以上のように，改良マーコビッツ・モデル(3)は基本モデル(1)より操作性が良いことが確かめられたわけだが，ファイナンスにおけるORの出番は，これ以外にもいろいろある．たとえば様々な最適化手法をはじめ，確率過程論や統計分析，意思決定分析，DSS……などが最もストレートに利用できるのがこの分野である．実際，ファイナンス先進国のアメリカでは，ORの専門家たちが作ったモデルや手法が重要な役割を果たしている……その好例はオプション売買戦略やポートフォリオ・インシュアランスである……のだが，わが国ではファイナンスはまだ（少数の）経済学者の領土になっているようである．ぜひともこの分野をORの方向に引き寄せて工学化を図り，「理財工学」として発展させたい[4]，というのが筆者の願望であるが，当然のこととして道は剣しい．読者諸兄姉のご支援をお願いする次第である．

参考文献

[1] H.ワグナー著，森村・伊理監訳 オペレーションズ・リサーチ入門4，培風館．

[2] H. Konno, "Portfolio Optimization Using L_1 Risk Measure", IHSS 88-9 , Inst. of Human and Social Sciences, Tokyo Inst. of Technology, 1988.

[3] H. Konno, "Piecewise Linear Risk Functions and Portfolio Optimization",「投資と金融のOR」シンポジウム報告集，日本OR学会，1989.

[4] 今野 浩，「理財工学のすすめ」，オペレーションズ・リサーチ34，pp. 6-7，1989.

多次元デュアレーション(MDD)を用いた債券ポートフォリオ分析

森平 爽一郎

1. はじめに

1970年代後半から始まった金利水準の乱高下は，それまでの安全資産投資としての債券投資が，株式投資に劣らずハイ・リスク＝ハイリターンであることを明らかにした．本稿の目的は，債券投資の伝統的なリスク指標である「デュアレーション (Duration)」を多次元に拡張することによって得られた多次元デュアレーションの重要性と，その債券ポートフォリオ分析への応用の可能性について検討することにある(注1)．特にこの場合，目標計画法（ゴールプログラミング）が，実際的な債券ポートフォリオ・モデルの構築にあたって，有効であることを示したいと思う．

2. 債券投資リスクの尺度としての「多次元」デュアレーション

債券の「理論」価格は，将来得られる利子(クーポン)と満期日における元本の償還金額とを，現在の価値に割引いたものに他ならない．t 期のクーポンを C_t，満期までの期間を $T\ (t=1,2,\cdots,T)$，t 期のクーポンを現存価値に引きもどすための「割引率」を y_t とすると(注2)，現時点における債券価格(P_0)は，

$$(1)\quad P_0=\frac{C_1}{(1+y_1)^1}+\frac{C_2}{(1+y_2)^2}+\cdots+\frac{C_T}{(1+y)^T}$$

と表わすことができる．ただしここで，$C_T=T$ 期のクーポン＋元本と考えることとする．

貸倒れ(Default)や，満期前の任意償還(Call)のない債券，たとえば，日本の国債などでは，C_t や T は $t=0$ において確実にその値が知られており，なんら不確実性は存在しないと考えてよい．したがって，債券価格変動の不確実性は，割引率 (y_t) が予期されない変化を示すことから生ずると考えてよい．割引率 ($y_1, y_2, \cdots, y_T$) がどのように決定され，それを実際のデータからどのように推定すべきかについては，利子率の期間構造 (Term Structure of Interest Rate) の理論をめぐるさまざまな研究と残された問題がある．ここでは，$y_t(t=1,2,\cdots,T)$ が時間 (t) にかかわらず一定である ($y_t=y\ \forall t$) と仮定し，その変化が債券価格にどのような影響を与えるのかを考えてみよう(注3)．

もりだいら そういちろう
福島大学 経済学部
〒960-12 福島市松川町

この点を明らかにするために，式(1)を割引率(y)の関数と考え，テーラー展開し，両辺をP_0で除し，整理すると次のような結果が得られる．ただしここでは説明を容易にするために$K=4$次までの展開で十分である例を述べることにする．

$$(2)\quad \left(\frac{dP_0}{P_0}\right)\approx -\left[\left(g-\frac{g^2}{2}+\frac{g^3}{3}-\frac{g^4}{4}\right)D_1-\left(\frac{g^2}{2}-\frac{g^3}{2}+\frac{11g^4}{24}\right)D_2+\left(\frac{g^3}{6}+\frac{g^4}{4}\right)D_3-\frac{g^4}{24}D_4\right]$$

