)** は h の範囲を $-20\leqq h\leqq 20$ としたもので安定しているが偏りがある．これらのことを考慮に入れて提案されている推定量の1つのタイプは，HをTより小さくてTとともに大きくなる整数とし，$\{w_{h,T}\}$をウエイト（ウィンドウと呼んでいる）とし，

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{h=-H}^{H}w_{h,T}\hat{R}_h\cos 2\pi h\lambda \qquad (4)$$

とするものである．ウィンドウとしては Hamming とか Hanning 等多くのものが提案されている(〔5〕,〔9〕)．最近は計算機の発達もありＦＦＴと呼ばれる推定法も用いられている．しかしどのようなウィンドウを用いるのが良いのか，あるいはどのような推定量が最良のものかは未解決の問題である．古くから周期性に関する推測のため，ピリオドグラム $I(\lambda)=\{(\sum_{t=1}^{T}X_t\cos 2\pi t\lambda)^2+(\sum_{t=1}^{T}X_t\sin 2\pi t\lambda)^2\}/T$ が用いられてきているが，$f(\lambda)$の推定量としては一致性を持たない不安定なものである．しかし X_t に強い周波数の波が含まれている時，その周波数の検出には良いものである．

(4) 有限次元パラメータモデルについて

時系列の自己相関やスペクトル密度関数を知るためには，一般的には(３)で述べたように無限個のパラメータの値を知る必要があるが，これには(３)で述べたように推測上の種々の困難がともなう．そこでこのような困難を避ける上からも，また時系列の確率論的構造を簡明に表現する上からも，有限個（有限次元）のパラメータで表現されるモデル（ＡＲＭＡモデル等）が考えられ，応用上もよく用いられている．現在の時系列分析の理論や応用で最もよく論じられているものの1つであるので，**3.** であらためて論じることにする．

(5) 非定常時系列や非線形な問題について

経済時系列など実際の問題においては定常性の仮定は満たされず，非定常なものも多い．問題のむずかしさもあり非定常な時系列の研究はあまり多くなかったが，最近の時系列分析の研究においてはふえてきている．式(1)

で表わされる時系列も一般的には非定常であるが，これについては（2）で述べたように多くの結果が示されている．最近 Box-Jenkins の〔11〕により有名になった ARIMA (autoregressive integrated moving average) 過程も非定常時系列のモデルである．問題にしている時系列$\{Y_t\}$自身は定常性がないが，値が時点$(t-1)$からtの間にどれだけ増加したか，すなわち$\nabla Y_t=Y_t-Y_{t-1}$, が定常性を持つとき系列$\{\nabla Y_t\}$に 3. で述べるARMAモデルをあてはめて分析しようとするものである．もし$\{\nabla Y_t\}$が定常性を持たないときにはさらに$\nabla^2 Y_t=\nabla Y_t-\nabla Y_{t-1}$を構成していこうとするものである．$Y_t$を式(1)の形で表現するとき$m_t$が$t$の多項式($\{\nabla^d Y_t\}$が定常になったときは$(d-1)$次の多項式)で表わされ，$X_t$が定常過程の時点$t$までの和(累積であるから非定常）で表わされるものに対応する．その他に，3. で述べるARMA過程で係数がとともに変化するモデルや表現(3)において$dZ_1(\lambda)$や$dZ_2(\lambda)$がtとともに変動するモデル(〔15〕)等種々のものが論じられている．これらは定常過程のモデルと何らかの形で関係したものであるが，さらに一般的な確率過程については〔10〕等で推測の問題が論じられている．非定常時系列の予測が〔14〕で論じられている．

非線形な問題も非常にむずかしくまだ多くは論じられていないが，スペクトル密度関数の次数を上げたバイスペクトルや高次スペクトル等も論じられている(〔12〕)．しかしその値がわかることによって時系列のどのような性質がわかることになるか等の時系列の構造との対応の研究もあわせてまだ今後の研究を待たなければならない部分が多い．

3. 有限次元パラメータモデルについて

2. (4) で述べたことをふまえて，いくつかのポイントについて少し詳しく述べることにする．

$\{X_t\}$を平均値が0の弱定常過程とし，$\int \log f(\lambda)d\lambda > -\infty$とする．$X_t$から$(t-1)$以前の値に関係する部分($s\leqq t-1$である$X_s$の線形結合)を引き去った残りを$\varepsilon_t$とする．$\{\varepsilon_t\}$はまた弱定常過程になり，$\varepsilon_{t_1}$と$\varepsilon_{t_2}$は$t_1\neq t_2$なら無相関となる($\{\varepsilon_t\}$はホワイトノイズと呼ばれている．ここでは$E\varepsilon_t^2=1$とする)．$X_t$は一般的に

$$X_t=\theta_0\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}+\cdots \tag{5}$$

$$\varepsilon_t=\varphi_0 X_t+\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\cdots \tag{6}$$

