相補性問題，2次計画問題への内点法の応用

——解析的中心とそのまわりの楕円体——

吉瀬　章子

1. はじめに

ある確定的な問題，すなわちいくつかの制約条件のもとで目的関数を最小（あるいは最大）にする問題，

問題(1)　最小化 $f_0(x)$

　　　　条件　$f_i(x) \leqq 0\ (i=1,2,\ldots,m)$

が与えられているとします．ここで $x \in R^n$ であり f_i ($i=0,1,\ldots,m$) は $R^n \to R$ への関数を表わしています．制約条件によって変数の空間に実行可能な領域

$$P=\{x \in R^n : f_i(x) \leqq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)\}$$

が作られます．いま，この実行可能領域の内部

$$P^0=\{x \in R^n : f_i(x) < 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)\}$$

が空でないと仮定します．この問題の解法として，ある点 $x^0 \in R^n$ から出発して問題の最適解 x^* に収束する点列$\{x^k\}$を生成する反復解法があります．内点法はこの反復解法の一種ですが，点列$\{x^k\}$が実行可能領域の内部P^0中に生成される特徴があります．1984年にKarmarkarは論文[5]で関数 f_i がすべて線形である問題（線形計画問題）を多項式オーダーの計算量で解く解法を提案しました．以後広く内点法の研究が行なわれています．それらの研究には，関数 f_i が線形ではない，より一般的な問題を対象としているものもあります．たとえば，線形制約のもとで凸２次の目的関数を最小化する問題についてはMonteiro and Adler[12]が，また線形相補性問題については Kojima, Mizuno and Yoshise [8,9]がそれぞれ $O(n^3L)$（L は問題の総入力ビット数）の計算量で最適解を得る解法を示しています．またKojima, Mizuno and Noma [6]は，ある種の非線形相補性問題に解法を提案しています．Jarre[4]は関数 f_0 が線形で関数 f_i が2次である問題を対象としており，Sonnevend and Stoer [15]はこれを拡張して f_i が解析的で凸である問題の解法を提案しています．

よしせ　あきこ　東京工業大学　理工学研究科　経営工学専攻
〒152 目黒区大岡山2―12―1

この稿では，より一般性の高い問題を扱う最近の研究の一例として，Sonnevend と Stoer による論文[15]の一部を紹介します．その前に内点法のしくみを簡単に説明しながら，内点法にとってきわめて重要な概念である“解析的中心”の定義とその役割にふれておきます．

2. 解析的中心と，それを中心とする楕円体

改めて問題(1)に，いくつか仮定を与えておきます．

仮定(1)　関数 $f_i\ (i=0,1,\ldots,m)$ は凸で十分になめらか（テーラー展開が可能）である．

(2)　実行可能領域 P は有界閉集合であり，領域の内部 P^0 は空でない．

上記の仮定(2)を満たす集合 P の解析的中心（analytic center）$\hat{X}$ は，集合 P の内部 P^0 から R への対数関数

$$-\sum_{i=1}^{m} \log\ (-f_i(x))$$

を P^0 上で最小にする点として定義されます（[14]）．この関数は領域の境界に近づくにつれ$+\infty$に発散するので少なくともひとつの点で最小となります．一般に（f_i がすべて線形であっても）解析的中心を直接に求めることは困難ですが，f_i によってはNewton法等で十分な精度の解を求めることができます．この解析的中心の概念は内点法と深い関わりがあります．以下では解析的中心のはたらきの例をいくつか紹介します．

2.1 内点法と解析的中心

まず仮定(2)より問題(1)は少なくともひとつの最適解 x^*をもつことがわかります．いま目的関数の最適値をλ^*とすれば，任意の上界値 $\lambda > \lambda^*$ について元の制約条件に目的関数の値が λ 以下であるという制約を加えた集合

$$P(\lambda)=P \cap \{x \in R^n : f_0 \leqq \lambda\}$$

も有界閉集合であり，その内部

$$P(\lambda)^0 = P^0 \cap \{x \in R^n : f_0 < \lambda\}$$

も空ではないことがわかります．いま上界値 λ^k と，集合 $P(\lambda^k)^0$ の内点 x^k が与えられているとします．内点法の各反復でのステップの代表的な例は，大まかに，

Step 1 : $P(\lambda^k)^0$ 内に内点 x^k を中心とする楕円を考える.

