連載講座

証券投資技法の基礎と概要(6)

新しい投資技法(2)

——オプションプライシングとその応用——

石井　吉文

1. オプションとオプションプレミアム

オプションとは，ある特定の期間の中でのある投資対象を買う権利，売る権利を売買するものである．たとえばある銘柄の株式をある期間後に行使価格で買う(売る)ことのできる権利を売り買いするといったものである．

オプションが世の中に存在するのは，その投資対象の価格変動（方向性をも含めて）の将来予測ができない，あるいはその予測が不確かであることによる．もし，完全な価格変動の将来予測が可能であるならばオプションの存在意義はなくなる．

たとえば現在90円の株式があり，3か月後行使価格100円のコールオプションを考えてみよう．オプション取引をする場合，その権利の買い手は売り手のリスク負担の代価として，売り手に損害保険料に相当するオプションプレミアムを支払わなければならない．そこでかりに当該株式の価格が3か月後70円に値下がりするということが確実に予測できるならば，オプションの買い手はオプション契約を締結する必要がないばかりか，もし契約を締結するならプレミアム分の損失を被らなければならないのである．もはや，オプションの存在意義は失われよう．このことは将来価格が110円になることが確実であるような場合も同様である．オプションの売り手は明らかに損を被むるのがわかっていながら契約を結ぶことはあり得ない．

オプションとは確率の商品である．よって，その代価であるオプションプレミアムも確率で計算される「リスクの期待値」によって評価されるべきものである．

たとえば，現在90円の株価が3か月後，110円になる確率が40%で，70円になる確率が60%だとしよう．ここで3か月満期，行使価格100円のコールオプションを考えることとしよう（なお，ここでは利子率の効果は考えないものとする）．3か月後，その株が110円になった場合，オプションの買い手は時価110円の株式をこの契約によって100円で買うことができるわけであるから権利は行使される．一方，その権利行使に伴い，売り手は買い手にその株を100円で売らなければならない．よって，この契約でオプションの売り手は10円の損(100円—110円)を被る（買い手は10円の収益を受ける）ことになる．また3か月後の価格が70円ならば，オプションの買い手は70円で買うことのできる株式を100円で買う必要はないから権利は行使されない．つまりこの契約で特にオプションの売り手の損益は生じない．以上より，この契約によるか3月後のオプションの売り手の損失（買い手の収益）の期待値を求めると10円×40%＋0円×60%＝4円となる．

また同様に，現在の価格が110円で行使価格が100円，3か月後満期のオプション契約の場合，3か月後にとりうる価格が130円かまたは90円であって，それぞれの確率が40%，60%であるなら，3か月後における売り手の損失（買い手の収益）の期待値は（130円－100円）×40%＋0円×60%＝12円となる．

なお，この場合，現在の価格110円が満期まで変動がなければ，この契約によって，オプションの売り手は10円の損，また買い手は10円の収益を受けることになろう．そこで一般的にこの10円が本質価格と呼ばれ，先の計算による12円から本質的価値の10円を引いた2円が時間価値と呼ばれるものとなる．

ところで，確率の考え方をもとにしたオプションプレミアムを計算する場合，①現在価格，②行使価格，③価格変動性，④満期までの期間，⑥短期利子率の5つの要素が必要となる．

たとえば，ある2つの株式A，Bがあり，それらが同じ期間，同じ価格変動性をもつとした場合，現在の価格が行使価格より大きいものほど満期時の株価が行使価格を上回る（売り手のリスク）確率は大きい．また，株式A，B各々の価格が現在同じ90円だとしても3か月あた

いしい　よしふみ　㈱ニッセイ基礎研究所
〒100 千代田区有楽町1—1—1　日比谷ビル

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

りの価格変動（ボラティリティー）で株式Aのほうが大きいならば，3か月後に，たとえば110円以上となる確率は株式Aの方が大きいはずである．さらに，1つの株式だけを考えるにしても1日後と3か月後とでは110円以上に価格が上昇する確率は明らかに後者のほうが大きい．一方，現在の90円と3か月後の90円とでは利子率分だけ価値が異なるので，現在の価格と行使価格を比較する場合，利子率による調整が必要となる．

