# 不完全一対比較行列における AHP ウエイトの計算法

竹田　英二

## 1. はじめに

AHPでは，ウエイトを推定するのに，すべての要素間の一対比較を行ない，“完全な”逆数行列の形をした一対比較行列を作ってから，固有ベクトルを求める方法が広く使われている．このことは，ある階層レベル内に$n$個の要素（目的あるいは代替案）があれば，意思決定者は $n(n-1)/2$ の一対比較に答えなければならないことになり，$n$が大きくなったり，階層レベルが増えると負担は急激に増えることになる．またいくつかの一対比較のなかには，直接答えにくいものや，“わからない”ものもある．このような場合，全く自信なく答えるよりも，スキップができればと考えるのは自然であろう．

最近，Harker[1] は，冗長な一対比較のメリットを損なわない程度に，いくつかの質問をパスしてできる“不完全”な逆数行列にも固有値法が適用できるわかりやすい方法を提案している．実は Harker は別の方法 [2] も提案しているし，筆者ら [5] も同様のことを考えてきた．ここでは，Harker の方法を，筆者らの解釈によるより簡単な方法で紹介する．

## 2. 不完全な逆数行列の固有値法

ある階層レベル内に$n$個の要素があるとし，推定したいウエイトを $W=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ とする．いま，要素間の一対比較により逆数行列 $A=(a_{ij})$ が得られたとする．ここで $a_{ij}$ は比率 $w_i/w_j$ の推定である．固有値法の特徴は，$A$からウエイト$w$を推定するとき，比率 $w_i/w_j$ の直接の近似である $a_{ij}$ だけでなく，間接的な近似も同時に考慮していることである．

例1）逆数行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

において，$a_{12}\sim w_1/w_2$, $a_{23}\sim w_2/w_3$ であるから $a_{12}\times a_{23}\sim w_1/w_2\times w_2/w_3=w_1/w_3$ となり，$a_{12}\times a_{23}=6$ も比率 $w_1/w_3$ の（長さ2のパスに沿った）間接的な近似である．$a_{13}=a_{11}\times a_{13}$ であることに注意すれば，

$$A^2=(a_{ij}{}^{(2)})=\begin{pmatrix} 3 & 16/3 & 14 \\ 7/4 & 3 & 8 \\ 2/3 & 7/6 & 3 \end{pmatrix}$$

ただし，$a_{ij}{}^{(2)}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\times a_{kj}$,

は長さ2のパスに沿ったすべての直接的，間接的な比率の近似を含んでいる．

この例からわかるように，一般に $A^m$ を考えれば，長さ$m$のパスに沿ったすべてに近似を考慮していることになる．そこで，$A^m$ の第$j$列ベクトルを正規化したものは，要素$j$からみたウエイトベクトルとみることができる．実際，固有値法で求めた $\hat{w}=(\hat{w}_i)$ では，すべての$j$について，

$$\hat{w}_i=\lim_{m\to\infty} a_{ij}{}^{(m)}\Big/\sum_{k=1}^{n} a_{kj}{}^{(m)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

が成り立つ [4].

さてこれからは，逆数行列のいくつかの要素がわからない場合を考えてみる．このような場合でも間接的な近似を考慮できる固有値法が適用できるように工夫することができる．まず簡単な例をもとにして，Harker の方法を紹介する．

例2）$n=4$ として，推定したいウエイトを $W=(w_1, w_2, w_3, w_4)$ とする．いま，一対比較から，次のように $a_{12}=3$, $a_{24}=2$, $a_{32}=6$ だけが得られたとする．

$$\begin{pmatrix} - & 3 & - & - \\ - & - & - & 2 \\ - & 6 & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで，“—”の要素は“わからない”箇所を表わしている．対角要素を1にして，逆数関係

$$a_{ji}=1/a_{ij}$$

の仮定を使えば，次の不完全逆数行列$A$が得られる．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & - & - \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ - & 6 & 1 & - \\ - & 1/2 & - & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

