投資と金融のOR

今野　浩

この特集の狙いは，ORの専門家以外の人々に対してORの有効性を平易に解説することだそうである．つまり，あまり数式を使わずに「投資と金融」におけるORの有難味を述べるのが私に与えられた課題のようである．

さて，ORとファイナンス理論の接点として最も良く知られているのは，マーコビッツのポートフォリオ選択理論であろう．これは，多数の銘柄に投資を分散させることによって，一定の利益を確保しながらリスクを最小化しよう，あるいは一定のリスクの下で利益を最大化しようというもので，ファイナンスの教科書はもとより，ORの標準的な教科書（たとえば[1]など）にも載っているものである．そこで，まずこのモデルの基本を簡単におさらいしておこう．

いまn種の投資対象$S_j(j=1,\cdots,n)$があるものとし，S_jの単位期間あたりの収益率をR_jとしよう．すると，投資家がS_jにx_j円を投資するポートフォリオから得られる収益は

$$R(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} R_j x_j$$

と表わされる．R_jは一定の分布にしたがう確率変数である．マーコビッツは投資に伴うリスクの指標として$R(x_1,\cdots,x_n)$の標準偏差を採用し，ポートフォリオ選択問題を

$$(1)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sqrt{V[R(x_1,\cdots,x_n)]} \\ \text{条　件} & E[R(x_1,\cdots,x_n)]\geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j=M,\ \ x_j\geqq 0,\ \ j=1,\cdots,n \end{array}\right.$$

と定式化した．ここで，Mは投資家の投資金額，r_0は投資家が要求する最小の平均収益率，そして$E[\cdot]$，$V[\cdot]$はそれぞれカッコ内の確率変数の平均と分散を表わす記号である．

R_jの平均をr_j，R_jとR_kの共分散をσ_{jk}とすると，問題(1)は次の2次計画問題：

$$(2)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_j x_k \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j=M,\ \ x_j\geqq 0,\ \ j=1,\cdots,n \end{array}\right.$$

と等価である．

マーコビッツがこのような形に問題を定式化したのは，いまからちょうど30年前の1959年のことであった．ところが，良く知られている割には，このモデルは最近まであまり本格的には利用されなかったようである．その第1の理由は，株の将来の平均収益率や共分散を予測するのに手間がかかることである．そこで，通常は過去の時系列データからこれを推定してやるわけだが，仮にそうやったとしても，$n\approx 1{,}000$といった大型の2次計画問題は手軽に解けないことが，実用上のネックとなっていた．このあたりは，最近かなりの改善が見られるが，実務家の心理的負担は依然として大きいようである．

そのかわり，というのもおかしいが，マーコビッツ・モデルは，1960年代半ばに出現したシャープ教授らのCAPM(Capital Asset Pricing Model)の基本として重要な役割を果たすことになった．このCAPMというのは，経済学者が得意とする“均衡”理論モデルであって，いくつかの仮定の下で

すべての投資家は，市場平均ポートフォリオと無危険資産（たとえば定期預金）のみに投資する

という驚くべき結果を導いている．また，これを用いてS_jの平均収益率r_jと市場平均ポートフォリオの収益率r_Mの間に

$$r_j=r_F+\beta_j(r_M-r_F),\ \ j=1,\cdots,n$$

という関係が成立することを主張している．ここでr_Fは無危険資産の利率，β_jはS_jのベータ値と呼ばれるものである．β_jが大きい……たとえば2.0以上……銘柄は市場平均収益の変動に対して敏感に反応するハイ・リスク株とされる．β_jを求める手間は，問題(2)を解く手間よりはるかに少ないため，70年代を通じてこのベータ値

こんの　ひろし　東京工業大学　工学部
〒152 目黒区大岡山2―12―1

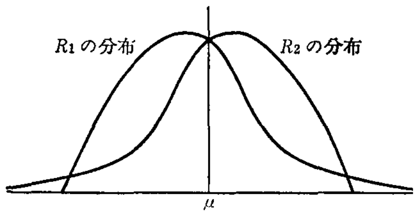

図 1

が銘柄のリスクを測る指標として一世を風靡したのであった.

