ボロノイ図

腰塚　武志

1. はじめに

Voronoi 図という用語はここ数年で定着したようである．日本ＯＲ学会やその周辺では，計算幾何学の主要なテーマの１つでもあって，かなり以前から知られているが，物理学でも結晶構造の分析に３次元の Voronoi 図が用いられたり，生物学との関係でも縄張りの分析や，神経細胞の変化の分析等にも用いられている．

Voronoi図とは，この図を出現せしめるn個の点P_1, $P_2, \cdots, P_n$（他とまぎらわしい場合は母点という）があるとき，平面上のすべての点をこの母点のどれかに帰属させたものである．帰属方法は，ある点にとって母点 P_1, $P_2, \cdots, P_n$ の内で最も近い母点に，としている．

厳密には母点 P_i の Voronoi 領域 $V(P_i)$を

$$V(P_i)=\bigcap_{j\neq i}\{P|d(P,P_i)<d(P,P_j)\} \qquad (1)$$

と定義する（ただし$d(P,P_i)$で点Pと点P_iとのユークリッド距離を表わすものとする）．そして$V(P_1), V(P_2)$, $\cdots, V(P_n)$ による平面の分割を Voronoi 図と呼び，Voronoi 領域の境界を Voronoi 辺（２つの母点の垂直２等分線）という．

言葉や数式で書くとめんどうだが，有限な領域において作成したVoronoi図の例を図１に示す．この図をみればVoronoi図の意味は一目瞭然であろう．Voronoi 領域$V(P_i)$はP_iを最近点とする点集合であり，P_iの一種の"勢力圏"とみなすこともでき，地理学はいうにおよばずさまざまな分野で用いられている．これらはVoronoi図が勢力圏であることに着目した素朴なものから，直観ではわからない Voronoi 図がもっているいくつかの重要な性質にもとづいた応用まで多岐にわたっている．この Voronoi 図の重要な性質に関する厳密な議論は紙面の都合で文献［1］，［2］にゆずることにして，ここではVoronoi 図を用いた１つの問題を例にとり，以下に述べることにしたい．なお Voronoi図の作成に関しては，

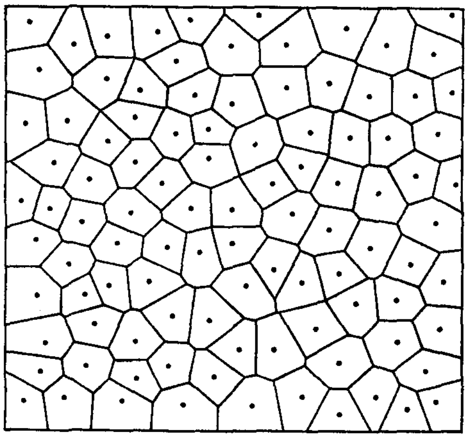

図 1　Voronoi 図

現実的に最も速く正確な方法が日本で開発されており（文献［1］），最近一段と完成の域に達しつつある（文献［3］）．

2. 最近隣距離

ここでは母点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ をある種の都市施設と考えよう．都市施設を郵便局とし，ある地点が与えられたとき最も近い郵便局を答える問題すなわち Post-office 問題がよく例題として呈示される．この場合あらかじめ郵便局の位置$P_1, P_2, \cdots, P_n$でVoronoi図を作製しておけば，与えられた地点がどの Voronoi 領域$V(P_i)$に属しているかによって，ただちに解答することができる．

次に問題をもう少し定量的にし，すべての人が最も近い施設（郵便局）にゆくものとして，全体でその距離の総和F(平均値でも本質的には同じことである)がどのようになるかについて議論しよう．この距離の総和Fは，施設の数が同じなら，なるべく小さくなった方がよいことは明らかで，Fを用いれば施設の配置状況を全体として評価できる．いま平面の人口分布が $\mu(x)$ で与えられていたとし，施設 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の座標をそれぞれ x_1, $x_2, \cdots, x_n$ とすればFは

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\int \min_i \|x-x_i\| \mu(x)dx \qquad (2)$$