たけだ　えいじ　芦屋大学　産業教育学科
〒659 芦屋市六麓荘町13—22

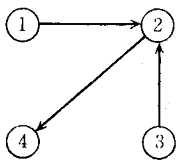
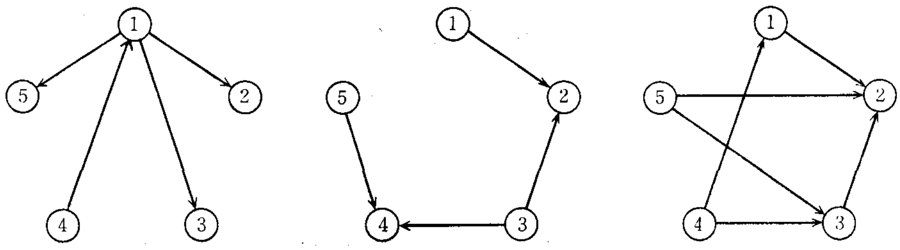


図 1　$\mathscr{S}$



(i)　$\mathscr{S}_1$　　(ii)　$\mathscr{S}_2$　　(iii)　$\mathscr{S}_3$

図 2　カバリングの例

次に $a_{ij}\sim w_i/w_j$ であるから"―"の箇所を $w_i/w_j$ で埋めると形式的に固有値問題は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & w_1/w_3 & w_1/w_4 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ w_3/w_1 & 6 & 1 & w_3/w_4 \\ w_4/w_1 & 1/2 & w_4/w_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

と書ける．これより

$$\begin{aligned} &3w_1+3w_2 &&=\lambda w_1 \\ &1/3w_1+\ w_2+1/6w_3+2w_4 &&=\lambda w_2 \\ &\qquad 6w_2+\ 3w_3 &&=\lambda w_3 \\ &\quad 1/2w_2 \qquad\qquad +3w_4 &&=\lambda w_4 \end{aligned}$$

が得られ，再び行列表現をすれば，

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる．不完全な逆数行列 $A$ から得られた (3) の係数行列を $\tilde{A}$ で表わせば，これは $A$ の"―"の要素を 0 で置き換え，かっその第 $i$ 対角要素が $A$ の $i$ 行にある"―"の個数に 1 を加えたものであるような行列である．

この例のように不完全逆数行列 $A$ から $\tilde{A}$ をつくりその固有値問題 (3) を解いて $w$ の推定値 $\tilde{w}$ を得るのが Harker の提案した方法である．次節では，この $\tilde{w}$ の性質を調べてみることにする．

## 3. 不宗全逆数行列から求めたWの性質

$n$ 個の要素の添字集合を

$Q=\{1,2,\cdots,n\}$

とする．また，一対比較で $a_{ij}(\geqq 1)$ と答えた添字の組 $I=(i,j)$，$i\neq j$ の集合を

$\mathscr{S}=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$

で表わす．例 2 では

$\mathscr{S}=\{(1,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$.

逆数関係で拡大した集合を

$\hat{\mathscr{S}}=\{(i,j)\mid(i,j)\in\mathscr{S}$ あるいは $(j,i)\in\mathscr{S}\}$

とする．

$\mathscr{S}$ の 2 つの要素 $C=(c_1,c_2)$，$D=(d_1,d_2)$ について，$C\neq D$ で $\{c_1,c_2\}\cap\{d_1,d_2\}\neq\phi$ のとき $C$ と $D$ はオーバラップするという．もし $\mathscr{S}$ の任意の $C$ と $D$ について，$I_{k-1}$ と $I_k, k=2,3,\cdots,s$ がオーバラップし，$I_1=C$, $I_s=D$ となる列 $I_1,I_2,\cdots,I_s\in\mathscr{S}$ が存在するとき，$\mathscr{S}$ は連結的という．$\mathscr{S}$ は連結的で，かつ $\mathscr{S}$ の要素の和が $Q$ を含むとき，$\mathscr{S}$ は $Q$ のカバリングという．

たとえば，$Q=\{1,2,3,4,5\}$ とするとき，

$\mathscr{S}_1=\{(1,2),(1,3),(1,5),(4,1)\}$

$\mathscr{S}_2=\{(1,2),(3,2),(3,4),(5,4)\}$

$\mathscr{S}_3=\{(1,2),(3,2),(4,1),(4,3),(5,2),(5,3)\}$

はそれぞれ $Q$ のカバリングである．(図 2)

