

ファイナンスにおける最適停止問題

——オプション証券を中心に——

澤木 勝茂, 田畑 吉雄

1. はじめに

将来のある一定期間内にあらかじめ定められた価格である商品を買う権利をコール・オプション, 売る権利をプット・オプションといい, これらの権利を売買する市場をオプション市場という。また, 一定期間の任意の時点で権利行使が可能なオプションをアメリカン, 満期時のみで権利行使可能なものをヨーロピアンと呼ぶ。

このようにオプションにはさまざまな種類があり理論的解明が最も進んでいるのが, 株式に対するオプションで, Black and Scholes [1]はヨーロピアン・コール・オプションに関する完成度の高い基本モデルとしてファイナンス研究者から高い評価を得ている。彼らによる均衡価格の導出は裁定理論の上にその基礎を置き, 裁定理論を用いて証券の市場価格を導き出すのが最近のファイナンスの主流である。歴史的には1960年代の後半から1970年代の前半にかけて最適制御理論が資本資産の評価理論で重要な役割を果たしてきた。たとえば, Merton [8], [9], McKean [7] や Samuelson [11], [12]および沢木 [17]である。

本報告は, 主として後者の接近法の1つである最適停止問題の研究成果を利用して, オプションおよびワラントの最適な権利行使政策を明らかにし, それよりオプション証券の均衡価格とその定性的性質を明らかにしようとするものである。オプション評価モデルは, ポートフォリオ・インシュアランスや指数, 先物および通貨などの商品に対するオプションにも適用でき, その考え方はファイナンスの基本的財産としての分析手法を提供してくれる。

2. オプションの最適権利行使問題

時間を連続的にとり株式に対する満期 T をもつアメリカン・コール・オプションを考えよう。ここでオプションの対象となる株式は満期内で配当支払いがないものと仮定する。ワラントはオプションよりもはるかに権利行使の期間(満期 T)が長く, $T \rightarrow \infty$ のときパーペチュアル・ワラントである。オプションの権利を行使するとき支払わなければならない価格を行使価格という。ここでは, 個人としての投資家の最適行動を最適停止問題の枠組の下で分析する。すなわち, ある投資家が一定の行使価格で普通株を買う権利をもつオプションをすでに所有して, 満期日までのある日の株価と行使価格との差で与えられる資本利得の期待値を最大にするような最適停止政策(権利行使日)をいかにして求めるかという問題である。次のような記号を使用する。

$X(t)$ = 時刻 t での株価, $X(t) > 0, \forall t \in [0, T]$

K = 行使価格, $K > 0$

τ = 停止時刻(権利行使の時刻), $\tau \in (0, T]$

r = 無危険利子率, $r > 0$

いま, 時刻 τ にいて株価が $X(\tau)$ であるとしよう。もし $X(\tau) > K$ のとき, 投資家が行使価格 K を支払ってオプションの権利を行使して得た株式を市場で売却すれば資本利得 $X(\tau) - K$ を得る。もし $X(\tau) < K$ ならば, 権利を行使しないから資本利得は 0 である。時刻 0 でこのオプションの購入価格が c のとき, 時刻 τ での価格に無危険利子率 r で割増しすれば時刻 τ での投資家の資本利得は

$$(X(\tau) - K)^+ - e^{r\tau} c$$

となる。ここで $(x)^+ = \max(x, 0)$ である。完全競争の下では, このような資本利得は 0 であるとすれば上式は

$$c = e^{-r\tau} (X(\tau) - K)^+$$

となる。しかし, 時刻 0 においては $X(\tau)$ は確率変数であり, したがって権利行使時刻 τ もまた確率変数である。換言すれば, オプションの購入時刻 0 で何時オプションの権利行使をするかの問題は, 時刻 0 での株価 $X(0) = x$ が所与の下での典型的な最適停止問題であり, このオプションから獲得される期待割引利得

$$(1) \quad E[e^{-r\tau} (X(\tau) - K)^+ | X(0) = x]$$

さわき かつしげ 南山大学 経営学部 情報管理学科
〒466 名古屋市昭和区山里町18

たばた よしお 大阪大学 経済学部

を最大にするような停止時刻を求める問題である。次に株価のダイナミクスを定義しよう。株価の確率過程として対数正規分布にしたがう幾何ブラウン運動を仮定する。すなわち、