以上が，オプションプレミアムの基本的考え方である．そこで以下，実際に活用されているオプションプレミアムの評価方法について，その仕組みを明確にしていくこととしたい（なお，以下ではヨーロピアン，コールオプションのプレミアムを考えることとする）．

（注）

- ヨーロピアンオプション：
  権利行使が満期時に限られるオプション（⇔アメリカンオプション）
- コールオプション：
  買う権利を取引対象とするオプション（⇔プットオプション）

2. バイノミアル・オプションプライシング

本節では，オプションプレミアム評価法の1つであるバイノミアル型のオプションプライシングについて考えることとする．なおその前提として，現在の株価が S_t，1期あたりの株価の変動率が上昇のとき u で，低下のときが d とする．この仮定から，1期後の株価 S_{t+1} は任意の時間 t において，

$$S_{t+1}=\begin{cases} S_t\, e^u \text{（株価上昇の場合）} \\ S_t\, e^d \text{（株価低下の場合）} \end{cases} \qquad (1\text{-}1)$$

で表わされる．

また，それぞれの起こり得る確率は株価上昇の場合の確率を p とすると，株価低下の確率は $1-p$ となる．

なお，ここで u，d，r（非危険利子率）間の関係は，

$u>r>d$ であり，

また，p は当然のことながら

$0<p<1$ である．

ところで，S_{t+1} と同様に，$t+2$ 期目の株価の変動 (S_{t+2}) を考えるならば，

$$S_{t+2}=\begin{cases} S_t\, e^{2u} \text{（株価上昇2回の場合）} \\ S_t\, e^{u+d} \text{（株価上昇1回，低下1回の場合）} \\ S_t\, e^{2u} \text{（株価低下2回の場合）} \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

となる．また，その起こり得る確率は，明らかにそれぞれ，p^2，$2p\ (1-p)$，$(1-p)^2$ である．

（確率）

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & S_t\, e^{2u} \cdots\cdots\cdots p^2 \\ & S_t e^u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ S_t \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_t\, e^{u+d} \cdots\cdots 2p(1-p) \\ & S_t e^d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & S_t\, e^d \cdots\cdots\cdots\cdots (1-p)^2 \end{tikzcd}$$

以上より，満期時 T における株価のとりうる値 S_T とその確率は，一般化すると，以下の通りである．

$S_T=S_t\, e^{ju+(I-j)d}$

その確率は $\binom{I}{j}\ p^j\,(1-p)^{I-j}$ (1-3)

ただし，$j=0, 1, 2\cdots\cdots, I.$

ところで，満期時点 T におけるコールの価値 C_T は，S_T（満期時価格）が K（行使価格）より小さければ0（権利行使されない）であり，大きければ S_T-K で表わされるから，$C_T=\max\,(0, S_T-K)$ と表わされる．よって，満期の1前期の $T-1$ 時点からの満期時 T におけるコールの価値を考えるならば，

$$C_T=\begin{cases} C_T{}^u \text{（株価上昇の場合：確率は } p\text{）} \\ C_T{}^d \text{（株価低下の場合：確率は } 1-p\text{）} \end{cases}$$

なお，ここで $C_T{}^u$，$C_T{}^d$ はそれぞれ，

$$C_T{}^u=\max\ (0,\ S_{T-1}\, e^u-K)$$
$$C_T{}^d=\max\ (0,\ S_{T-1}\, e^d-K) \qquad (1\text{-}4)$$

である．

ここで，以上のようなオプションの価値を $T-1$ 時点における n_{T-1} 単位の株式の保有と m_{T-1} 単位の債券（無リスク資産）を保有する投資家のポートフォリオの満期（T時点）での価値（C_T）で置き換えて考えるならば，

$$C_T=n_{T-1}\ (S_T)+m_{T-1}\,(1) \qquad (1\text{-}5)$$

と表わされるから，$C_T{}^u$，$C_T{}^d$ はそれぞれ，

$$C_T{}^u=n_{T-1}\, S_{T-1}\, e^u+m_{T-1}$$
$$C_T{}^d=n_{T-1}\, S_{T-1}\, e^d+m_{T-1} \qquad (1\text{-}6)$$