ここで，

$$(3)\quad g\equiv\frac{d(1+y)}{1+y}=\frac{dy}{1+y},$$

$$(4)\quad D_j\equiv\sum_{t=1}^{T}t^j w_t,$$

$$(5)\quad w_t\equiv\frac{C_t(1+y)^{-t}}{P_0},\quad 0\leqslant w_t\leqslant 1,\quad \sum_{t=1}^{T}w_t=1$$

上の式(3)は，割引率の「変化率」を示し，式(4)のD_jはj次元のデュアレーション(MDD:Multi-Dimensional Duration)と定義できよう．なぜならば，$j=1$の場合，式(4)は，従来数多くの保険数理士(アクチャアリー)や，ヒックス，クープマンズ，サムエルソンなどの著名な経済学者によって，それぞれ別個によって発見されてきた伝統的なデュアレーションに等しいからである．$j=1$の場合は,D_jは,式(5)によって，w_tがあたかも“確率”であるかのように考えたとき，ヒックスが言うように「平均満期(Average Maturity)」であると考えることができる．したがって，$D_2, D_3\cdots D_K$は，それとのアナロジーで，原点（現時点)，すなわち$t=0$からクーポンの支払われる期間の「分散」,「光度」,「歪度」などを表わしていると考えることができるかもしれない．

すなわち，式(2)は，割引率の予想外の変化($d(1+y)$)が生じたときの債券価格の変化(収益率)が，債券投資のリスクの指標である多次元のデュアレーション(D_j)によって表現できることを示している．

3. 「多次元デュアレーション」を用いた債券ポートフォリオ・モデル

多次元デュアレーションを用いることの利点の1つは，債券投資に当って，一定のリスクの下でリターンを最大化するようなモデルを数理計画法を適用することによって比較的容易に構築することができることにある．

いま，債券投資の計画期間がH年間であるとしよう．債券投資の目的は，割引率がいかに変化しようとも($dy \leqslant 0$)，この現在からH年後の債券ポートフォリオの価値がそれによって，なんら影響を受けないようにすることにある．つまり，利子率リスクからの免疫化（イミュニゼーション：Immunization）を達成することである．これは，上で示した多次元デュアレーション(D_j)を用いると，

$$(6)\quad D_j=H^j \text{ for } j=1,2,\cdots,K$$

とした場合に実現されることを証明することができる(注4)．つまり，j次元の多次元デュアレーションを計画期のj乗に等しくするような債券ポートフォリオを組めばよい．幸いなことに，n銘柄の債券からなる債券ポートフォリオのj次元のデュアレーション(D_{pj})は，個々の銘柄のj次元のデュアレーション(D_{ij})を，それに対する投資比率(x_i)で加重平均したものに等しい．つまり，

$$(7)\quad D_{Pj}=\sum_{i=1}^{n}x_i D_{ij}\quad ここで\quad \sum_{i=1}^{1}x_i=1$$

が成り立つ．

式(6)と(7)を同時に満足する投資比率x_i ($i=1,2,\cdots,n$)の決定，すなわち利子率リスクを最小($dP/P=0$)にする債券ポートフォリオの決定は，実際のデータから容易に可能である．