$$(2) \quad dX(t)/X(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$$

とし、ここで $W(t)$ は標準ウィナー過程で、 μ と σ はそれぞれ平均および標準偏差のパラメータである(注1)。株価を(2)式のようにその収益率で定義すれば株価は確率1で正の値をとる。任意の $X(0)=x$ に対して確率微分方程式(2)の解(連続かつ唯一の)は

$$(3) \quad X(t) = xe^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)}$$

である。ファイナンス理論では、証券の価格のダイナミクスを(2)式すなわち(3)式のように記述することが多い。このようにウィナー過程の上で定義された証券価格のサンプル・パスは、連続であっていたところで微分不可能である非有界変動の関数である。この事実がファイナンス理論での裁定による証券の均衡価格の導出に重要な役割を果している。株価が(2)式にしたがって変動することがわかっているとき、 $X(t) \geq K$ となる時刻でのみ権利を行使するからオプションの“合理的価格”を $c(x, T)$ として次のように定義しよう。

$$(4) \quad c(x, T) = \sup_{0 < \tau \leq T} E[e^{-r\tau} (X(\tau) - K)^+ | X(0) = x]$$

ここで、 τ は株価 $X(\cdot)$ に関する停止時刻で、 E は $X(\cdot)$ に関する期待値である。

いま最適停止政策のクラスを株価が y になれば権利行使するような政策のクラスに限定しよう。さらに、株価が y になる最初の時刻を確率変数 $\tau(y)$ で表わす。すなわち、 $\tau(y) = \inf\{t \geq 0 : X(t) = y, X(s) < y, \forall s < t\}$ であり、これは $X(0)=x$ から出発して y になるまでの最小到達時間のことである。 $X(t)$ の1つのサンプル・パスに対して以上の最適停止問題を図示すれば図1のようなになる。上述のような停止政策のクラスの下では(4)式的最適停止問題は次のようになる。

$$(5) \quad \begin{aligned} & \max_{y \geq K} E[e^{-r\tau(y)} (X(\tau(y)) - K)^+ | X(0) = x] \\ & = \max_{y \geq K} (y - K) E[e^{-r\tau(y)} | X(0) = x] \\ & = \max_{y \geq K} (y - K) \left(\frac{x}{y}\right)^\rho \equiv \max g_x(y) \end{aligned}$$

ただし、 $g_x(y) = (y - K)(x/y)^\rho$ で、 $\rho = \sqrt{\mu^2/\sigma^4 + 2r/\sigma^2} -$

注1) この節では連続時間の下で議論しているが、離散時間の下でも同様の議論が可能である。第3節では株価が離散時間の対数ランダム・ウォークをする場合について分析する。

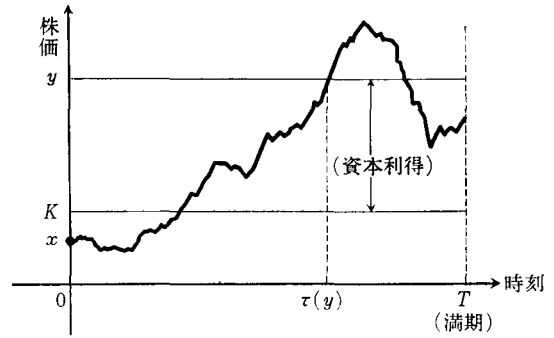


図1 権利行使の時刻 $\tau(y)$ と資本利得

$\mu/\sigma^2, \rho > 0$, である。 $g_x(\cdot)$ の1階および2階の導関数を求めると

$$g_x'(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^\rho \frac{1}{y} [\rho K - (\rho - 1)y]$$

$$g_x''(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^\rho \frac{\rho}{y^2} [-K(\rho + 1) + (\rho - 1)y]$$