となり，その1期前の $T-1$ 時点におけるこのポートフォリオの価値（C_{T-1}）は

$$C_{T-1}=n_{T-1}\, S_{T-1}+m_{T-1}\, e^{-r\tau/I} \qquad (1\text{-}7)$$

$$\begin{cases} r\ \text{：非危険利子率} \\ \tau\ \text{：} (T-t)/I \\ I\ \text{：} t \text{ 時点より } T \text{ 時点までの期間の分割の回数} \end{cases}$$

で表わされる．なお，(1-6)式より，

$$n_{T-1}=(C_T{}^u-C_T{}^d)／\{(e^u-e^d)\cdot S_{T-1}\}$$
$$m_{T-1}=(C_T{}^d\, e^u-C_T{}^u e^d)／(e^u-e^d) \qquad (1\text{-}8)$$

となる．以上，$T-1$ 時点におけるポートフォリオの価値と T 時点におけるポートフォリオの価値の関係から議論を行なってきたわけであるが，同様に，$T-2$ 時点のポートフォリオと $T-1$ 時点におけるポートフォリオ価

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

値の関係を考えるならば,

$$C_{T-1}=\begin{cases} C_{T-1}{}^{u}=n_{T-1}\,S_{T-2}\,e^{u}+m_{T-1}\,e^{-r\tau/I} \\ \qquad\qquad\text{(株価上昇の場合：確率 } p\text{)} \\ C_{T-1}{}^{d}=n_{T-1}\,S_{T-2}\,e^{d}+m_{T-1}\,e^{-r\tau/I} \\ \qquad\qquad\text{(株価低下の場合：確率 } 1-p\text{)} \end{cases} \tag{1-9}$$

と表わされ,(1-7)式と同様に,C_{T-2} の価値は,

$$C_{T-2}=n_{T-2}\,S_{T-2}+m_{T-2}\,e^{-2r\tau/I} \tag{1-10}$$

となり,C_{T-1} の値は,次のように表わされる.

$$C_{T-1}=n_{T-2}\,S_{T-1}+m_{T-2}\,e^{-r\tau/I} \tag{1-11}$$

なお,これまでの議論と同様に,$C_{T-1}{}^{u}$, $C_{T-1}{}^{d}$ はそれぞれ,以下のように表わされる.

$$\begin{aligned} C_{T-1}{}^{u}&=n_{T-2}\,S_{T-2}\,e^{u}+m_{T-2}\,e^{-r\tau/I} \\ C_{T-1}{}^{d}&=n_{T-2}\,S_{T-2}\,e^{d}+m_{T-2}\,e^{-r\tau/I} \end{aligned} \tag{1-12}$$

よって,(1-12)式より

$$\begin{aligned} n_{T-2}&=(C_{T-1}{}^{u}-C_{T-1}{}^{d})/(e^{u}-e^{d})\;S_{T-2} \\ m_{T-2}&=e^{ri}\,(C_{T-1}{}^{d}\,e^{u}-C_{T-1}{}^{u}\,e^{d})/(e^{u}-e^{d}) \end{aligned} \tag{1-13}$$

が得られる.

以上の議論は $T-3$, $T-4$, …それぞれの時点についても同様に行なうことができる.満期から τ 期間前の t 時点のポートフォリオの価値を一般化した式で表わすと t 時点におけるポートフォリオの価値 C_t は

$$C_t=n_t\,S_t+m_t\,e^{-r\tau} \tag{1-14}$$

と表わされる.なお,以下の関係式がなりたつ.

$$\begin{cases} n_t=(C_{t+1}{}^{u}-C_{t+1}{}^{d})/(e^{u}-e^{d})\;S_t \\ m_t=e^{r(\tau-i)}\,(C_{t+1}{}^{d}\,e^{u}-C_{t+1}{}^{u}\,e^{d})/(e^{u}-e^{d}) \\ C_{t+1}{}^{u}=n_{t+1}\,S_t\,e^{u}+m_{t+1}\,e^{-r(\tau-\tau/I)} \\ C_{t+1}{}^{d}=n_{t+1}\,S_t\,e^{d}+m_{t+1}\,e^{-r(\tau-\tau/I)} \\ C_T=\max\,(S_T-K,\;0) \end{cases} \tag{1-15}$$