$\mathscr{S}$ が与えられたとき，$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ を

$$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & (i,j)\in\mathscr{S} \text{ のとき} \\ 1/a_{ji}, & (i,j)\notin\mathscr{S} \text{ かつ} (j,i)\in\mathscr{S} \text{ のとき} \\ 0, & (i,j)\notin\mathscr{S} \text{ かつ} (j,i)\notin\mathscr{S} \text{ のとき} \\ N_i, & j=i \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．ここで $N_i$ は $A$ の第 $i$ 行で"―"の個数に 1 を足したものである．

このとき，$\mathscr{S}$ がカバリングのときは行列 $\tilde{A}$ はプリミティブであり，$\tilde{A}$ の最大固有根 $\lambda_{\max}$ は正で，対応する固有ベクトル $\tilde{w}$ は正であることがいえる．

例3)　完全な逆数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 4 & 1/5 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 1/3 & 5 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 5 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/5 & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{\max}=5.849$

$\hat{w}=(.115\ .319\ .056\ .416\ .099)$

を考える．いま，このうち $\{1,4\}$，$\{2,5\}$，$\{3,4\}$ の一対比較が"わからない"ものと仮定し，次の不完全逆数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 4 & — & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 1/3 & — \\ 1/4 & 1/4 & 1 & — & 1/4 \\ — & 3 & — & 1 & 3 \\ 1/2 & — & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

が与えられたものとする．

$$\mathscr{S}=\{(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(4,2),(4,5),(5,3)\}$$

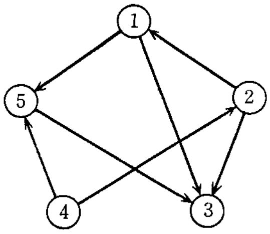


図 3 $\mathscr{S}$

はカバリングである．これより $\tilde{A}$ は

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1/6 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1/2 & 0 & 4 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\tilde{\lambda}_{\max}=5.475$$

$$\tilde{w}=(.114\ .282\ .036\ .466\ .102)$$

が得られる．

さて，不完全逆数行列 $A$ が与えられたとき，$\mathscr{S}$ がカバリングで，すべての $(i,j)$，$(i,k)$，$(k,j)\in\mathscr{S}$ について $a_{ij}=a_{ik}\times a_{kj}$ を満たすとき，すなわち，わかっている部分では整合性があるとき，わからない箇所を整合性のあるように埋めて，全体が整合性のある完全な逆数行列がつくれる場合を考える．たとえば，例 2 では

$$a_{13}=a_{12}\times a_{23}=3\times 1/6=1/2$$

$$a_{14}=a_{12}\times a_{24}=3\times 2=6$$

$$a_{34}=a_{32}\times a_{24}=6\times 2=12$$

から，整合性のある逆数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 6 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 12 \\ 1/6 & 1/2 & 1/12 & 1 \end{pmatrix}$$

が一意的につくれる．これを解けば，

$$\lambda_{\max}=4$$

$$\hat{w}=(.286\ .095\ .571\ .048)$$

となる．

ところで，$\mathscr{S}=\{(1,2),(2,4),(3,2)\}$ はカバリングであり，不完全逆数行列から求めた $\tilde{A}$：

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

からは

$$\tilde{\lambda}_{\max}=4$$

$$\tilde{w}=(.286\ .095\ .571\ .048)$$

が得られ，それぞれ $\lambda_{\max}$，$\hat{w}$ に一致していることがわかる．

一般に，整合性のある完全な逆数行列から求めた $\hat{w}$ は，$\mathscr{S}$ がカバリングである限り，いくつかの要素をはずしてできる不完全逆数行列からでも得られることが示される．言い換えると，不完全逆数行列で $\mathscr{S}$ がカバリングのとき，それから整合性のある完全な逆数行列が復元できるとき，

$$\tilde{\lambda}_{\max}=\lambda_{\max}=n$$

$$\tilde{w}=\hat{w}$$

となる．

一般に，任意の不完全逆数行列 $A$ について，$\mathscr{S}$ がカバリングのとき，

$\tilde{\lambda}_{\max}\geqq n$ であり，等号は $A$ から整合性のある完全な逆数行列がつくられるときかつそのときに限る

ことが示せる．

最後の例は，この方法を使えば一対比較で答えが増えるたびに，$\tilde{\lambda}_{\max}$ が計算でき，整合性のチェックにも役立つことを示したものである．