Step 2 : この楕円上で，適当な線形関数を最小とする点を x^{k+1} とする

Step 3 : 上界値 λ^k を更新し λ^{k+1} とする.

と表わされます.それぞれの内点法で用いる楕円,線形関数は異なりますが，内点がすべての制約から離れるほど楕円を大きくとることができます．集合 $P(\lambda^k)$に対する解析的中心 $\hat{X}(\lambda^k)$は，“内点と境界からの距離”を$P(\lambda^k)^0$ から R への対数関数

$$-L(x,\lambda^k)=\log(\lambda^k-f_0(x))+\sum_{i=1}^{m}\log(-f_i(x))$$

で表わしたときに $P(\lambda^k)^0$ 上で最大とする点です．制約の境界に近づきすぎると，その近傍に非常に小さな楕円しか描けず，アルゴリズムが停止してしまうおそれがあります．そこで多くの内点法では，上記のStep 2の線形関数として，適当な $\lambda^k>\lambda^*$ に対する解析的中心 $\hat{X}(\lambda^k)$ をめざす方向ベクトル（たとえば関数 L の x^k での1回微分の逆方向 $-D_xL(x^k,\lambda^k)$ 等）を用いて，制約の境界に近づきすぎる危険を回避しています.

2.2 特殊な内点法(パス追跡法)

もし関数 $L(\cdot,\lambda)$ が $P(\lambda)^0$ 上で狭義凸関数であれば，解析的中心 $\hat{X}(\lambda)$は方程式

$$\begin{aligned}F(x,\lambda)&=D_xL(x,\lambda)\\&=-\nabla f_0(x)/(\lambda-f_0(x))\\&\quad-\sum_{i=1}^{m}\{\nabla f_i(x)/(-f_i(x))\}=0\end{aligned}$$

の唯一の解で与えられます．線形計画問題の場合，仮定(2)よりすべての $\lambda>\lambda^*$ について関数 $L(\cdot,\lambda)$ が $P(\lambda)^0$ 上で狭義凸関数であることが示されます([1])．また，$P(\lambda)^0\times\Lambda^0$（ただし $\Lambda^0=\{\lambda\in R:\lambda>\lambda^*\}$）から R^n への写像 F の x についてのヤコビ行列が，$F(x,\lambda)=0$ のすべての解において正則であれば，陰関数の定理より，$\lambda>\lambda^*$について解析的中心 $\hat{X}(\lambda)$のなめらかな1次元のパスが存在することがわかります．線形計画問題については最適解に収束するこのようなパスが存在することが示されています([11])．このパスをNewton法等で追いかけて最適解を求める解法（パス追跡法）として，[13]，[3]等があります．1節で述べた，[9]，[12]，[4]，[15]等の解法も，それぞれの問題に対して解析的中心 $\hat{X}(\lambda)$ のパスが存在することを示し，パス追跡法を用いています.

2.3 最適解で無効な制約の判定と解析的中心を中心とする楕円による制約領域の近似

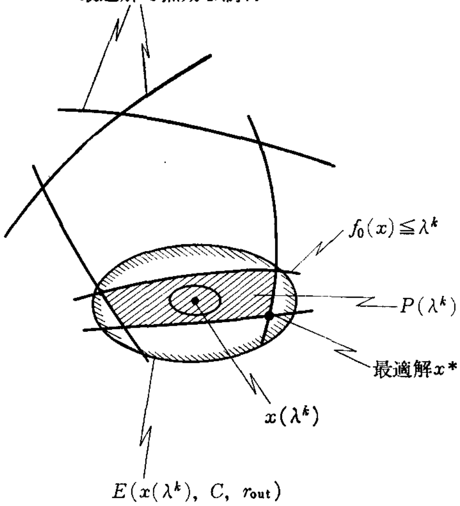

図 1 楕円体を用いた最適解で無効な制約の判定

解析的中心の利用法のひとつに，解析的中心を中心とする楕円を用いて,問題(1)のすべての最適解で無効な制約を判定する方法が提案されています.

