A Continuation Method for Complementarity Problems
(相補性問題を解くための連続変形法について)

東京工業大学大学院総合理工学研究科システム科学専攻　**野間　俊人**（指導教官　小島政和助教授）

1. はじめに

線形計画問題の解法として，その実行可能領域の内部にある path of centers と呼ばれる連続な曲線を辿ってゆくことにより解に到達するという方法が近年提案され研究された.([3]，[6]等）また，この考え方は，より一般の問題である，半正定値行列に関する線形相補性問題にも適用できることが示された.[4] 本論文では,同様な方法が，ある種の非線形相補性問題に対しても有効であることを示す.

$\boldsymbol{R}^n$ を n 次元 *Euclid* 空間，$\boldsymbol{R}_+{}^n$ をその非負象限 $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x \geqq 0\}$ とするとき，与えられた関数 $f : \boldsymbol{R}_+{}^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，

(1)　$y=f(x)$，$x_i\, y_i=0\ (i=1, \cdots, n)$，$(x, y) \in \boldsymbol{R}_+{}^{2n}$

を満たす $(x,\ y)$ を求めるという問題が相補性問題である．ここで，x_iおよびy_iは，それぞれx，yの第i成分を表わす．本論文では，fが連続な単調関数の場合と，連続な一様P関数の場合を考察の対象とする．f が単調関数であるとは，

$$\langle x^1-x^2,\ f(x^1)-f(x^2)\rangle \geqq 0 \quad \forall\, x^1, x^2 \in \boldsymbol{R}_+{}^n$$

が成り立つことができる．ただし $\langle\cdot, \cdot\rangle$ は内積を意味する．また,fが一様P関数であるとは，$\exists\sigma>0$ に対し

$$\max_{1 \leq i \leq n} (x_i{}^1-x_i{}^2)(f_i(x^1)-f_i(x^2)) \geqq \sigma \|x^1-x^2\|^2 \quad \forall\ x^1,\ x^2 \in \boldsymbol{R}_+{}^n$$

が成り立つことである．微分可能な凸計画問題（線形計画問題や凸２次計画問題を含む）は，連続な単調関数に関する相補性問題に帰着させることができるので，ここでの考察対象はかなり広範な問題を含んでいる．

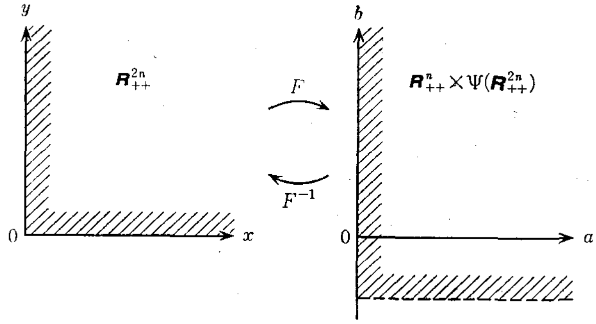
2. 連続な単調関数に関する相補性問題

相補性問題(1)に対応して，関数 $F : \boldsymbol{R}_+{}^{2n} \to \boldsymbol{R}^{2n}$ を次のように定義する．

$$F(x, y)=(\phi(x, y),\ \Psi(x, y))$$

ただし，　$\phi(x, y)=(x_1\, y_1, \cdots, x_n\, y_n)$

　　　　　$\Psi(x, y)=y-f(x)$



1図　関数 F による $\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n}$ と $\boldsymbol{R}_{++}{}^n \times \Psi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})$ の間の同相対応

この関数 F を用いると，相補性問題(1)は，

(2)　$F(x, y)=0$，$(x, y) \in \boldsymbol{R}_+{}^{2n}$

を満たす(x, y)を求めるという問題に書き換えることができる．

$\boldsymbol{R}_{++}{}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の正象限 $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x>0\}$を表わすものとする．このとき，$\phi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})=\boldsymbol{R}_{++}{}^n$となることは容易にわかるが，実はより強く次の定理[2]，[5]が成り立つ．

定理 1　fが連続な単調関数のとき，F は $\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n}$ を $\boldsymbol{R}_{++}{}^n \times \Psi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})$ の上へ同相に写す．（すなわち，F は $\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n}$ を $\boldsymbol{R}_{++}{}^n \times \Psi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})$ の上へ１対１に写し，FもF^{-1}も連続である.）（図１参照）

定理 2　$(x^k, y^k) \in \boldsymbol{R}_{++}{}^{2n}$ で $(a^k, b^k)=F(x^k, y^k)$ とする．$(k=1, 2, \cdots)$ このとき，ある $a \in \boldsymbol{R}_+{}^n$ と $b \in \Psi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})$ に対して $\lim_{k\to\infty}(a^k, b^k)=(a, b)$ ならば，点列 $\{(x^k, y^k) : k=1, 2, \cdots\}$ は有界であり，したがって収束するような部分点列をとることができる．

以下，$0 \in \Psi(\boldsymbol{R}_{++}{}^{2n})$を仮定することにする．この条件のもとで，相補性問題(1)には解が存在し(ただし，唯一つとは限らない),その解が連続変形法の考え方によって求められるということを次のように示すことができる．

任意に $y^0 \in \boldsymbol{R}_{++}{}^n$ を選び，それに応じて $y^0 \in \boldsymbol{R}_{++}{}^n$ を適当に選んで $b^0=\Psi(x^0, y^0) \in \boldsymbol{R}_+{}^n$ とする．また，$a^0=\phi(x^0, y^0)$ とすれば，結局 $(a^0, b^0)=F(x^0, y^0)$ となる．今，$t \in (0, 1]$ に対して $W(t)=t\,(a^0, b^0)$ とおけば，$\Lambda=$