となる。したがって、 $y < K\rho/(\rho - 1)$ で $g_x(\cdot)$ は増加し、 $y > K\rho/(\rho - 1)$ で減少することがわかる。故に、 $\rho > 1$ ならば $g_x'(y^*) = 0$ となる y^* は

$$(6) \quad y^* = \frac{K\rho}{\rho - 1}$$

となって、条件 $y^* \geq K$ を満たす。すなわち、オプションの権利を満期前に行使する条件は、 $\rho > 1$ で、これは

$$(7) \quad r > \mu + \sigma^2/2$$

と同値である。(6)式の y^* を(5)式に代入することにより期待割引利得の最大値は

$$g_x(y^*) = \frac{K}{\rho - 1} \left[\frac{x(\rho - 1)}{K\rho}\right]^\rho$$

となる。この最大期待割引利得は、最適停止政策のクラスを限定することによって得られたものであるから、オプションの合理的価格 $c(x, T)$ は(7)式の条件 $r > \mu + \sigma^2/2$ の下で

$$(8) \quad c(x, T) \geq \frac{K}{\rho - 1} \left[\frac{x(\rho - 1)}{K\rho}\right]^\rho$$

を満たす。ここで(8)式の右辺は x の増加かつ凸な関数であることに注意しよう。また最適な停止時刻は $\min\{\tau(y^*), T\}$ であり、権利を満期前に行使する確率は $P\{\tau(y^*) < T\}$ であり、 $T \rightarrow \infty$ のとき $P\{\tau(y^*) < T\} \rightarrow 1$ となる。

次に $0 < \rho \leq 1$ のとき、すなわち

$$(9) \quad r \leq \mu + \sigma^2/2$$

の場合を議論しよう。この場合、 $g_x'(y) \geq 0, g_x''(y) \leq 0$ となるから、 $g_x(y)$ を最大にする y の値は限りなく大に

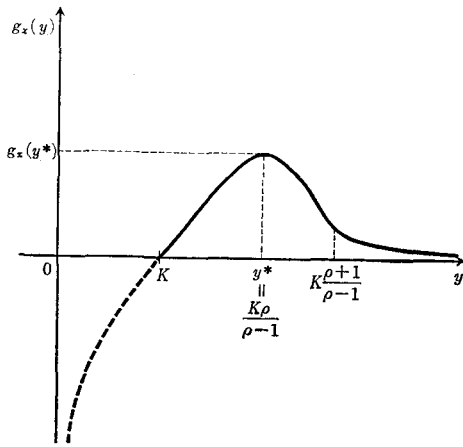


図 2 $r > \mu + \sigma^2/2$ のとき

なる。明らかに $y \rightarrow \infty$ のとき確率 1 で $\tau(y) \rightarrow \infty$ となるから、十分大なる y に対して $P\{\tau(y) \geq T\} \rightarrow 1$ となる。したがって、(9)式で与えられる条件の下では

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \leq T} E[e^{-r\tau}(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \\ &= E[e^{-r\tau}(X(T) - K)^+ | X(0) = x] \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $r \leq \mu + \sigma^2/2$ のとき最適な権利行使政策は満期 T まで権利行使を行わないことである。以上の議論を図示すれば図 2 および図 3 を得る。 $X(t)$ が (2) 式にしたがう対数正規分布であることを用いて上式を計算すれば

$$\begin{aligned} (10) \quad & E[e^{-rT}(X(T) - K)^+ | X(0) = x] \\ &= xe^{(\mu + \sigma^2/2 - r)T} \Phi([\log(x/K) + (\mu + \sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}) \\ &\quad - Ke^{-rT} \Phi([\log(x/K) + \mu T]/\sigma\sqrt{T}) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布である。

次に、オプションからの期待利得および価格 $c(x, T)$ の上界について議論しよう。(2)式の株価の微分方程式において $E[e^{\theta w(t)}] \leq e^{\theta^2 t}$ となる $\theta > 1$ が存在すると仮定する。たとえば、 θ として (5) 式の ρ を採用すれば上の不等式は等号で成立する。もし $r > \mu + \sigma^2/2$ ならば、

$$\theta > \sqrt{\frac{\mu^2 + 2\sigma^2(\mu + \sigma^2/2)}{\sigma^4}} - \mu/\sigma^2 = 1$$

となって、上の不等式を満足する。

命題 1 任意の $X(0) = x$ に対して関数 $f(x)$ を

$$(11) \quad f(x) = \begin{cases} x^\theta \left(\frac{\theta-1}{K}\right)^{\theta-1} / \theta^\theta, & x \leq \frac{K\theta}{\theta-1} \text{ のとき} \\ x - K, & x > \frac{K\theta}{\theta-1} \text{ のとき} \end{cases}$$

