The Stationary Ball Method for Linear Programming …A Primal Simplex Method with a New Column Selection Rule

(線形計画問題に対する均衡球法…新しい列選択規則をもつ主単体法)

筑波大学大学院社会工学研究科　竹原　均（指導教官　藤重 悟助教授）

1. 研究目的

1984年のKarmarkarによる線形計画問題に対する多項式オーダの解法を契機として，多くの内点法が提案され，またそれらについて単体法より優れているとする結果も報告されている．一方，従来唯一の実用的解法として利用されてきた単体法も理論的には指数オーダの解法であると言わざるを得ないとはいえ，平均的には多項式オーダの反復により最適解を得ることができることが知られている．

こうした点から，本論文においては主単体法の枠組みを取りながらも双対実行可能領域内部をたどりながら最適解を得る法，均衡球法(stationary ball method)を提案し，数値実験によって，その有効性を検証する．

2. 均衡球法

本論文では，主問題として標準形線計画問題を対象とし，また同時にその双対問題を考える．ここで，双対実行可能領域の内点は非空であると仮定する．

算法の開始に当っては，すでに主実行可能基底が得られており，さらに双対空間において，この基底に対応する制約超平面によって形成される錐体の内部に，それらの超平面すべてに接し，かつ，双対実行可能領域中に含まれるような球を置くことができるものと仮定する．この球を均衡球(stationary ball)と呼ぶ．この球はK.G. Murtyの重力法(gravitational method) [2] において降下が停止した状態の球と同一である．

本算法は，均衡球であるという性質を保ちながらその半径をパラメトリックに減少させ，球の中心を現在の錘体の頂点である双対基底解に近づけることを図る，現在の基底が最適である場合，均衡球は半径が0となって，双対基底解に到達する．もし最適でない場合，球の中心を移動させたときに，ある点において均衡球の双対実行可能性が破られる．この点において基底の更新を行ない，

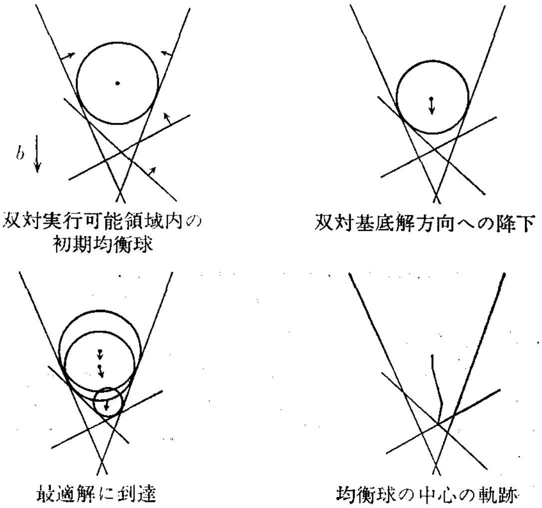

図 1

新たな主，双対基底解を得る．均衡球法における列選択規則は，どの制約条件が破られるかを考えることにより与えられる．以後，最適解が得られるまで同様の手順を繰り返す．結果として均衡球の中心は，双対実行可能領域内部を折線の軌跡を描きながら最適解に至る（図1参照）．

均衡球法は，主単体法に特殊な列選択規則を導入したものとみなされるが，双対実行可能領域の内部をたどりながら最適解に到達するという点では内点法であり，この点において従来の単体法と異なる．また，主実行可能基底解に加え双対実行可能領域内に均衡球をもつため，目的関数の最適値についての上下界が得られる．

3. 均衡球法における列選択規則

以下の記号を定義する．

B　：基底添字集合，　　N　：非基底添字集合

$a_{\cdot j}$　：Aの第j列要素，$\|a_{\cdot j}\|$：$a_{\cdot j}$のユークリッドノルム

$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle$：$n$次元ベクトル $(\|a_{\cdot 1}\|, \|a_{\cdot 2}\|, \ldots, \|a_{\cdot n}\|)$

p_j　：単体基準 $y_B a_{\cdot j} - c_j$(ただし $y_B = c_B B^{-1}$)