まず，ある $\lambda^k>\lambda^*$ について集合 $P(\lambda^k)$の(必ずしも解析的中心とは限らない)内点 $x(\lambda^k)\in P(\lambda^k)^0$ が与えられているとします．そして $x(\lambda^k)$を中心とする楕円体

$$\begin{aligned}&E(x(\lambda^k),C,r)\\&=\{x\in R^n:(x-x(\lambda^k))^tC(x-x(\lambda^k))\leqq r^2\}\end{aligned}$$

を定義します．Cは対称正定値行列，rはある正数を表わしています．$x(\lambda^k)$ は $P(\lambda^k)$ の内部にあること，集合 $P(\lambda^k)$ は有界閉集合であることを考えれば，集合 $P(\lambda^k)$を内側と外側ではさむ2つの相似な同心楕円

$$E(x(\lambda^k),C,r_{\mathrm{in}})\subset P(\lambda^k)\subset E(x(\lambda^k),C,r_{\mathrm{out}})$$

が存在します([2])．定義より集合 $P(\lambda^k)$ は問題(1)のすべての最適解 x^* を含んでいます．したがって，外側の楕円体 $E(x(\lambda^k),C,r_{\mathrm{out}})$上で，ある関数 f_i の最大値が負ならば，すべての最適解 x^* について $f_i(x^*)<0$ が成り立ちます．これは制約 $f_i(x^*)\leqq 0$ がすべての最適解で無効であることを意味します(**図 1**)．楕円体は1つの制約式で与えられるので，問題によっては無効な制約を容易に判定することができます．Todd [16]，Ye [18]，Ye and Todd [19]，Ye [17] は線形計画問題に対してこのような方法を提案しています.

ただし効率のよい判定を行なうためには，外側の楕円体が集合 $P(\lambda^k)$をよく近似している必要があります．この近似のよさを表わすひとつの尺度は内側の楕円体と外

側の楕円体の比 r_{out}/r_{in} です．この比が小さいほど，集合 P を楕円体でよく近似しているといえます．

さらに，楕円体の中心として解析的中心 $\hat{X}(\lambda^k)$ を選ぶと仮定します．解析的中心 $\hat{X}(\lambda^k)$ は各制約の境界からある程度離れているので，適当な行列 C，正数 r_{in}，r_{out} により，半径の比 r_{out}/r_{in} が比較的小さい内側と外側の楕円体が存在すると考えられます．実際，$m+1$ 個の関数 f_i がすべて線形の場合には，$r_{out}/r_{in}=m$ であるような C，r_{in}，r_{out} の存在が示されています（[14], [1]）．さらにこの線形関数の数が $n+1$（このとき集合 $P(\lambda^k)$ は n 次元単体）の場合には，この外側の楕円体が，集合 $P(\lambda^k)$ を含む，最小の体積をもつ唯一の楕円であることが示されています（[7]）．体積のなるべく小さな外側の楕円体を求めることは，不必要な制約の判定をより厳密に行なう上で意義があります．

3. 一般2次計画問題に対する解析的中心とその性質

一般2次計画問題とは1節の問題(1)において，関数 f_i $(i=0,1,\ldots,m)$ が次のような2次関数

$$f_i(x)=(1/2)\,x^t B_i\,x+b_i^t\,x-\beta_i$$

で与えられる問題です．ここで各 i について B_i は $n\times n$ 行列，b_i は n 次元ベクトル，β_i は実数を表わしています．Sonnevend と Stoer は[15]において2節の仮定に

仮定(3) 行列 $B_i(i=0,1,\ldots,m)$ は対称非負定値行列．

を加え，この問題の（前節3に対応する）制約領域の解析的中心を中心とする半径の比が $O(m^{3/2})$ である内側と外側の楕円体と，（前節2に対応する）パス追跡法について述べています．ここでは前半の楕円体に関する部分を紹介します．

簡単のため目的関数 f_0 は考えず，m 個の2次の制約 $f_i(x)\leqq 0$ によって与えられる有界閉集合 P を考えます．集合 P の解析的中心 $\hat{X}$ は，集合 P の内部 P^0 上で

$$L(x)=-\textstyle\sum_{i=1}^m \log(-f_i(x))$$

を最小にする点です．いま仮定(2),(3)より $\hat{X}$ が一意に定まることを示します．簡単な計算により

$$\nabla L(x)=-\textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla f_i(x)/f_i(x)\} \quad (1)$$

$$\nabla^2 L(x)=-\textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla^2 f_i(x)/f_i(x)\}$$

$$+\textstyle\sum\ \{\nabla f_i(x)^t\,\nabla f_i(x)/f_i^2(x)\},$$

ただし

$$\nabla f_i(x)=x^t B_i+b_i^t,\ \nabla^2 f_i(x)=B_i$$

が得られます．ここで $\nabla^2 L(x)$ が正定値行列でないとすると，仮定(3)よりすべての i について

$$d^t\,\nabla^2 f_i(x)\ d=\nabla f_i(x)\ d=0$$

となる $d\neq 0$ が存在します．したがって，すべての i とすべての $\alpha\in R$ に対して

$$\begin{aligned} f_i(x+\alpha d)&=f_i(x)+\alpha\nabla f_i(x)\,d\\ &\quad+(\alpha^2/2)\,d^t\,\nabla^2 f_i(x)\,d\\ &=f_i(x)\end{aligned}$$