表1は，1988年12月26日現在の4つの債券の市場取引データとそれにもとづいて計算された多次元デュアレーションを示している．計画期間を5年($H=5$)，すなわち，1993年12月25日を計画最終日としたときに，その時点でこの4つの債券からなる債券ポートフォリオの価値が，割引率の（1回の）変化に対して不変であるような投資比率(x_1, x_2, x_3, x_4)は，次のような連立1次方程式を解くことによって得られる．

$$(8)\quad \begin{bmatrix} 2.065 & 3.682 & 6.018 & 6.855 \\ 4.35 & 14.34 & 39.81 & 51.82 \\ 9.28 & 57.09 & 272.11 & 404.69 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 125 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これから，$x_1=-0.39, x_2=1.00, x_3=.63, x_4=-0.25$となる．つまり，銘柄1と4をそれぞれ39%，25%空売り，それによって銘柄3を買い，手持資金全額を銘柄2に投資することが，金利リスクを最小にするという意味で最適な戦略となる．しかしながら一般に，債券を空売りすることは，株式以上に困難であり，さらに多くの機関投資家にとっては，追加借り入れによる投資も法的に禁じられている場合が多い．また上のモデルでは，リターンの最大化が考慮されていないという欠点がある．

こうした点を補うものとして，線形計画法(ＬＰ)あるいは，目標計画法（ＧＰ）を用いることが考えられる．

表 1　債券価格，利回りおよび多次元デュアレーション（1988年1月26日）

番号 (i)	発行回数	満期（年）	残存期間 (T)（年）	クーポンレート（%）	価格(P)（円）	利回り(y)（%）	多次元デュアレーション D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}	D_{i4}	D_{i5}
1	33	91年2月20日	2.153	8	108.14	4.053	2.065	4.35	9.28	19.87	42.66
2	53	93年1月20日	4.071	7.5	113.07	4.025	3.682	14.34	57.09	229.39	926.14
3	81	96年1月20日	7.071	6.1	111.88	4.185	6.018	39.81	272.11	1885.47	13155.55
4	98	97年1月20日	8.074	5.0	102.83	4.626	6.855	51.82	404.69	3203.21	25526.79

ＬＰによる定式化に当っては，問題の性質上式(7)，(6)のような等式による制約条件が多くなるため，可能解が得られない場合が多い．したがってここでは目標計画法による定式化例を示そう．

上と同じデータを用いた場合の1つの例として，次のような場合を考えてみよう．

(9-1)　Minimize→ $P_2 d_3^- + P_1(d_4^- + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_5^+) + P_4(d_6^- + d_6^+)$

(9-2)　Subject to　$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1.0$

(9-3)　$4.053X_1 + 4.025X_2 + 4.185X_3 + 4.626X_4 + d_3^- - d_3^+ = 4.3$

(9-4)　$2.065X_1 + 3.682X_2 + 6.018X_3 + 6.855X_4 + d_4^- - d_4^+ = 5$

(9-5)　$4.35X_1 + 14.34X_2 + 39.81X_3 + 51.82X_4 + d_5^- - d_5^+ = 5^2$

(9-6)　$9.28X_1 + 57.09X_2 + 272.11X_3 + 404.69X_4 + d_6^- - d_6^+ = 5^3$

(9-7)　$X_1 \geqq 0,\ X_2 \geqq 0,\ X_3 \geqq 0,\ X_4 \geqq 0$

$d_j^+,\ d_j^- \geqq 0$

上の式(9-2)は，この4銘柄への債券の投資比率の合計が1に等しくなければならないというファンド・マネージャーにとっての予算制約を示したものである．式(9-3)は，債券ポートフォリオの利回りの目標を4.3％としたときそれが個々の債券の利回り（ここでは y_i）の加重平均として計算されることを示している．式(9-4)から(9-5)までは，式(6)と(7)に対応した債券ポートフォリオ・リスク目標を示している．したがって，債券のリスクとリターンを考慮したポートフォリオ問題は，式(9-1)に示されるように，ポートフォリオ利回りをなるべく4.3％に近づけるように，またポートフォリオの多次元デュアレーション（D_{Pj}, $j=1,2,3$）をそれぞれ計画期間(H)の j 乗になるべく等しくするようにすることに等しい．目的関数である式(9-1)の $P_j(j=1,2,3,4)$は，目標の優先順位を示している．この場合，ポートフォリオの伝統的なデュアレーション（D_1）を計画期間に一致させることを第1に達成されるべき目標とし，以下，ポートフォリオの利回り，2次，3次のデュアレーション目標の順位としている．