と表現できる(〔4〕)．$\{\theta_l\}$と$\{\varphi_k\}$はtに無関係な定数である．表現(6)は数学的には一般論としては正しくないが，直観的にとらえやすいようにこのように書いておくことにする．Pを十分大きくとれば(6)より

$$\varepsilon_t=\varphi_0 X_t+\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\cdots+\varphi_p X_{t-p} \tag{7}$$

で定まる弱定常過程X_tが一般の弱定常過程を近似するであろうことが推察できるであろう．一般に，(7)で定まる弱定常過程$\{X_t\}$(Pは大きくなくてもよい)をP次の自己回帰 (autoregressive, $AR(p)$と略) 過程という．時点tの値を$t-1, t-2, \cdots, t-p$での値に回帰させた形である．また(5)より，qを十分大きくとれば

$$X_t=\theta_0\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}+\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{8}$$

で定まる$\{X_t\}$は一般の弱定常過程を近似することも推察できるであろう．一般に，(8)で定まる弱定常過程$\{X_t\}$(qは大きくなくてもよい)をq次の移動平均 (moving average, $MA(q)$と略) 過程という．pまたはqを十分大きくとれば，$AR(P)$過程でも$MA(q)$過程でも一般の弱定常過程を近似するが，これらを混合させた

$$\varphi_0 X_t+\varphi_1 X_{t-1}+\cdots+\varphi_p X_{t-p} =\theta_0\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{9}$$

で定まる弱定常過程$\{X_t\}$を(p,q)次の自己回帰移動平均 (ARMA(p,q)と略) 過程と呼び，よく用いられている．

$AR(p)$過程や$MA(q)$過程の$\{R_h\}$や$\{\rho_h\}$，それに$f(\lambda)$は，$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p$($AR(p)$の時)，または$\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_q$($MA(q)$の時) という有限個のパラメータを知ればすべて定められる (〔4〕,〔5〕,〔8〕)．たとえば$AR(p)$過程について$f(\lambda)$は

$$f(\lambda)=1/\{(\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\cos 2\pi k\lambda)^2+(\sum_{k=1}^{p}\varphi_k\sin 2\pi k\lambda)^2\}$$

となり，$MA(q)$過程については

$$f(\lambda)=\{(\sum_{l=0}^{q}\theta_l\cos 2\pi l\lambda)^2+(\sum_{l=1}^{q}\theta_l\sin 2\pi l\lambda)^2\}$$

となる．$ARMA(p,q)$過程についても同様である．

有限個 (有限次元) のパラメータの推定となれば，少なくとも標本数Tが大きい場合についてはよく研究されていてその性質もよく調べられている．$\{X_t\}$が正規過程である場合にこれらのパラメータの最尤推定量はある種の良い性質を持っていて精度も良く，したがって$f(\lambda)$の推定値も安定したものが得られる(〔4〕,〔5〕,〔8〕,〔9〕)．しかしこの場合でも，なるべく未知パラメータの数は少ない方がよく，未知パラメータの数が多くなるにしたがって$f(\lambda)$の推定量等は不安定になり分散が大きくなっていく．したがって取り扱っている弱定常過程の性質によって本来$AR(p)$をあてはめた方がよいか$MA(q)$をあてはめた方がよいかが異なる．たとえば$AR(1)$に近い$\{X_t\}$(未知パラメータはφ_0とφ_1の2個)にMAモデ

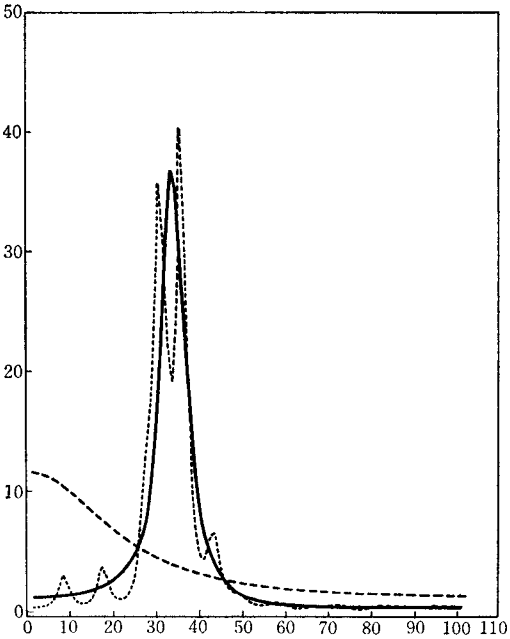

図 3 (a)　標本数 500 で $AR(1)$ のあてはめ(破線)と $AR(30)$ のあてはめ(点線)による $f(\lambda)$ の推定値．実線は理論値．