となり，仮定(2)に矛盾します．よって関数 L は狭義凸関数であり，解析的中心 $\hat{X}$ は一意に定まります．

Sonnevend と Stoer は，この x^c を中心として，$O(m^{3/2})$ の半径の比で，内側と外側から集合 P をはさむ，2つの相似な同心楕円を示しています．

ここで新たに以下の2つを仮定します．

仮定(4) 集合 P の解析的中心 $\hat{X}$ は原点．

(5) 行列 B_i $(i=1,2,\ldots,m)$ は正定値行列．

まず仮定(4)により一般性が失われないことを示します．集合 P の解析的中心 $\hat{X}$ が一意に定まるならば，$\hat{X}$ は $\nabla L(x)=0$（式(1)）の唯一の解です．このような集合 P をアフィン変換 $x'=Ax+a$ によって

$$P'=\{x'\in R^n : f_i(A^{-1}(x'-a))\leqq 0\}$$

に写します．このとき集合 P' の解析的中心 $\hat{X}'$ は

$$-\textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla f_i(A^{-1}(x'-a))$$

$$/f_i(A^{-1}(x'-a))\}\quad (A^{-1})^t=0$$

を満たしています．行列 A の正則性と $\nabla L(x)=0$（式(1)）が唯一の解をもつことから，$\hat{X}'=A\hat{X}+a$ となります．このように解析的中心はアフィン変換によって不変であり，仮定(4)によって一般性は失われません．仮定(5)は後にはずします．

以下では証明の鍵となるMinkowskiの双対集合について説明します．

3.1 Minkowskiの双対集合

集合 K に対して，Minkowskiの双対集合 K^D は

$$K^D=\{y : \text{すべての } x\in K \text{ に対して，} y^t x\leqq 1\}$$

で与えられます．集合 K が原点以外の一点からなる場合，K^D は半空間であり，K が原点を内部に含む単位球体であれば K^D も単位球体となります．K が有界閉凸集合であり，K の内部 K^0 が原点を含むとき，以下が成り立ちます([10])．

i) $0\in(K^D)^0$.

ii) $K\subset L\to L^D\subset K^D$.

iii) $(\bigcap_{i=1}^m K_i)^D=\mathrm{conv}\ (\bigcup_{i=1}^m K_i{}^D)$.

iv) $\bigcap_{i=1}^m K_i{}^D=[\mathrm{conv}\ (\bigcup_{i=1}^m K_i)]^D$.

ここで conv (K) は集合 K の凸包を表わします.

3.2 Sonnevend と Stoer による証明

Sonnevend と Stoer は証明は3つの補題から成り立ちます. ここで各 i について

$K_i = \{x \in R^n :$

$f_i(x) = (1/2)\, x^t B_i x + b_i^t x \leqq \beta_i\}$

とします. 仮定(4), (5)より K_i は楕円体で, K_i の内部 K_i^0 が原点 (P の解析的中心) を含むことがわかります. 集合 P は $\bigcap_{i=1}^m K_i$ で表わされ, 双対集合の性質iii) より $P^D = \mathrm{conv}(\bigcup_{i=1}^m K_i^D)$ となります. 以下の2つの補題はこの双対集合 K_i^D と P^D の関係を示しています.

補題1. 各 i について, 楕円体 K_i の双対集合は

$K_i^D = \{y :$

$(y - b_i / (2\beta_i))^t B_i' (y - b_i / (2\beta_i)) / 2 \leqq \gamma / (4\beta_i)\}$

ただし, $B_i' = \gamma B_i^{-1} - b_i' b_i'^t$, $b_i' = -B_i^{-1} b_i$,

$\gamma_i = 2\beta_i + b_i^t B_i^{-1} b_i$.