とすれば、すべての x と停止政策 τ について

$$E[e^{-r\tau}(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \leq f(x)$$

が成立する。

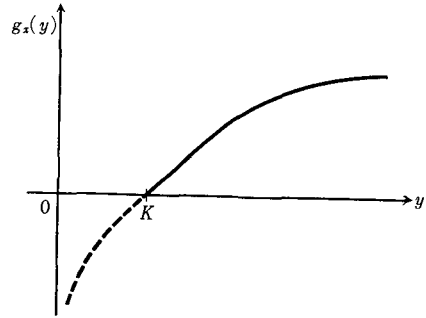


図 3 $r \leq \mu + \sigma^2/2$ のとき

証明は、離散時間の場合について Karlin and Taylor [5] が与えているから省略する。命題 1 を注意深く観察すればその含意は次のように要約される。

- (i) 期待割引利得の上界 $f(x)$ は、初期値 x と行使価格 K のみに依存して、無危険利率 r や時刻 t から独立であるばかりでなく株価の分布関数からも独立である。また、満期までの権利行使を望むオプション所有者のいかなる停止政策からも独立である。
- (ii) この上界 $f(x)$ をオプションの売手が用いるならば、 $f(x)$ は売手の平均損失の上限を意味する。オプションの買手は今日の株価（初期値）が $K\theta/(\theta-1)$ より大ならばその期待割引利得はただちに権利行使したときの値 $(x-K)$ に高々等しい。
- (iii) $x < K\theta/(\theta-1)$, $\theta > 1$, のとき $0 < f'(x) < 1$, $f''(x) > 0$ であり、 $f'(K\theta/(\theta-1)) = 1$ である。したがって、すべての $x > 0$ に対して $f(\cdot)$ は増加で凸の関数である。
- (iv) 命題 1 と (8) 式とを一緒にすれば $\rho > 1$ のとき合理的価格 $c(x, T)$ は $g_x(y^*) \leq c(x, T) \leq f(x)$ を満たす。

以上の議論をふまえて命題 1 を図示すれば図 4 のようになる。

3. オプション評価モデル

Black and Scholes [2] によるオプション評価モデルは、証券の評価に不確実性の概念を明示的に取り入れて均衡価格を導出している点とファイナンス理論への幅広い応用力をもつことから、ファイナンスにおける 1970 年代の最も輝かしい成果の 1 つとして評価されている。この節では、オプションの均衡価格を彼らとは異なる方法で導出してみよう。

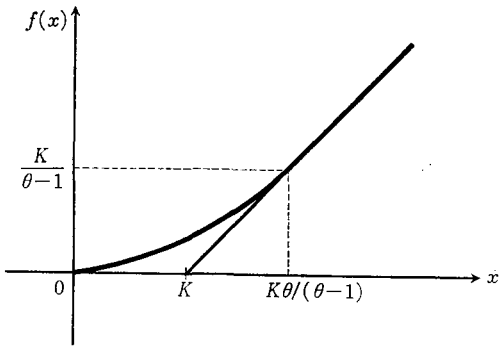


図 4 期待割引利得の上界 ($\theta > 1$ のとき)

前節で、もし $r \leq \mu + \sigma^2/2$ ならばオプションの最適な権利行使は満期まで待つことであることをみた。(9)式のこの条件の代りに $\mu \geq 0$ と仮定すれば、これを次のように説明することもできる。 $\mu \geq 0$ のとき(2)式で与えられる株価の確率過程 $\{X(t)\}$ は明らかにサブ・マルチンゲールである。サブ・マルチンゲールと凸関数の合成関数である $[X(t) - K]^+$ もまたサブ・マルチンゲールになる。任意抽出定理 (Optional sampling theorem)注2) よりすべての停止政策 τ に対して

$$E[(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \leq E[(X(T) - K)^+ | X(0) = x]$$

が成立する。ゆえに

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \leq T} E[(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \\ &= E[(X(T) - K)^+ | X(0) = x] \\ (12) \quad &= x e^{(\mu + \sigma^2/2)T} \Phi\left(\left[\log \frac{x}{K} + (\mu + \sigma^2/2)T\right] / \sigma \sqrt{T}\right) \\ & \quad - K \Phi\left(\left[\log \frac{x}{K} + \mu T\right] / \sigma \sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