こうした問題は，適当なＬＰパッケージを用いることによって容易に解くことができる．ここでは，会話型のＬＰパッケージであるLINDOを用いた例を示そう．ただし，LINDOでの実行に当っては，計算の容易さを考えて $P_1=P_2=P_3=P_4=1$，すなわちすべての目標について同じ優先順位とする．ただし，1次元のデュアレーションを計画期間に一致させることの伝統的なアプローチを考慮して，その目標のウエートとして，ad-hoc であ

```
MIN        D3M+300 D4M+300 D4P+D5M+D5P+D6M+D6P
SUBJECT TO
           2)  X1+X2+X3+X4=1
           3)  D3M+4.053X1+4.025X2+4.185X3+4.626X4-D3P=4.3
           4)  D4M-D4P+2.065X1+3.682X2+6.018X3+6.855X4=5
           5)  D5M-D5P+4.35X1+14.34X2+39.81X3+5.82X4=25
           6)  D6M-D6P+9.28X1+57.09X2+272.11X3+404.69X4=125
END
```

図 1　目標計画法による，多次元デュアレーションを用いた債券ポートフォリオ・モデル

（注）D1M，D2M…，D1P，D2P…はそれぞれ本文中における d_1^-, d_2^-…, d_1^+, d_2^+…にあたり，目標値からのマイナスあるいは，プラスの偏差を表わしている．

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 8

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 57,3021400

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D3M	.184726	.000000
D4M	.000000	197.119000
D4P	.000000	402.881000
D5M	.000000	2.000000
D5P	3.710489	.000000
D6M	.000000	2.000000
D6P	53.406930	.000000
X1	.000000	108.530500
X2	.435788	.000000
X3	.564212	.000000
X4	.000000	58.037630
D3P	.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	311.402800
3)	.000000	−1.000000
4)	.000000	−102.881000
5)	.000000	1.000000
6)	.000000	1.000000

図 2 目標計画法による解

るが300という値を与えて計算をした．

図1に LINDO におけるモデルが，**図2**に最適解が示されている．前と連立方程式を解く方法によった場合と異なり，空売りができない($x_j \geqq 0$)こと，およびポートフォリオの利回りをも考慮したことによって，$x_1=.0$, $x_2=.44$, $x_3=.56$, $x_4=.0$ となり，銘柄2と3の債券へそれぞれ44%，56%の割合で集中投資することが望ましいことがわかる．$d_5^-=3.7$, $d_6^-=53.4$ であることから，ポートフォリオの2次と4次のデュアレーションをそれぞれ $5^2=25$年^2 と $5^3=125$年^3 に近づけるという目標が，3.7年^2 と 53.4年^3 超過して達成されたことがわかる．これに対し，ポートフォリオの利回りは4.3%の目標を0.18%下回ることとなっている($d_3^P=.184$)．この他，感度分析や，目標の優先順位やウエートを色々と対話形式で変えることによってより実際的なポートフォリオを構築することができる．

また，この解を伝統的なデュアレーション(D_1)を計画期間($H=5$)に等しくすることのみを考え，より高次のデュアレーション($D_2, D_3\cdots$)を考えない場合と比較することも興味あることであろう．つまり図1において，第5行と第6行の制約式を削除し，最適解を求めると，$x_1=.33$, $x_2=.30$, $x_4=.36$ となり，ポートフォリオの利回り目標4.3%が正確に達成されることがわかる．つまり，まったく異なった結果が得られたわけである．この点からも，次数2以上の多次元デュアレーションを用いて債券ポートフォリオを構築することの重要性がわかる．

注(1) ここで示された多次元デュアレーションの詳細については，森平爽一郎「多次元デュアレーションとその応用：イミュナイゼーションと資産負債管理（ALM)」，MTECジャーナル，2(1)，1989年7月および，「多次元デュアレーションによる債券先物ヘッジ比率の決定」，商学論集(福島大学)，63(2)，1989年を参照のこと．

注(2) ここで言う「割引率」とは，厳密には，スポット利回り(Spot Yield)と呼ばれるものであるべきである．

注(3) このように考えることの1つのメリットは，債券価格データから最終利回り(Yield-To-Maturity)として割引率(y)を簡単に計算できることに他ならない．

注(4) 証明については，上記森平論文を参照．