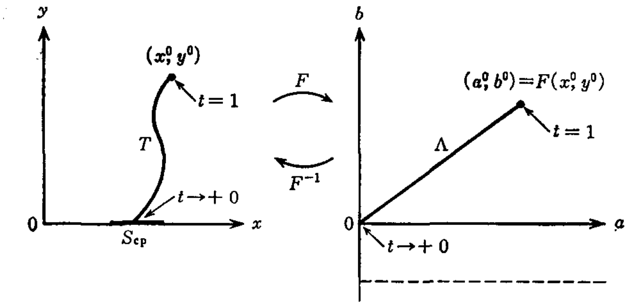


図 2 関数Fによる曲線Tと線分Λの対応

$\{W(t) : t\in(0,1]\}$は原点と(a^0, b^0)を結ぶ線分(原点は含まない)である．$0\in\Psi(R_{++}^{2n})$という仮定から$R_+^n\subset\Psi(R_{++}^{2n})$となることが$\Psi$の定義より容易にわかるので，$\Lambda\subset R_{++}^n\times R_+^n\subset R_{++}^n\times\Psi(R_{++}^{2n})$となる．したがって，$t\in(0,1]$を1つ固定したとき，定理1より

(3) $F(x,y)=W(t)$, $(x,y)\in R_{++}^{2n}$

の解$(x,y)=(x(t), y(t))$が唯1つ存在し，その解の集合$T=\{(x(t),y(t)) : t\in(0,1]\}$は連続な曲線(軌跡)となる．この軌跡$T$上の点$(x(t),y(t))$を考えてみると，$t=1$のとき$(x(1),y(1))=(x^0,y^0)$である．また$t\to+0$のときは定理2から$(x(t),y(t))$が有界で集積点をもつが，式(3)が$t\to+0$のとき式(2)になることに注意すれば，その集積点は式(2)を満たし，したがって相補性問題の解であることがわかる．

こうして，軌跡Tは$t\to+0$のとき相補性問題(1)の解全体の集合$S_{cp}\,(\neq\phi)$に限りなく近づくことが示された．実は，少し条件を強めると(たとえば，fが線形であるとすると)，Tは$t\to+0$のときS_{cp}内のある1点に収束するということもわかる．(**図2参照**)

したがって，何らかの数値的な計算手段を使って，軌跡Tを(x^0,y^0)から出発して$t\to+0$となるように追跡してゆけば，相補性問題(1)の(近似)解が得られる．これが，連続変形法による相補性問題の解法のアイデアである．

3. 連続な一様P関数に関する相補性問題

fが連続な一様P関数の場合にも，関数Fを単調関数の場合と同様に定義すれば，次の定理[1]を示すことができる．

定理3 fが連続な一様P関数のとき，FはR_+^{2n}を$R_+^n\times R^n$の上へ同相に写す．

定理3の主張には，$\Psi(R_+^{2n})=R^n$ということも含まれている．また，定理1と比べると，定理3はより強く，R_+^{2n}の境界上も含めてFが同相写像となることを主張している．したがって，式(2)を満たす(x, y)，すなわちfに関する相補性(1)問題の解は存在してしかも唯1つであることがわかる．

単調関数の場合に述べた，連続変形法による解法のアイデアは，この場合にも有効である．ただし，初期点(x^0, y^0)はR_{++}^{2n}内に任意に選んでよく，また軌跡Tは$t\to+0$のとき相補性問題(1)の唯1つの解に収束するので，より簡明になる．

4. Newton法の反復による軌跡の追跡

軌跡を追跡するための具体的な計算手段としては，連続変形法の分野で確立された種々の方法を用いることができる．たとえば，fが連続微分可能(C^1級)の場合には，Newton 法の反復によって軌跡を追跡することができる．すなわち，(x^0, y^0)を初期点として，その点から少し離れた軌跡T上の点を目標点として定め，その近似点をNewton法で求める．

次に，求まった点を新たな初期点として，再び目標点を近くに定めNewton法でその近似点を求める．これを繰り返して，目標点を少しずつ$t\to+0$となるように動かしてゆけば，近似的に軌跡Tを辿りながら相補性問題の解に到達することができる．

参 考 文 献

[1] M. Kojima, S. Mizuno and T. Noma, "A New Continuation Method for Complementarity Problems with Uniform P-Functions," to appear in *Mathematical Programming*.

[2] M. Kojima, S. Mizuno and T. Noma, "Limiting Behavior of Trajectories Generated by a Continuation Method for Monotone Comlementarity Problems," B-199, Dept. of Information Sciencs, Tokyo Institute of Technology, January 1988.

[3] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming," to appear in *Research Issues in Linear Programming: Proceedings of the Asilomar Conference*, (Springer-Verlag).

[4] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, "A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems," to appear in *Mathematical Programming*.

[5] L. McLinden, "The Complementarity Problem for Maximal Monotone Multifunctions," Chapter 17, 251-270 in : R. W. Cottle, F. Giannessi and J. -L. Lions, eds., *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, (Wiley, New York, 1980).

[6] N. Megiddo, "Pathways to the Optimal Set in Linear Programming," *Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium of Japan* (Nagoya, Japan, 1986) 1-35.