証明. まず K_i^D が楕円体であることを示します. 簡単な計算より, $B_i'^{-1} = (B_i + b_i b_i^t / (2\beta_i)) / \gamma_i$ であり β_i, $\gamma_i > 0$ より B' は対称正定値行列であることがわかります. よって K_i^D は楕円体です.

楕円体 K_i は以下のように表わすことができます.

$K_i = \{x : (1/2)\ (x - b_i')^t B_i\ (x - b_i') \leqq \gamma_i/2\}$

ある y について,

$\phi_i(y) = \sup\{y^t x : x \in K_i\}$

とすれば最適性の条件から,

$\phi_i(y) = y^t b_i' + (\gamma_i y^t B_i^{-1} y)^{1/2}$

を得ます. $K_i^D = \{y : \phi_i(y) \leqq 1\}$ であることと, $y^t B_i^{-1} y \geqq 0$ を用いて $\phi_i(y) \leqq 1$ を変形することで補題を得ます. □

補題1より各楕円体 K_i^D の中心 d_i は $b_i/(2\beta_i)$ で与えられます. 一方, 解析的中心 $\hat{X}$ は $\nabla L(x) = 0$ (式 (1)) を満たします. 仮定(4)より $\hat{X} = 0$ であるので b_i, β_i について $\sum_{i=1}^m (b_i / \beta_i) = 0$ が成り立ちます. また K_i^0 は原点 (集合 P の解析的中心) を含むので, 双対集合の性質 i) より双対楕円体 K_i^D の内部 $(K^D)^0$ も原点を含みます. 以上から, m 個の双対楕円体 K_i^D の中心の重心が原点であり, さらに各楕円体 K_i^D がこの重心を含むことがわかります(**図2**). 次の補題は, このような関係をもつ m 個の双対楕円体 K_i^D を用いて, $P^D = \mathrm{conv}\,[\bigcup_{i=1}^m K_i^D]$ を原点のまわりで内側と外側からはさむ, 2つの凸集合が存在することを示しています.

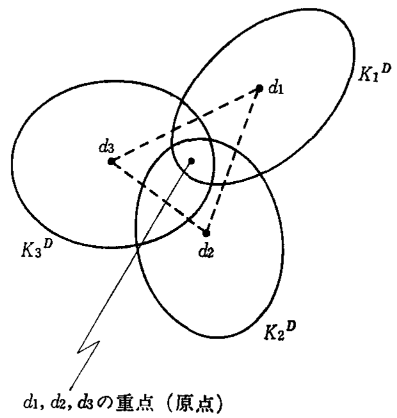

図 2 楕円体 K_i^D と原点の関係

補題2. 各 i について楕円体 $K_i^{D'}$ は楕円体 K_i^D の中心を d_i から原点に平行移動し, 半径を $1/m$ 倍した楕円体

$K_i^{D'} = (1/m)\,[K_i^D - d_i]$

とする. このとき以下が成り立つ.

conv $[\bigcup_{i=1}^m K_i^{D'}] \subset P^D \subset$ conv $[\bigcup_{i=1}^m (2m)\, K_i^{D'}]$

証明. 上述したように m 個の楕円体 K_i^D の中心 d_i の重心は原点であるので, $-d_i = \sum_{j \neq i} d_j$ となり,

$K_i^{D'} = (1/m)\,[K_i^D + \sum_{j \neq i} d_j]$

と表わせます. すなわち楕円体 $K_i^{D'}$ は, 楕円体 K_i^D の任意の一点と ($n-1$) 個の中心 d_j を凸結合した点の集合であることがわかります. 各 i について楕円体 K_i^D は (もちろん中心 d_i も) 集合 P^D に含まれているので, すべての i について $K_i^{D'} \subset P^D$ が成立ち, 補題の左側の包含関係を得ます.