となって、これを時刻0の時点で無危険利子率 r で割引いて評価すれば第2節の(10)式と同一の式を得る。(10)式および(12)式の導出に当って期待値は株価の確率測度に関して計算した。ここで、株価の確率測度に関して絶対連続であり、かつ $r = \mu + \sigma^2/2$ となるような確率測度を考えよう。このような確率測度を危険中立的な確率測度と呼び、この危険中立的な確率測度に関する期待値を E^* と標記しよう。このとき、

$$\begin{aligned} & E^*[e^{-rT} (X(T) - K)^+ | X(0) = x] \\ (13) \quad &= x \Phi\left(\left[\log x/K + (r + \sigma^2/2)T\right] / \sigma \sqrt{T}\right) \\ & \quad - K e^{-rT} \Phi\left(\left[\log x/K + (r - \sigma^2/2)T\right] / \sigma \sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

注2) たとえば、Chow et al[3]やKarlin and Taylor[5]を参照せよ。

となって、Black and Scholes[1]のオプション評価モデルの公式を得る。(13)式を $V(x, T, K, r)$ とすれば、

$$\begin{aligned} \partial V / \partial x &> 0, \quad \partial^2 V / \partial x^2 > 0, \quad \partial V / \partial T > 0 \\ \partial V / \partial r &> 0, \quad \partial V / \partial \sigma > 0, \quad \partial V / \partial K < 0 \end{aligned}$$

なる性質が容易に確認できる。それぞれの比較静学的解釈も明らかであろう。

(13)式のオプションの公式は動的計画法によっても求めることができる。便宜的に、時間を離散にとり時刻 t での株価 X_t は

$$X_t = X_0 \cdot Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_t$$

で与えられるとしよう。ここで $X_0 = x$ は所与で、各 Y_t は同一で独立な正値確率変数である。したがって、 $\{X_t\}$ は対数ランダム・ウォークである。任意の時刻 $t \leq T$ までは権利を行使しなかったとき、 $X(t) = x$ の下で時刻 t 以後最適に行動したときの期待利得を $V_t(x)$ とすれば、動的計画法による最適性の原理より

$$(14) \quad V_t(x) = \max\{x - K, E[V_{t+1}(x \cdot Y_{t+1})]\}$$

を得る。ただし、 $t = 1, 2, \dots, T$ であり、満期 T では

$$V_T(x) = \max\{x - K, 0\}$$

である。 $V_t(x)$ は次のような定性的性質をもつ。

- 性質(i) $V_t(x)$ は x の増加かつ凸な連続関数である。また $V_t(x)$ は t の減少関数である。
- (ii) もし $E[Y_t] < 1$ ならば、 $V_t(x) - x$ は x の減少関数である。各 t に対して

$$y_t^* = \inf\{x : V_t(x) - x \leq -C\}$$

と定義し、もし上の集合が空ならば y_t^* は ∞ とする。 y_t^* は t の減少関数である。

命題2(i) もし $E[Y_t] < 1$ ならば次のような最適な権利行使政策が存在する：各時刻 t での株価が x のとき時刻 t で、

- $x > y_t^*$ ならば権利を行使する。
- $x \leq y_t^*$ ならば権利を行使しない。

(ii) もし $E[Y_t] \geq 1$ ならば満期 T まで権利を行使しないのは最適である。

命題2の証明は、Taylor[13]およびより一般的な条件の下で田畑・沢木[16]が与えているのでここでは省略する。命題2(ii)より投資家が株価が平均的に増大すると予想するならば、満期まで何もせずに待つべきである。満期 T で $X(T) > K$ ならば権利を行使し、 $X(T) \leq K$ ならば権利行使をしないことになる。したがって、このときアメリカン・オプションはヨーロッパン・オプションに帰着する。この場合も、オプションからの最大期待割引利得は

$V_0(x, T) = e^{-rT} E[\max(X(T) - K, 0) | X(0) = x]$ となつて、(10)式と同一の式を得る。ここで期待値を株価の確率測度ではなく危険中立的な確率測度に関して計算すれば、Black and Scholes [1] のオプション評価モデルの評価式(13)が求められることになる。