ところで,先の C_{T-1} の値を(1-7)式,(1-8)式,および(1-4)式から以下のように表わすことができる.

$$\begin{aligned} C_{T-1}&=e^{-r\tau/I}\,\{\phi\,C_T{}^{u}+(1-\phi)\,C_T{}^{d}\} \\ &=e^{-r\tau/I}\,\{\phi\max\,(0,\;S_{T-1}\,e^{u}-K) \\ &\quad+(1-\phi)\max\,(0,\;S_{T-1}\,e^{d}-K)\} \end{aligned} \tag{1-16}$$

なお,$\phi\equiv(e^{r\tau/I}-e^{d})/(e^{u}-e^{d})$

同様に,C_{T-2}の値は,

$$C_{T-2}=e^{-r\tau/I}\,\{\phi\,C_{T-1}{}^{u}+(1-\phi)\;C_{T-1}{}^{d}\}$$

となり,ここで(1-16)式を代入すると,

$$\begin{aligned} C_{T-2}=e^{-r\tau/I}\,\{&\phi^{2}\max(0,\;S_{T-2}\,e^{2u}-K) \\ &+2\phi\,(1-\phi)\max\,(0,\;S_{T-1}\,e^{d}-K) \\ &+(1-\phi)^{2}\max\,(0,\;S_{T-2}\,e^{2d}-K)\} \end{aligned} \tag{1-17}$$

となる.以上をさらに繰り返していくと,

$$\begin{aligned} C_{T-k}=e^{-rk\tau/I}&\sum\tbinom{k}{j}\,\phi^{j}\,(1-\phi)^{k-j} \\ &\max\,(0,\;S_t\,e^{ju+(k-j)\,d}-K) \end{aligned} \tag{1-18}$$

となる.なおここで,$k=I$, $T-k=t$ とすると,

$$C_t=e^{-r\tau}\sum\tbinom{I}{j}\,\phi^{j}\,(1-\phi)^{I-j}\max(0,S_t\,e^{ju+(I-j)d}-K) \tag{1-19}$$

なお,$\phi\equiv(e^{r\tau/I}-e^{d})/(e^{u}-e^{d})$

t 時点におけるコールプレミアムの値が一般化される.この(1-19)式で求められる値が,バイノミアル・(コール)オプションプレミアム(価格)である.

3. ブラック・ショールズ式

以上,オプションプライシングのバイノミアル型の説明を行なってきたわけであるが,実際のオプションプレミアム評価の方法として,より一般的に活用されているブラック・ショールズ式について,その簡単な説明をここで行なうこととしたい(なお,ここでの説明はJarrow-Rudd (1983) をもとにした).

将来T時点における株価の期待値は現在 t 時点における株価の短期利子率で($T-t$)期間分,複利計算したものに等しい.つまり,現在の株価はT時点における株価の期待値を短期利子率で割り戻した現在価値に等しい.式で表わすなら,

$$S_t=E\,[S_T]\cdot B\,(t,\;T-t) \tag{2-1}$$

- S_t : t 時点における株価
- S_T : T時点における株価
- $E\,[S_T]$: S_T の期待値
- $B(t,T-t)$: t 時点よりT時点までの期間の割り戻し利子率

同様にコールオプションプレミアムは,

$$C_t=E\,[C_T]\cdot B\,(t,T-t) \tag{2-2}$$

- C_t : t 時点におけるコールプレミアム
- C_T : T時点(満期)におけるコールプレミアム

と表わされる.ところで C_T の値は

$$C_T=\max\,(0,\;S_T-K)$$

であるから,この式を(2-2)式に代入して,

$$C_t=E\,[\max\,(0,\;S_T-K)]\cdot B\,(t,\;T-t) \tag{2-3}$$

となる.