また, 各 i について楕円体 K_i^D は中心 d_i と原点を含んでいるので, $K_i^D \subset (2m)\, K_i^{D'}$ が成り立ちます(**図3**). よって補題の右側の包含関係も得られます. □

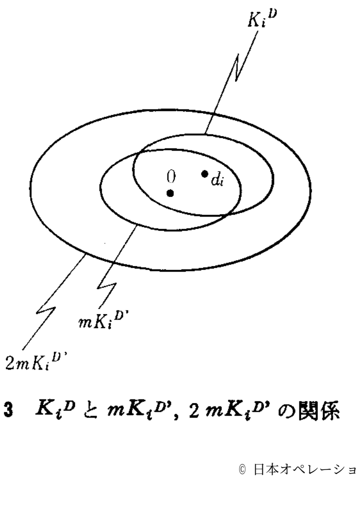

図 3 K_i^D と $mK_i^{D'}$, $2\,mK_i^{D'}$ の関係

補題2で示したことを, 双対集合の性質 ii)〜iv)を用いて元の空間にもどせば,

$$(1/(2m))(\cap_{i=1}^{m} K_i') \subset P \subset \cap_{i=1}^{m} K_i' \qquad (2)$$

となります．各 i について補題1より

$$K_i' = \{x : (1/2)\, x^t B_i'^{-1} x \leqq (\beta_i m^2)/\gamma_i\}$$

$$= \{x : (1/2)\, x^t (B_i/\beta_i + b_i b_i^t/(2\beta_i^2))\, x \leqq m^2\}$$

が得られ，楕円体 K_i' は原点を中心とする楕円体です．すなわち集合 $\cap_{i=1}^{m} K_i'$ は同心楕円の共通集合であり，このような集合について次の補題が示せます．

補題3. 集合 Q が m 個の原点を中心とする楕円体

$$L_i = \{x : (1/2)\, x^t C_i x \leqq 1\}$$

の共通集合 $Q = \cap_{i=1}^{m} L_i$ であるならば以下が成り立つ．

$$E \subset Q \subset m^{1/2} E$$

ただし，$E = \{x : (1/2)\, x^t C x \leqq 1\}$，$C = \sum_{i=1}^{m} C_i$．

証明. $x \in E$ ならば，各 i について $x^t C_i x$ が非負であることから $(1/2)\, x^t C_i x \leqq 1$ であり，x は L_i に含まれます．また $x \in Q$ ならば，明らかに $(1/2)\, x^t C x \leqq m$ なので x が $m^{1/2} E$ に含まれます．□

式(2)に補題3を用いることで，求められていた結果が次の定理として得られます．

定理 集合 $P = \cap_{i=1}^{m} K_i$ に対して，解析的中心（原点）を中心とする半径の比が $O(m^{3/2})$ である内側と外側の楕円体

$$(1/(2m))\, E \subset P \subset m^{1/2} E,$$

ただし E

$$E = \{x : (1/2)\, x^t \textstyle\sum (B_i/\beta_i + b_i b_i^t/(2\beta_i^2))\, x \leqq m^2\},$$

が存在する．

最後に，仮定(5)がはずせることを示します．非負定値行列 B_i が非負定値行列であるとき，任意の正数 ε^k について，$\triangle = \max\{\|x\| : x \in P\}$，$B_i^k = B_i + \varepsilon^k I$，$b_i^k = b_i$，$\beta_i^k = \beta_i + \varepsilon^k \triangle^2$，とすると B_i^k は正定値行列であるので K^k は楕円体となり $P^k = \cap_{i=1}^{m} K_i^k \supset P$ であるので P^k の内部は空ではありません．よって P^k に上記の定理を適用できます．適当に0に収束する点列 $\{\varepsilon^k\}$ を選べば，P^k とその解析的中心は P とその解析的中心にそれぞれ収束します．このとき，解析的中心 $\hat{X}$ の一意性を示したときと同様の議論から行列 $\sum_{i=1}^{m} (B_i/\beta_i + b_i b_i^t/(2\beta_i^2))$ が正定値行列であることが示せます．よって定理の楕円体 E に相当するある楕円体 E^k も楕円体 E に収束し，行列 B_i が非負定値行列であるときも定理が成り立つことがわかります．

5. おわりに

実は Jarre [4] は上記の定理に相当する半径の比が $O(m)$ であるような2つの楕円体を示しています．Sonnevend と Stoer の結果はこの結果に比べよい結果とはいえませんが，証明に（関数解析につきものの）複雑な計算が少なく興味深いので敢えて紹介しました．一般に，定理に相当する楕円体 E を表現する行列として，対数関数 L の解析的中心におけるヘッセ行列が多く用いられます．式(1)と仮定(4)から解析的中心におけるヘッセ行列は

$$\sum_{k=1}^{m} (B_i/\beta_i + b_i b_i^t/\beta_i^2)$$

であり，上記の定理とは趣きが少し異なっています．

参 考 文 献

[1] D. A. Bayer and J. C. Lagarias. *Karmarkar's linear programming algorithm and Newton's method*. Columbia University, New York, New York, 1987.