こしづか　たけし　筑波大学　社会工学系
〒305 つくば市天王台１－１－１

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

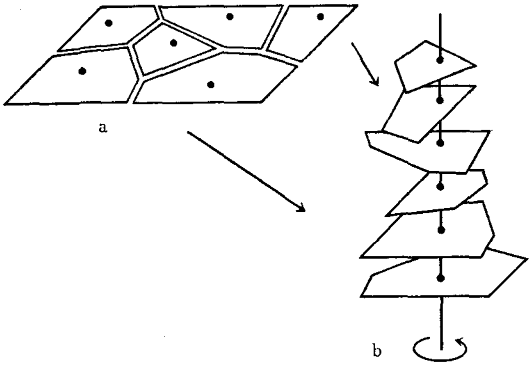

図 2 Voronoi 図の分解

と表わされる．上式における $\min_{i}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|$ が式を複雑(考える上で)にしているが，点 $P_1, P_2, \cdots, P_p$ によってあらかじめ Voronoi 図が作成してあれば

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)=\sum_{i=1}^{n}\int_{V(P_i)}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|\,\mu(x)dx \quad (3)$$

と書き換えることができる．つまりいちいち各点ごとに近い母点を選ぶかわりに，各 Voronoi 領域 $V(P_i)$ ごとに積分し，これを加えればよい．このことから，地理的最適化問題は見通しのよいものになり， 人口分布 $\mu(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき F を最小にする $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ すなわち施設 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の位置を求めることが可能である(文献 [1])．

ところで，上記の問題は距離の総和を問題にした．都市計画の見地からすると総和の F も意義があるが，どのくらいの人が最近施設からどのような距離になるか，という距離の分布をみることも重要である．そこで最近施設までの距離が r 以内の人を $P(r)$ で表示すれば

$$P(r)=\sum_{i=1}^{n}\int_{V(P_i)\cap\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|<r}\mu(\boldsymbol{x})dx \quad (4)$$

と書くことができる．これを直観的に説明しようとすれば**図 2** の a のような Voronoi 図を Voronoi 辺で切り離し，各母点に穴を空けて図 2 の b のように $P_1, P_2, \cdots, P_n$ を共通点とし，これから半径 r 以内の人々を求めたことに等しい．詳しい議論は省略するが，$P(r)$ を r で微分して密度を出すことも可能であり，図 1 の Voronoi 図の母点を施設とし，人口の分布を一様としたときの最適(最近隣距離)の分布を**図 3** のように示すことができる．これによって母点の分布パターンを分析することが可能だが，これについては文献 [4] を参照されたい．

3. Voronoi 図の意味

さて Voronoi 図とは何だろうか．筆者はこの Voronoi

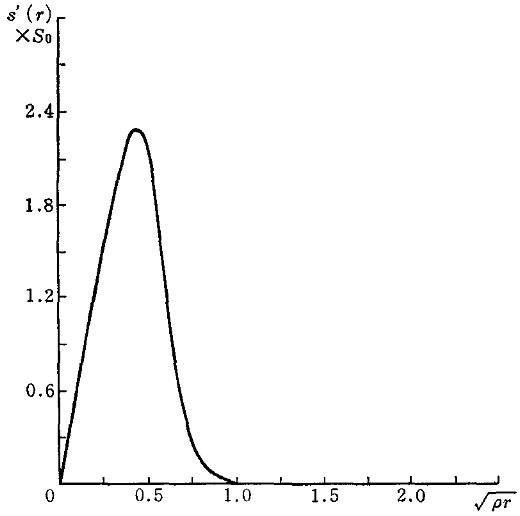

図 3 最近隣距離分布(図 1 における)

図こそ，平面に分布している母点同士の相互の位置関係(幾何学的構造) を顕在化したものだと考えている．この相互の位置関係について，人間の目は，少し正確さや精度を欠くものの，知覚できるすぐれた能力をもっている．先の郵便局の問題では，場合によっては 2 番目，3 番目を選んでしまうことがあるかもしれないが，多くの場合 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の分布図をみてただちにわかると思われる．また点の分布をみて，どこが比較的空いているかを判定することはそれほど難しいことではない．実際**図 4** をみて，どこが最も空いているか (すなわち最も半径の大きい円をどこに置くことができるか，最大空円問