◇価格変動プロセスの仮定

なおここで次の議論へとすすめるために,次式を仮定しておくこととする.

$$\log\,(S_{t+\triangle t}/S_t)=\mu\triangle t+\sigma\sqrt{\triangle t}\,Z \tag{2-4}$$

- $S_{t+\triangle t}/S_t$: t から $t+\triangle t$ の微小時間経過に伴う株価の変化率
- μ : 株価の単位時間あたりの(対数で表わした)平均変化率
- σ : 株価の価格変動性(標準偏差)
- Z : 平均0,標準偏差1で表わされるランダム変動項

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

なお，(2-4)式は株式の微小時間変化あたりの価格変動が，トレンドに沿って変動する項とランダム（確率）変動項によって表わされることを示している．またここで，ランダム変動が x から $x+dx$ の間にある確率は

$$\mathrm{Prob}[x \leqq Z \leqq x+dx] = N'(x) \cdot dx$$
$$= (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-(1/2)x^2} \cdot dx$$

$N'(x)$：正規確率密度関数

により表わされる．

◇**価格変動プロセスに伴う価格変動の平均，分散**

ところで(2-4)式は変形すると

$$S_{t+\triangle_t} = S_t \cdot \exp[\mu\triangle t + \sigma\sqrt{\triangle t}\,Z] \qquad (2\text{-}5)$$

とも表わされる．またこれをさらに変形することにより，また

$$\triangle S_t = S_{t+\triangle_t} - S_t$$

から

$$1 + \triangle S_t/S_t = 1 + (\mu\triangle t + \sigma\sqrt{\triangle t}\,Z)$$
$$+ (\mu\triangle t + \sigma\sqrt{\triangle t}\,Z)^2/2 + \cdots$$

が得られる．ここで2次以上の項を無視すると

$$\triangle S_t/S_t = \sigma\sqrt{\triangle t}\,Z + (\mu + \sigma^2 Z^2/2)\triangle t$$

となる．ここで $\triangle t$ は微小時間であるから期待収益率は

$E[Z]=0$，$E[Z^2]=1$，より

$$E[\triangle S_t/S_t] = (\mu + \sigma^2/2)\triangle t$$

となり，分散は

$$\mathrm{Var}[\triangle S_t/S_t] = \sigma^2\triangle_t$$

となる．なお，

$$E[\triangle S_t/S_t] = \exp[(\mu+\sigma^2/2)\triangle t] = \exp[r\triangle t]$$

(r：非危険利子率)

と仮定をおくならば，

$$r = \mu + \sigma^2/2 \qquad (2\text{-}6)$$

◇**コールオプションプレミアム**

ところで(2-3)式よりコールオプションレミアムは，$B(t,\ T-t) = e^{-r\tau}$ とすると

$$C_t = e^{-r\tau} E[\max(0,\ S_T - K)]$$

ただし，$\tau = T-t$

であった．よって

i）$S_T \leqq K$ の場合，

$$C_t = 0$$

ii）$S_T > K$ の場合，

$$C_t = e^{-r\tau} E[S_T - K]$$
$$= e^{-r\tau} E[S_T] - e^{-r\tau} K \qquad (2\text{-}7)$$

である．そして結局 C_t の値はイン・ザ・マネーの期待値となる．

式で表わすなら，{(アウト・オブ・ザ・マネーの確率)×(アウト・オブ・ザ・マネーのコールの価値）の期待値}＋{(イン・ザ・マネーの確率)×(イン・ザ・マネーのコールの価格)の期待値} で表わされる．一方，$[S_T > K]$ の起こり得る確率を p とすると $[S_T \leqq K]$ の起こり得る確率は $1-p$ となる．

注）イン・ザ・マネーとはコールオプションで，$S_t > K$ の状態

アウト・オブ・ザ・マネーとはコールオプションで，$S_t < K$ の状態

よって，C_t の値は

$$C_t = (1-p) \cdot \{0\} + \{e^{-r\tau} E[S_T | S_T > K] - e^{-r\tau} K\}$$
$$= e^{-r\tau} E[S_T | S_T > K] - e^{-r\tau} K \cdot p \qquad (2\text{-}8)$$