[2] R. M. Freund. *Projective transformations for interior point methods, part I: basic theory and linear programming*. OR 179-88, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, 1988.

[3] C.C.Gonzaga. *Polynomial affine algorithms for linear programming*. ES-139/88, Dept. of Systems Engineering and Computer Sciences, COPPE-Federai University of Rio de Janeiro, Cx. Postal 68511, 21941 Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988.

[4] F.Jarre. *On the convergence of the method of analytic centers when applied to convex quadradratic programs*. DFG-Report No. 35, Institut fur Angewandte Mathematik und Statistik, Universitat Wurzburg, Am Hubland, 8700 Wurzburg, West-Germany, 1988.

[5] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373-395, 1984.

[6] M. Kojima, S. Mizuno, and T. Noma. *A new continuation method for complementarity problems with uniform P-functions*. Research Reports on Information Sciences B-194, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan, 1987.

[7] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. *Ellipsoids That Contains All Solutions of a*

Positive Semi-Definite Linear Complementarity Problem. Research Reports on Information Sciences B-216, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan, 1988.

[8] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. *An $O(\sqrt{n}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithms for Linear Complementarity Problems*. Research Reports on Information Sciences B-217, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan, 1988.

[9] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. *A polynomial-time algorihm for a class of linear complementarity problems*. Research Reports on Information Sciences B-193, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan, 1987.

[10] S.Lay.*Convex Sets and Their Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1982.

[11] N. Megiddo. Pathways to the optimal set in linear programming. In M. Iri, editor, *Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium of Japan*, pages 1–35, Nagoya, Japan, 1986.

[12] R. D. C. Monteiro and I. Adler. *An $O(n^3 L)$ primal-dual interior point algorithm for linear programming*. ORC 87-4, Industrial Engineering and Operations Research Dept., University of California at Berkeley, Berkeley CA 94720, 1987.

[13] J. Renegar. A polynomial-time algorithm, based on newton's, method, for linear programming. *Mathematical Programming*, 40:59–94, 1988.

[14] Gy. Sonnevend. *An "analytical centre" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear(smooth, convex) programming*. Department of Numerical Analysis, Institute of Mathematics, L. Eotvos University, Budapest, 1088. Muzeum Krt. 6–8. Hungary, 1985.

[15] Gy. Sonnevend and J. Stoer. *Global Ellipsoidal Approximations and Homotopy Methods for Solving Convex Analytic Programs*. Report No. 40, Institut fur Angewandte Mathematik und Statistik, Universitat Wurzburg, Am Hubland D-8700 Wurzburg, 1988

[16] M. J. Todd. *Improved bounds and containing ellipsoids in karmakar's linear programming algorithm*. TECHNICAL REPORT NO.721, School of Operations Research and Industrial Engineering, College of Engineering, Cornell University, Ithaca, New York 14853 -7501, 1986.

[17] Y. Ye. *The "build-down" scheme for path-following algorithms*. Integrated Systems Inc. and Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Santa Clara, CA 95054 and Stanford, CA 94305, 1988.

[18] Y.Ye.*Recovering optimal basis in Karmarkar's polynomial algorithm for linear programming*. Integrated Systems Inc. and Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Santa Clara, CA 95054 and Stanford, CA 94305, 1987.

[19] Y. Ye and M. J. Todd. *Containing and shrinking ellipsoids in the path-following algorithm*. Integrated Systems Inc. and Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Santa Clara, CA 95054 and Stanford, CA 94305, 1987.

「論文・研究レポート」の原稿募集

ORの実践をわかりやすい事例を中心に紹介してほしいという会員からの要望がある一方で，OR理論の展開あるいは手法の開発など学術的な研究報告も忘れないでという注文も根強くあります．

本誌では「論文・研究レポート」という審査論文欄を設けております．この論文・研究レポートでは，特に，経営の実践に役立つ理論研究，手法あるいはシステムの開発，概念フレームおよび方法論等を扱った研究のご寄稿を歓迎いたします．

投稿要領：学会原稿用紙36枚（25字×12行）以内（図表を含む），投稿先はOR学会事務局OR誌編集委員会宛．　　　　（OR誌編集委員会）

なお原稿のコピーを2部添付してください．