かくして，OR的発想にもとづくマーコビッツ・モデルは，シャープ教授の均衡モデルの踏み台にされてしまったのだが,これではマーコビッツ教授は浮かばれない，というのが筆者の感想である．というのは，マーコビッツ・モデルからCAPMを導くためには，シャープ教授も認めるとおりいくつかの heroic (英雄的) な仮定が必要となるのである．理論の美しさを求めるために，現実離れした仮定を設けることは，経済学においてはさほど珍しいことではないが，ORの立場からは stunning(腰を抜かすよう) な仮定といった方があたっている.

そこで筆者は，マーコビッツ教授の当初の意図を汲んで，ORモデルの復権をもくろんでいる昨今であるが，それについて述べる前に，マーコビッツ・モデルの技術的な問題点をもう2つ指摘しておこう.

(a) 投資のリスクを収益の標準偏差で表わすことは果たして妥当か？　たとえば，図1のように平均と分散が全く同じ2つの銘柄 S_1, S_2 を比べると，誰でも S_2 より S_1 の方を好むはずだが，マーコビッツ・モデルはこの両者を区別できない.

(b) 問題 (2) を解いた結果，多数の銘柄に少額ずつ分散投資するのが良いことがわかったとして，実際にそのとおりやろうとすると，取引コストが嵩むうえに取引の最小単位以下の端数処理が厄介である.

さて，改良マーコビッツ・モデルのポイントは，投資のリスク指標として，収益の標準偏差のかわりに絶対偏差を採用することである [2]. X を確率変数とし，その密度関数を $f(x)$ とすると，その絶対偏差 $W(X)$ は

$$W(X)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|f(x)dx$$

で与えられる. μ はもちろん X の平均値である.

絶対偏差は，定義からもわかるとおり標準偏差と良く似た量であるが，ふつうの場合は取扱いがややこしいので敬遠されがちである．しかし，ポートフォリオ選択問題(1)の目的関数を $W[R(x_1,\cdots,x_n)]$ でおきかえた問題

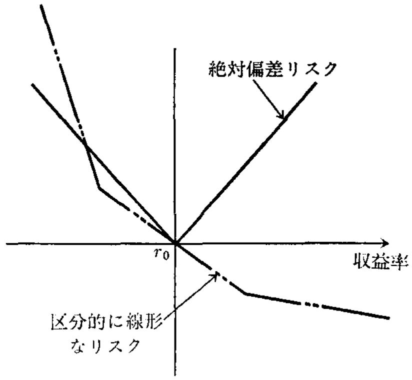

図 2

$$(3)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & W[R(x_1,\cdots,x_n)] \\ \text{条　件} & E[R(x_1,\cdots,x_n)]\geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j=M,\ \ x_j\geqq 0,\ \ j=1,\cdots,n \end{array}\right.$$

：は線形計画問題となるのです!!

線形計画問題であれば，2次計画問題に比べて格段に速く解けることはもとより，(b)で述べた端数処理もずっと容易である．ふつうなら問題をややこしくするはずの絶対偏差が，ここでは標準偏差よりずっと取扱いやすいという次第である.

さて，以上のモデルでは，リスクを定義するうえで，平均値の下側と上側を対称に扱い，どちらも好ましくないものと見なした．ところが，実は平均より上側にバラツイているものは，リスクというよりむしろ“メリット”というべきではないだろうか．というわけで，筆者は図2に示した区分的に線形なリスク関数を用いて，個々の投資家のリスク感覚を組みこめるモデルを提案している [3]．ちなみに，折線リスクモデルは，その折線が凸関数である限りは，問題 (2) と同様線形計画問題として処理可能である.

また筆者らは，株先50に採用されている50銘柄の過去5年間のデータを用いて，さまざまな計算を行なってみたが，その結果次のような特徴が確認された.

(i) 問題(2)は問題(1)よりはるかに速く解ける.

(ii) 問題(2)の解は，問題(1)の解に比べてより少数の銘柄に集中的に投資することを推奨している．ちなみに r_0 をどのように選んでも，(2)の最適解で正の投資比率をもつ銘柄数は，(1) の場合の約半数である．また上位10銘柄への投資率は，(1) では 60～70％であるのに対し，(2)では90％を越えている.