となる．

◇**満期時，イン・ザ・マネーの確率**

そこで次に確率 p の値を求めることが必要となる．なお(2-4)式より

$$S_T = S_t \exp[\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,Z]$$

であった．よって，確率 p は

$$p = \mathrm{Prob}[S_t \exp\{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,Z\} > K]$$
$$= \mathrm{Prob}[Z > -\{\log(S_t/K) + \mu\tau\}/(\sigma \cdot \sqrt{\tau})]$$

と求められる．なお，$\mathrm{Prob}[Z > -x] = \mathrm{Prob}[Z < x]$ であるから，結局

$$p = \mathrm{Prob}[Z < \{\log(S_t/K) + \mu\tau\}/(\sigma\sqrt{\tau})]$$
$$= N(\{\log(S_t/K) + \mu\tau\}/(\sigma\sqrt{\tau})) \qquad (2\text{-}9)$$

となり，確率 p は正規累積密度関数で表わされることになる．なおこの式の μ を先の(2-6)式を使って消去すると

$$p = N(h - \sigma\sqrt{\tau})$$

ただし，

$$h = \{\log(S_t/K) + r\tau + \sigma^2\tau/2\}/(\sigma\sqrt{\tau})$$

◇**満期時，イン・ザマネーの期待値**

以上，確率 p の値が求められたところで，(2-8)式によりコールオプションプレミアムを求めるのにさらに必要なのは $E[S_T | S_T > K]$ の値である．そこでこの値を q とおいて計算すると，

$$q = \int_K^\infty S_t \exp[\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,x] \cdot \exp[-x^2/2]$$
$$/(\sqrt{2\pi}) \cdot dx$$
$$= S_t \cdot \exp[(\mu+\sigma^2/2)\tau] \cdot \int_K^\infty \exp[-(\sigma \cdot \sqrt{\tau}$$
$$-x)^2/2]/(\sqrt{2\pi}) \cdot dx \qquad (2\text{-}10)$$

ところで先に述べたように確率変数 Z は

$$Z \geqq -\{\log(S_t/K) + \mu\tau\}/(\sigma\sqrt{\tau})$$

であったから，$y = \sigma\sqrt{\tau} - x$ とおくと

$$y < h = \{\log(S_t/K) + \mu\tau + \sigma^2\tau\}/(\sigma\sqrt{\tau})$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

また，(2-6)式より

$$=\log(S_t/K)+r\tau+\sigma^2\tau/2\}/(\sigma\sqrt{\tau})$$

よって(2-10)式は次のように簡単に表わされる．

$$q=S_t\cdot\exp[r\tau]\cdot\int_{-\infty}^{h}\exp[-y^2/2]/\sqrt{2\pi}\cdot dy$$
$$=S_t\cdot\exp[r\tau]\cdot N(h)$$

◇コールオプションプレミアム(B/S)式

以上，確率pの値と$E[S_T|S_T>K]\cdot p$の値を (2-8)式に代入すれば

$$C_t=S_t\cdot N(h)-K\cdot e^{-r\tau}\cdot N(h-\sigma\sqrt{\tau}) \quad (2\text{-}11)$$

ただし，$h=\{\log(S_t/K)+r\tau+\sigma^2\tau/2\}/\sigma\sqrt{\tau}$ が得られ，以上，オプションプレミアムの理論式（ブラック・ショールズ式）が導かれる．

4. オプション理論の応用 (ポートフォリオ・インシュランス)

(1) ＰＩ(ポートフォリオ・インシュランス)とは

投資家にとって最も好ましい投資は，リスクを回避しつつ一方で収益は最大限獲得することである．換言すれば，相場下落による損だけを回避し，相場上昇局面においては現物ポートフォリオによる収益を十分獲得するといった投資である．