4. マルコフ過程の下での最適停止問題

前節までは株価の不確実性がウィナー過程より派生する場合に限定して考察してきた。ここでは、より一般的にいくつかのマルコフ過程の下でのオプション証券の評価への応用を最適停止問題として議論しよう。

株価は単調性をもつマルコフ過程にしたがうとし、その状態集合を S としよう。最適停止問題は単調マルコフ過程 $\{X(t)\}$ に対して

$$V(x, T) = \sup_{\tau \leq T} E[(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x]$$

を満たす $V(\cdot, \cdot)$ とそれを与える最適停止政策 τ^* を求めることである。ある部分集合 $G \subset S$ に対して

$$\tau(G) = \inf \{t > 0 : X(t) \in G\}$$

を定義する。 $\tau(G)$ は目標としての株価の集合 G に初めて達するまでの時刻を表わしている。もしすべての $x \in S$ について $P\{\tau(G) < \infty | X(0) = x\}$ がかつ $P\{X(t) \in G, 0 < t < \infty | X(0) = x\} = 1$ ならば集合 G は $X(t)$ の吸収集合であるという。 $x \wedge y = \min\{x, y\}$ と標記する。

命題 3 もし G が吸収集合で、 $[X(\tau(G) \wedge t) - K]^+$ がすべての $X(0) = x \in S \setminus G$ について有界なサブ・マルチンゲールであり、すべての $x \in G$ についてスーパー・マルチンゲールならば、すべての τ に対して

$$(16) \quad E[(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \leq E[(X(\tau(G)) - K)^+ | X(0) = x]$$

が成立する。

証明は chow et al [3] を参照せよ。この命題よりただちに次の系を得る。

系 命題 3 と同じ条件の下で

$$(17) \quad V(x, T) \equiv \sup_{\tau \leq T} E[(X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \\ = E[(X(\tau(G)) - K)^+ | X(0) = x]$$

が成立する。すなわち、目標の株価集合 G に初めて達した時刻で権利行使をすることは最適である。

次に、具体的な単調マルコフ過程について命題 3 とその系の結果を調べてみよう。(16)および(17)式は、オプション証券の1つの評価式たる $V(\cdot, \cdot)$ の具体的な計算手順からは程遠い。株価 $X(t)$ は、独立増分をもつ過程 $z(t)$ と指数確率変数 θ によって次のように与えられると

しよう。

$$(18) \quad X(t) = \begin{cases} X(0)e^{z(t)}, & t < \theta \text{ のとき} \\ 0, & t \geq \theta \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし $P\{\theta \geq t\} = e^{-at}$, $t \geq 0$, である。(18)式で定義される株価は、企業の破産や投資家の死亡の可能性を含んだ確率過程になっている。 A をマルコフ過程の特性作用素(characteristic operator) とし、株価のある水準 y^* は条件

$$(19) \quad \begin{cases} A[x - K]^+ - a[x - K]^+ \leq 0, & \forall x \geq y^* \\ A[x - K]^+ - a[x - K]^+ > 0, & \forall x < y^* \end{cases}$$

を満たすものとしよう。もし株価が0になる点を除いて $X(t)$ が増加過程ならば、 $G \equiv \{0\} \cup [y^*, \infty)$ は命題 3 の仮定を満たす吸収集合である。したがって、 τ^* を

$$(20) \quad \tau^* = \inf \{t > 0 : X(t) \geq y^*\}$$

と定義すれば、命題 3 の系によって次式を得る。

$$(21) \quad V(x, T) = \sup_{\tau \leq T} E[e^{-a\tau} (X(\tau) - K)^+ | X(0) = x] \\ = E[e^{-a\tau^*} (X(\tau^* \wedge T) - K)^+ | X(0) = x]$$