(iii) 問題(2)の最適解の標準偏差は，問題(1)のそれと比べてたかだか10％程度しか違わない.

以上のように，改良マーコビッツ・モデル(3)は基本モデル(1)より操作性が良いことが確かめられたわけだが，ファイナンスにおけるORの出番は，これ以外にもいろいろある．たとえば様々な最適化手法をはじめ，確率過程論や統計分析，意思決定分析，DSS……などが最もストレートに利用できるのがこの分野である．実際，ファイナンス先進国のアメリカでは，ORの専門家たちが作ったモデルや手法が重要な役割を果たしている……その好例はオプション売買戦略やポートフォリオ・インシュアランスである……のだが，わが国ではファイナンスはまだ（少数の）経済学者の領土になっているようである．ぜひともこの分野をORの方向に引き寄せて工学化を図り，「理財工学」として発展させたい[4]，というのが筆者の願望であるが，当然のこととして道は剣しい．読者諸兄姉のご支援をお願いする次第である．

参考文献

［1］ H.ワグナー著，森村・伊理監訳 オペレーションズ・リサーチ入門4，培風館．

［2］ H. Konno, "Portfolio Optimization Using L_1 Risk Measure", IHSS 88-9 , Inst. of Human and Social Sciences, Tokyo Inst. of Technology, 1988.

［3］ H. Konno, "Piecewise Linear Risk Functions and Portfolio Optimization",「投資と金融のOR」シンポジウム報告集，日本OR学会，1989.

［4］ 今野 浩，「理財工学のすすめ」，オペレーションズ・リサーチ34, pp. 6-7, 1989.

多次元デュアレーション(MDD)を用いた債券ポートフォリオ分析

森平 爽一郎

1. はじめに

1970年代後半から始まった金利水準の乱高下は，それまでの安全資産投資としての債券投資が，株式投資に劣らずハイ・リスク＝ハイリターンであることを明らかにした．本稿の目的は，債券投資の伝統的なリスク指標である「デュアレーション（Duration)」を多次元に拡張することによって得られた多次元デュアレーションの重要性と，その債券ポートフォリオ分析への応用の可能性について検討することにある(注1)．特にこの場合，目標計画法（ゴールプログラミング）が，実際的な債券ポートフォリオ・モデルの構築にあたって，有効であることを示したいと思う．

2. 債券投資リスクの尺度としての「多次元」デュアレーション

債券の「理論」価格は，将来得られる利子(クーポン)と満期日における元本の償還金額とを，現在の価値に割引いたものに他ならない．t期のクーポンをC_t，満期までの期間をT $(t=1,2,\cdots,T)$，t期のクーポンを現存価値に引きもどすための「割引率」をy_tとすると(注2)，現時点における債券価格(P_0)は，

$$(1)\quad P_0=\frac{C_1}{(1+y_1)^1}+\frac{C_2}{(1+y_2)^2}+\cdots+\frac{C_T}{(1+y)^T}$$

と表わすことができる．ただしここで，$C_T=T$期のクーポン＋元本と考えることとする．

貸倒れ(Default)や，満期前の任意償還(Call)のない債券，たとえば，日本の国債などでは，C_tやTは$t=0$において確実にその値が知られており，なんら不確実性は存在しないと考えてよい．したがって，債券価格変動の不確実性は，割引率（y_t）が予期されない変化を示すことから生ずると考えてよい．割引率$(y_1, y_2, \cdots, y_T)$がどのように決定され，それを実際のデータからどのように推定すべきかについては，利子率の期間構造（Term Structure of Interest Rate）の理論をめぐるさまざまな研究と残された問題がある．ここでは，$y_t(t=1,2,\cdots,T)$が時間(t)にかかわらず一定である($y_t=y\ \forall t$)と仮定し，その変化が債券価格にどのような影響を与えるのかを考えてみよう(注3)．

もりだいら　そういちろう
福島大学　経済学部
〒960-12 福島市松川町