この目的を達成するためには次の２つの方法がある．

①プットオプションの買いによる方法

１つは現物ポートフォリオにプットオプションを組み合せる方法である．たとえば，現物m単位に対し，プットオプション（行使価格K）を同じm単位組み合せることにより，満期時におけるプットオプション付きポートフォリオの損益（V_P）は（満期時の現物価格をS_Tとすると），

$$V_P=m\,S_T+m\cdot\max(0,\ S_T-K)$$

となる．つまり，満期時，現物価格の行使価格以上の上昇において，ポートフォリオの価値V_PはS_Tとなり，現物価格が行使価格以下の場合V_PはKとなる．

しかしながら，この方法（オプション）には次のような問題点がある．

- プレミアム（損害保険料に相当するもの）が高すぎる
- 市場の環境（市場規模等）の問題

②ヘッジ手段である先物の建玉量を調整することによってオプションと同様の効果をあげる方法．

一方で，先物(売建)の建玉量を調整することによって先のプットオプションを活用した場合と同様の効果をあげる戦略法が考えられる．なおこの方法で，重要なポイントとなるのは先物（売建）の比率(ヘッジ比率)をいかに調節すべきかということである．そこでこのヘッジ比率の設定方法として数学的手法を用いるのがＰＩ（ポートフォリオ・インシュランス）と呼ばれるものである．

なお，PI には CPPI (Constant Proportional Portfolio Insurance), OBPI (Option Based Portfolio Insurance) があるが，一般的には後者のＯＢＰＩが活用されているようである．

そこで，まず，ＯＢＰＩの簡単な説明からはじめたい．

(2) OBPI (Option Based Portfolio Insurance)

この投資戦略の方法は，証券投資における価格低下リスクのコントロールの方法として，先物と現物の組合せによりその損益の形状をプットオプション付きのポートフォリオいわゆるプロテクティブプットの形に近似させようとすることを目的とする．ところで，現物（リスク資産）m単位に対し，プットオプションm単位を組み合せたt時点におけるプロテクティブプットのポートフォリオの価値V_{Pt}は，t時点における証券価格をS_t，プットオプションの価格をP_tとすると，以下の通りである．

$$V_{Pt}=m\,S_t+m\,P_t \quad (3\text{-}1)$$
$$P_t=-S_t\,N(-d_t)+K\,e^{-r\tau}N(-d_t+\sigma\sqrt{\tau})$$
$$d_t=\{\log(S_t/K\cdot e^{-r\tau})+\sigma^2\tau/2\}/\sigma\sqrt{\tau} \quad (3\text{-}2)$$

P_t：t時点における行使価格Kのプットオプションプレミアム

S_t：t時点における証券価格

r：無リスク利子率

τ：$T-t$

σ：価格変動性（標準偏差）

$N(\cdot)$：累積正規確率密度関数

一方，証券現物と先物（売建）との組合せによるポートフォリオのt時点での価値V_{Ft}は現物（初期）をm単位，先物の単位をn_tとすると，

$$V_{Ft}=mS_t+\phi_t\,S_t+n_t\,(F_t-F_{t-1})$$
$$\phi_t=\phi_{t-1}+n_{t-1}(F_{t-1}-F_{t-2})/S_{t-1} \quad (3\text{-}3)$$

F_t：t時点における先物価格（$=S_t\,e^{r\tau}$）

となる（なお，$\phi_t=0$ ($t=0,\ 1$)）．

ここで，現物と先物の組合せによるポートフォリオの現物（先物）価格変動に対する価値変化の形状を先のプロテクティブプットの形に近似させるわけであるから，以下の式を満たすことが必要となる．

$$\partial V_{Ft}/\partial S_t=\partial V_{Pt}/\partial S_t \quad (3\text{-}4)$$

よって (3-1)，(3-2)，(3-3)，(3-4) 式より，先物のt時点における必要投資単位n_tは，

$$n_t=e^{-r\tau}\{m\,N(d_t)-\phi_t\} \quad (3\text{-}5)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

と計算される．

すなわち，現物のm単位に対し，先物（売建）を(3-5)式で計算されるn_t単位組み合せることにより($N(d)$などの変化に合わせてダイナミックに先物の投資比率の調整を行なうことにより)，そのポートフォリオはプロテクティブプットオプションと同じ効果が得られる．