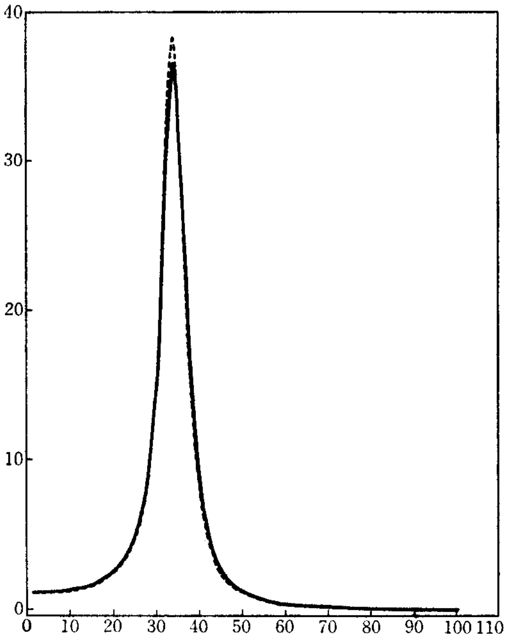

図 3 (b)　標本数 500 で $AR(2)$ のあてはめによる $f(\lambda)$ の推定値(点線)．実線は理論値．

ルをあてはめると q は大きくとらなければならない．取り扱っている時系列が強い周期の波を含んでいる場合は $AR(p)$ モデルが効率的で，すべての周波数の波が似た強さで入っている場合には $MA(q)$ が効率的のようである．$ARMA(p,q)$ は一応両者をあわせ持っている．

このような有限次元パラメータモデルのあてはめは，次数 p や q が適当にあてはめられていれば非常に精度の良い推定値が得られるが，p や q が本当の次数より小さくあてはめてしまうととんでもない誤りを犯す可能性があることである．図 3 (a) は本当は $AR(2)$ 過程である $\{X_t\}$ に $AR(1)$ モデルをあてはめて $f(\lambda)$ を求めたものが破線で示してある．このような危険を避けるため p や q を大きくとればよいかというと，p や q を不必要に大きくすると推定すべきパラメータ数が増加しそのぶん誤差が加わり，推定値の不安定さが増していく．本当は $AR(2)$ 過程である $\{X_t\}$ に $AR(30)$ のモデルをあてはめ $f(\lambda)$ を求めたものが図 3 (b) の点線である．p や q を大きくするとだんだん (4) の推定値と似た現象が出てくる．この $\{X_t\}$ からの標本に，真の次数と同じ次数の $AR(2)$ モデルをあてはめ $f(\lambda)$ を求めたものが図 4 の点線である．このような意味から p や q をどのように定めればよいかは，このようなモデルのあてはめでは重要で，赤池弘次氏がユニークな考え方で情報量規準ＡＩＣを提案([3]，[7])，その後何人かの人が少し異なった統計量の提案をしている．

他に有限次元パラメータモデルとしては，スペクトル密度関数を別の形で有限個のパラメータで表現したもの等がある．

参 考 文 献

A．全般的なもの

[1]　A. C. ハーディ(国友直人・山本拓共訳)：時系列モデル入門，東京大学出版会(1985)

[2]　Chatfield, C.: The Analysis of Time Series; An Introduction, Second Edidtion, Chapman and Hall(1980)

B．本文に関連したもの

[3]　赤池弘次，中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，サイエンス社(1972)

[4]　藤井光昭：時系列解析，コロナ社（現代応用数学講座-3）(1974)

[5]　川嶋弘尚，酒井英昭：現代スペクトル解析，森北出版(1989)

[6]　溝口敏行，浜田宗雄：経済時系列の分析，勁草書房(1969)

[7]　坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎：情報量統計

学，共立出版（情報科学講座A・5・4）(1983)

[8] 杉原左右一，時系列の統計的研究，東洋経済新報社(1984)

[9] Anderson, T.W.: The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley & Sons(1958)

[10] Basawa, I.V. & Prakasa Rao, B.L.S.: Statistical Inference for Stochastic Processes, Academic Press(1980)

[11] Box, G. E. P. & Jenkins, G. M.: Time Series Analysis ; Forecasting and Control, Revised Edition, Holden-Day(1976)

[12] Brillinger, D.R.: Time Series; Data Analysis and Theory, Holden-Day(1981)

[13] Brockwell, P. J. & Davis, R. A.: Time Series; Theory and Methods, Springer-Verlag (1987)

[14] Makridakis, S., Andersen, A., Carbone, R. & Fildes, R.: The Forecasting Accuracy of Major Time Series Methods, John Wiley & Sons(1984)

[15] Priestley, M.B.: Spectral Analysis and Time Series, Vol.1 & 2, Academic Press(1981)