このとき，均衡球法における列選択は，次のように定義される添字集合 N_2

$$N_2 = \{ j \mid j \in N,\ t\,a_{\cdot j} / \|a_{\cdot j}\| > 1\}$$

(ただし $t = \langle\!\langle A\rangle\!\rangle_B B^{-1}$) に関して，

$$(p_j / \|a_{\cdot j}\|) / ((t\,a_{\cdot j} / \|a_{\cdot j}\|) - 1)$$

の最大値を達成する添字 j を新たに基底に加える．このことは，以下と等価である．すなわち

(a) 係数行列 A の各列ベクトルのノルムに正規化された単体基準 $p_j / \|a_{\cdot j}\|$ および

(b) 均衡球の中心と超平面との距離 d_j と均衡球半径 r との差 $d_j - r$ との関係において，均衡球が制約を破るもののみについて，比

$$(d_j - r) / ((p_j / \|a_{\cdot j}\|) - (d_j - r))$$

を考慮して，その最小値を達成する添字 j が選ばれる．したがって(a)の値の大なもの，(b)の値の小なものが新たに基底に取り込まれやすい性質をもち，目的関数の減少と相補性条件の成立の両方が図られている．

また，1回の列選択に要する計算量は最大係数規則の2倍程度であり，最大減少規則に比較してより少ない計算量しか必要としない．

4. 計算機実験の結果

解法の振舞いについて考察を行なうために，いくつかの計算機実験を行なったが，ここではランダムＬＰ問題［1］に関する実験結果のみを示す．図2からわかるように，最大減少規則と同程度，最大係数規則に比べればかなり少ない反復により最適解が得られることがわかる．

5. 結　　論

均衡球法は，従来の単体法に比較した場合，目的関数の上下界をもつなどの点で優れており，計算機実験の結果を合せて考えたならば，実用上も効率の良い解法であることは期待できる．

また，今回の計算機実験においては双対問題に変形を加え初期均衡球を得ることにより算法を開始しているが，本算法は Murty の重力法とも関連をもっており，こうした点で両算法を組み合せた改良等も将来考えられる

付記：本研究とは独立に東京工業大学情報科学科の田村，福田，小島氏のグループによって基本的に同じ方法が考案，研究され，お互いに相談の結果，共同研究による共著論文としてまとめられ(参考文献［3］)，この共著論文は日本ＯＲ学会論文誌に投稿され，採録が決定されている．

参　考　文　献

［1］ D. Avis and V. Chvatal, "Notes on Bland's pivoting rule," Mathematical Programming Study, Vol.8 (1978), pp.24-34.

［2］ K. G. Murty, "The gravitational method for linear programming," Technical report No. 86-19, Department of Industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, 1986.

［3］ A. Tamura, H. Takehara, K. Fukuda, S. Fujishige and M. Kojima, "A dual interior point simplex method for linear programming," Discussion Paper Series No.344, Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba, October 1987.

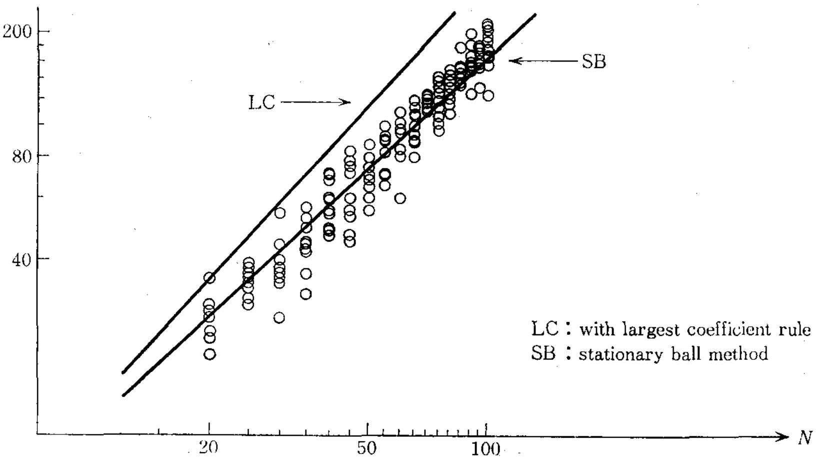

図 2