例4) 最初，次の不完全逆行列が得られたとする．

$$\begin{pmatrix} 1 & — & 2 & — & 9 \\ — & 1 & — & 9 & — \\ 1/2 & — & 1 & — & — \\ — & 1/9 & — & 1 & 2 \\ 1/9 & — & — & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{\max}=5.000 \\ &\tilde{w}=(.260\ .523\ .130\ .058\ .029) \end{aligned}$$

以降，ランダムにつぎつぎに出された一対比較には仮想的な答えを用いてある．

↓（{1,2} の一対比較に $a_{12}=2$ と答えたとする）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & — & 9 \\ 1/2 & 1 & — & 9 & — \\ 1/2 & — & 1 & — & — \\ — & 1/9 & — & 1 & 2 \\ 1/9 & — & — & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{\max}=5.099 \\ &\tilde{w}=(.420\ .308\ .190\ .048\ .034) \end{aligned}$$

↓（{2,5} の一対比較に $a_{52}=5$ と答えたとする）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & — & 9 \\ 1/2 & 1 & — & 9 & 1/5 \\ 1/2 & — & 1 & — & — \\ — & 1/9 & — & 1 & 2 \\ 1/9 & 5 & — & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{\max}=7.483 \\ &\tilde{w}=(.433\ .205\ .062\ .096\ .204) \end{aligned}$$

↓($\lambda_{max}$が急に大きくなったのでチェックし，$a_{25}=5$ に修正)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & - & 9 \\ 1/2 & 1 & - & 9 & 5 \\ 1/2 & - & 1 & - & - \\ - & 1/9 & - & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & - & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{max}=5.142 \\ &\tilde{w}=(.425\ .291\ .186\ .055\ .042) \end{aligned}$$

↓($\{3,5\}$の一対比較に $a_{35}=3$ と答えたとする)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & - & 9 \\ 1/2 & 1 & - & 9 & 5 \\ 1/2 & - & 1 & - & 3 \\ - & 1/9 & - & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{max}=5.165 \\ &\tilde{w}=(.427\ .306\ .162\ .058\ .046) \end{aligned}$$

↓($\{2,3\}$の一対比較に $a_{23}=3$ と答えたとする)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & - & 9 \\ 1/2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & - & 3 \\ - & 1/9 & - & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{max}=5.198 \\ &\tilde{w}=(.423\ .331\ .143\ .058\ .045) \end{aligned}$$

↓($\{3,4\}$の一対比較に $a_{34}=2$ と答えたとする)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & - & 9 \\ 1/2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 2 & 3 \\ - & 1/9 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{max}=5.205 \\ &\tilde{w}=(.422\ .334\ .138\ .061\ .045) \end{aligned}$$

↓($\{1,4\}$の一対比較に $a_{14}=7$ と答えたとする)

これですべての一対比較が終わり，次の完全な逆数行列が得られた．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 & 9 \\ 1/2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 2 & 3 \\ 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{max}=\lambda_{max}=5.205 \\ &\tilde{w}=\hat{w}=(.423\ .333\ .138\ .061\ .045) \end{aligned}$$

## 4. おわりに

固有値法の大きな特徴として，比率の直接の近似である $a_{ij}$ だけでなく何段階にもわたる間接的な近似も考慮してウエイトを推定していることがあげられる．この固有値法を適用するには，まずすべての要素間の一対比較から完全な逆数行列を求めることが必要である．ここでは，逆数行列を求めるさい，全く自信のないいくつかの一対比較の答えを保留することができる．不完全な一対比較行列における固有値法を紹介した．

## 参考文献


[1] Harker, P. T., Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process, Math. Modelling, 9 (1987) 353-360

[2] Harker, P. T., Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process, Math. Modelling, 9 (1987) 838-848

[3] Harker, P. L., and Vargas, L. G., The theory of ratio scale estimation:Saaty's analytic hierarchy process, Management Sci., 33(1987) 1383-1403

[4] Saaty, T. L., and Vargas, L. G., Inconsistency and rank preservation, J. of Math. Psychology, 28 (1984) 205-214

[5] Takeda, E., and Yu, P. L., Eliciting the relative weights from incomplete reciprocal matrices, Preprints of Int. Sympo. on the AHP, Tianjin Univ., 1988