ここで、株価が停止時刻 τ^* までに消滅しない確率 $e^{-a\tau^*}$ が割引因子の役割を果たしている。 y^* は(19)式により、 τ^* は(20)式により、 $V(x, T)$ は(21)式によって逐次に記述されるから、最大期待利得とその最適な権利行使政策は計算が可能である。もし $z(t) = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)$ ならば第2節の幾何ウィナー過程であり、もし $z(t) = \mu t + \sigma S(t)$ で $S(t)$ がコーシー過程であったり、 $z(t)$ がポアソン過程であれば、集合 $\{0\}$ を除いて単調マルコフ過程となって同様の議論を適用することが可能である。ここでの議論のエッセンスは、株価が目標たる吸収集合 G に達するまでは確率過程 $[X(\tau(G) \wedge t) - K]^+$ がサブ・マルチンゲールを形成し、吸収集合 G の中ではスーパー・マルチンゲールを形成するということである。もし $[X(t) - K]^+$ が $t < \tau(G)$ でサブ・マルチンゲールを形成しないならば、最適な権利の行使時刻は企業が破産するか株価がある一定水準 y^* 以上になる時刻とは限らない。もしサブ・マルチンゲールを形成したとしても、一般的な効用関数 $u(\cdot)$ に対して最適停止問題を

$$\sup_{\tau \leq T} E[u((X(\tau) - K)^+) | X(0) = x]$$

と定義すれば、最適な停止政策について何も言えない。たとえば、 $u(x) = x^\alpha$, $\alpha < 1$, ならば、 $X(t)$ がサブ・マルチンゲールを形成したとしても $([X(t) - K]^+)^\alpha$ はサブ・マルチンゲールではない。

参考文献

- [1] Bachelier, L.; *Théorie de la Speculation*, Ph. D thesis presented 29.3. 1900 in Sorbone, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 17 (1900), s. 3., 21-86, English translation available in [4].
- [2] Black, F. and Scholes, M.; The Pricing of Option and Corporate Liabilities, *J. of Optitcal Economy*, vol. 81 (1973), 637-659.
- [3] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D.; *Great Expectation: The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin Co., Boston, 1971.
- [4] Cootner P. H.; *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, 1964.
- [5] Karlin, S. and Taylor, H. M.: *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.
- [6] Mandelbrot, B. B.; The Valuation of Certain Speculative Prices, *J. Business*, 36 (1963), 394-419.
- [7] McKean, H. P. JR.; A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, *Industrial Management Rev.*, 6 (1965), 32-39.
- [8] Merton, R. C.; Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-time case, *Rev. Econ. Statist*, 57 (1969), 247-257.
- [9] Merton, R. C.; Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-time Model, *J. of Economic Theory*, 3 (1971), 373-413.
- [10] Richard, S. F.; Optimal Impulse Control of a Diffusion Process with both Fixed and Proportional Costs of Control, *SIAM J. on Control*, 15 (1977), No 1.
- [11] Samuelson, P. A.; Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Rev.*, 6 (1965), 13-32.
- [12] Samuelson, P. A.; Mathematics of Speculative prices, *SIAM Review*, 15 (1973), No 1, 1-42.
- [13] Taylor, H. M.; Evaluating a Call Option and Optimal Timing Strategy in the Stock Market, *Management Science*, vol.14 (1967), 111-120.
- [14] Taylor, H. M.; Bounds for Stopped Partial Sums, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 43 (1972), 733-747.
- [15] Zabczyk, J.; Stochastic Control on Stock Exchange, *Centre de Recherches Mathematiques*, Université de Mantréal (1978).
- [16] 田畑吉雄・沢木勝茂: American Call Option の最適行使問題, 大阪大学経済学第34巻第2・3号(1985) 283-289.
- [17] 沢木勝茂: 確率微分と財務論における連続時間モデル, アカデミア第82号 (1984), 25-44.

論文・事例研究の原稿募集!

ORの特徴は実践にあるといわれています。実際的な応用をぬぎにした理論ということはORでは考えられません。本誌でも以前から会員の皆様からの事例研究の報告をお願いしてきましたが、まだ十分な成果をあげているとはいえません

「論文・事例研究」は企業、研究所、大学等で実際に行なった事例を論文としてまとめたものを広く会員の皆様に紹介することを目的として作られた欄です。この論文は2人のレフリーによって正式に審査されますが、マネジメント、行政、工学等の広い分野において適用対象の新しさ、適用方法の新しさ、適用範囲の広さ等が論理的、科学的に論じられたものでありますならば、積極的に採用する方針です。皆様のご投稿をお願い申し上げます。

投稿要領：学会原稿用紙36枚(25字×12行)以内
(図・表を含む) 投稿先はOR学会事務局OR誌編集委員会宛。

なお、原稿の他コピーを2部添付してください。
(OR誌編集委員会)