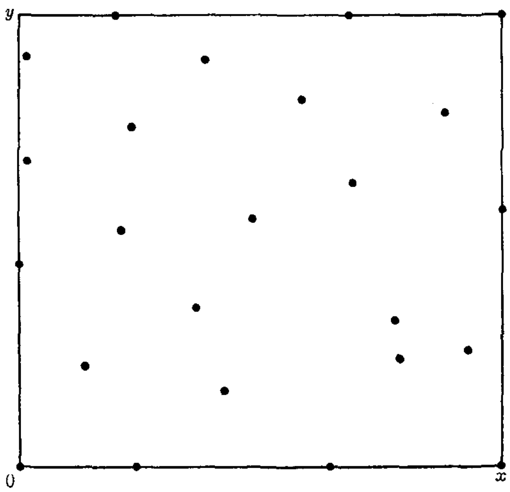

図 4 最大空円題題

正解は x 方向 0 から 1 辺の0.57の近く

y 方向 0 から 1 辺の0.38

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

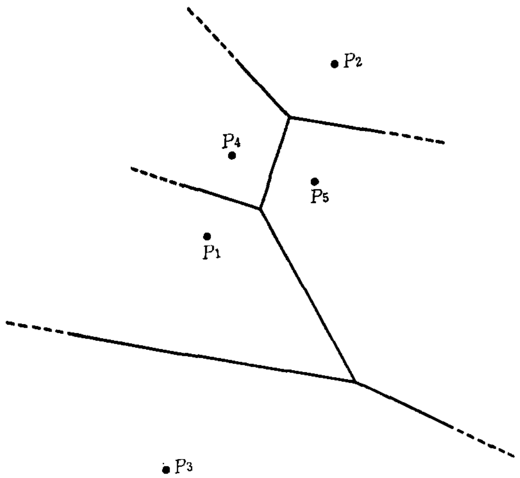

図 5　相互の位置関係

題といわれる）を目でみただけで見当をつけていただきたい．たぶん正解に近いところを選ぶことができるだろう．しかし，厳密にこれを求めるとなると Voronoi 図を作成しないと不可能である．それほど厳密でなく，人間の知覚くらいの“いいかげんさ”でよいという条件でも，これを計算機でさせる場合には，おそらくはじめに Voronoi 図を作成することになるのだろう．

点相互の位置関係というと抽象的だが，この関係を次のようにも説明することができる．**図 5** は Voronoi 図の部分であるが，この図において点 P_1 を中心にして点の相互関係をみていこう．まず P_1 と P_2 の距離 $d(P_1, P_2)$ と P_1 と P_3 の距離 $d(P_1, P_3)$ に注目すれば

$$d(P_1, P_2) < d(P_1, P_3)$$

で，P_1 にとっては P_2 の方が P_3 よりも近い．この関係はあくまで P_1，P_2，P_3 の3点以外の点は考慮しないところで成立するものである．

しかし P_1 からみて P_2 の方向には P_4 と P_5 があり，ある意味で P_2 は P_4 と P_5 に邪魔（ないし防御）されていて P_1 と P_2 は Voronoi 辺を共用するという直接の関係をもっていない．ところが P_1 からみて P_3 の方向には他の点がないので Voronoi 辺を共有し，ユークリッド距離は P_2 よりも遠いもののある意味では“近い”関係ということもできよう．このような関係は Voronoi 辺を平面グラフとしたときの双対グラフである Delaunay 網で，きちんと表わすことが可能である．

4. おわりに

以上で，Voronoi 図は平面における点群の相互位置関係を呈示した基本的なものであり，数々の応用がなされていることはうなづけよう．1次元の点列に関して，計算処理の前段階でよく点列を大きさの順に並び換えることがあるが，この操作は Voronoi 図作製の退化したものともみなすことができる．この場合1次元は“つまらない”問題であり，1次元から2次元への拡大は単なる次元数の増加を越えた問題が存在すると思われる．2次元から3次元への拡張は，Voronoi 辺が面となるが，本質点には飛躍がなく，図5のような関係を三次元でも同様に議論することができる．

地域や都市の問題に関して，定式化しやすいという理由で，はじめ1次元で議論しその成果を2次元に拡げようという態度をよくみかける．このような方針も時には有効であることは否定できない．しかし Voronoi 図のように基本は2次元にあって，1次元での考察にはあまり意義がないという問題も存在する．このような意味で，Voronoi 図について考えることは，概念的にも大変重要なものを含んでいるといえるだろう．

参 考 文 献

［1］伊理正夫，腰塚武志，他：計算幾何学と地理情報処理．共立出版(1986)．

［2］谷村秀彦，腰塚武志，他：都市計画数理．朝倉書店(1986)．

［3］杉原厚吉，伊理正夫：数値的に安定なボロノイ図作成法．日本ＯＲ学会秋季研究発表会アブストラクト集(1988)．

［4］腰塚武志：2次元立地問題における直観的選択パターンの効率．日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集(1989)．

×　　×　　×　　×

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．