このようなヘッジ比率算定モデル（PI）により，株式価格変動に対するポートフォリオの損益は，図1で表わされたようなものとなる．

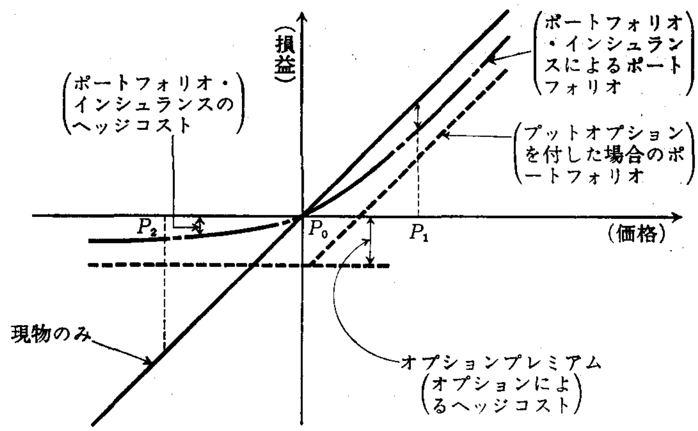

図 1　ポートフォリオ・インシュランスによる株式ポートフォリオの損益（“証券投資の新技法”，金融財政事情研究会より）

(3) CPPI (Constant Proportional Portfolio Insurance)

ポートフォリオ・インシュランスには，先に述べた通り，OBPIとCPPI がある．そこで，次にCPPI(Constant Proportional Portfolio Insurance)についても簡単に説明しておくこととしたい．

ところで，CPPIはきわめて簡単な方法で，先物の投資(ヘッジ)比率を算出することができる．その方法とは，以下の通りである．

いま，t時点における現物ポートフォリオの価格をE_tとし，フロアーをF（一定），ある乗数をk（一定）とすると，t時点におけるヘッジ額H_tは

$$H_t=S_t-k\ (S_t-F) \qquad (3\text{-}6)$$

で計算される．この内容をわかりやすく説明するなら，以下の通りである．

まず，現物ポートフォリオの価格に対し，フロアーを具体的に決める（たとえば，現物価格100億円に対し，値下がりのリスクを90億円までにとどめたいのであればフロアーは90億円と決定される)．ここで現物ポートフォリオの価格とフロアーの差額(ここの例では10億円)をクッションとする．

次に，初期の先物ヘッジ比率を決定する（たとえば，先行きの価格変動が不確定であるため，とりあえず現物ポートフォリオに対し，50%の先物を組み合せる)．換言するなら，リスクヘッジを行なわない，積極投資部分の金額を決定する（この例の場合，50億円)．

以上により，先の(3-6)式の乗数k（積極投資部分の金額/クッション)が決定される．この乗数を現物（先物）の価格変動（クッションも同時に変動）にしたがって常に一定値になるように，先物の比率（ヘッジ比率）を調整することにより，先に説明した，プロテクティブ・プットに類似した戦略をたてることが可能となる．

たとえば，t時点の現物ポートフォリオの価格が100億円から，95億円に低下した場合，必要なヘッジ額は，先の式(3-6)より，

$$\begin{aligned} H_t &= 95-5\times(95-90) \\ &= 70\ (億円) \end{aligned}$$

となり，t時点において，現物ポートフォリオ95億円に対し，70億円のリスクヘッジが必要となる．

参　考　文　献

（オプションプライシング）

- Black,F.and M.Scholes,“The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” Journal of Political Economy, May 1973.

——オプション理論式を導いた最初の論文——

- Cox, J.C. and M. Rubinstein, Options Markets, Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, 1985.
- Jarrow. R. and Rudd. A, Option Pricing, Richard D. IRWIN, Inc., 1983.

（ポートフォリオ・インシュランス）

- 浅野幸弘・吉原正善「外国株ポートフォリオ・インシュランスの期待収益」，ファイナンス研究（No.9), September 1988.
- Perold. A. F. and Sharpe, W. F., “Dynamic Strategies for Asset Allocation,” Financial Analysts Journal, January/February, 1988.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．