多目的問題としての資本資産評価モデル

古川 浩一，中里 宗敬

1. 資本市場の理論とOR

こんにち，本論で中心的にとりあげる資本資産評価モデル (Capital Asset Pricing Model, 以下 CAPM と略す) をはじめとして，裁定取引理論 (Arbitrage Pricing Theory, APT), オプション評価理論(Option Pricing Theory, OPT) など，資本市場における取引や証券の評価をめぐってさまざまな理論が展開され，金融経済学 (Financial Economics)といわれる分野を形成するに至っている．

たしかに，そこで扱われる問題は，市場で行動する典型的な合理的投資家の行動とかれらの行動の結果としての市場の均衡であり，また，それを用いた投資政策であるので，それら諸理論をまとめて呼ぶときに「経済学」が用いられることも故なしとはしない．

しかし最近では，この分野に関して，しばしばインベストメント・テクノロジーと呼ばれたり，理論や応用を含めて金融工学なる名称も散見されるようになっている．そして実際，この分野に技術者やエンジニアが大きな関心を示すようになってきている．

ここで，経済学と工学のいずれが適切であるかの議論は行なわないが，少なくとも，テクノロジーや工学という言葉が用いられるようになり，エンジニアが深く関わるようになったのは，次のような理由によると考えてよいであろう．

1つに，資本市場における証券の評価には，株価の変動をとりあげなければならないが，そのためには確率過程は避けて通ることができない．この領域は一般に技術者やエンジニアのものとみられており，確率を駆使した理論や方策は技術であり，工学であるとされるに至っている．

2つに，資本市場は証券（この証券は，投資家にとって資産を意味するので以降「資産」と呼ぶことにする.）の売買を通して将来に予想されるリターン，つまり「カネ」を取引きする場であるが，カネは，他の財と違ってどこで取引されようとも同質であり，また微小な単位に分割できると想定することができる．

こうした性質をもつ「場」では，状態を一般化したモデルとして表現し，そのモデルを用いた分析，解析を行なうことの意義はきわめて大きい．もともと，資本市場は，技術者やエンジニアがとっつきやすい性質を備えており，かれらがそのことに気づき，多大な関心を示し始めたことが挙げられる．

3つに,現代の資本市場についての分析は,Markowitz が提案したポートフォリオ・セレクションに端を発するが，かれの出発点は，所与の予算制約のもとで最適な複数の株式の組合せ（ポートフォリオ）を選択するという課題であった．こんにちの資本市場の理論は，合理的に最適なポートフォリオを選択する投資家の行動を基礎にし，すべての投資家がそのように行動するときに市場がどのような状態になるかをとりあげている．所与の制約のもとでの最適化が，ORのもっとも基本的な問題の1つであることはいうまでもない．つまり，こんにちのこの分野の課題は，もともとORの問題であったといってもよい．

2. Markowitz のポートフォリオ理論の意義

Markowitzは,制約付きの最適化問題としてポートフォリオの選択を定式化することを試みたが，かれの優れたところは，資産への投資という特質を生かして，リターンとリスクという2つの目標を設定して定式化を行なったことであった．つまり，投資問題を多目的最適化問題として定式化したことである．

およそ投資という場合，将来のある時点あるいはある時点までの期間において，その見返り（リターン）を得ることを期待して，いま資金を投下することを意味している．つまり，いまの資金と将来の確実でない資金とを比較することが基本的な課題である．

ふるかわ　こういち，なかさと　むねのり
東京工業大学　経営工学科　〒152 目黒区大岡山2丁目

もちろん，投資は高いリターンを期待して行なわれるものであるが，あくまでリターンは期待であるから，リターンに伴う不確実性の程度を合わせて評価することが求められる．しかも，資本市場では一般的に，高いリターンは高いリスクを伴う（逆のときは逆になる）ことが知られている．かれは，できれば高いリターンを，またできれば低いリスクをという相反する目標を同時的に達成する最適化を試みたわけである．

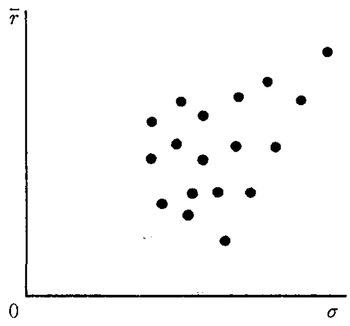

図 1

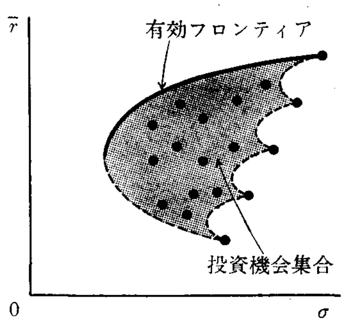

図 2

Markowitz のアイデアでもう1つ優れているのは，2つないしそれ以上の資産を組み合せるとき，各資産のリターンの変動は，それぞれ無関係に生じているわけではないことを考慮していることである．そして，かれは，各資産のリターンの変動の間の関係こそ，ポートフォリオを組むときのキー・ポイントになることを，そのモデルによって明示した．

Markowitz のポートフォリオ・セレクションを基礎にした資本市場の理論が，基本的に，

①最適化問題を基礎にしていること，

②この最適化問題が多目的問題であること，

③投資対象である各資産のリターンの変動の間に存在する関係が，解を求めるときに重要な役割を果たすことを，以下，CAPMについて明らかにし，合わせて，その限界にも触れることにする．

3. CAPMの概要

CAPMは，合理的な投資家が摩擦のない効率的市場で取引きすることにより資産の価格が瞬時に調整され，市場が均衡状態になったとき，資産価格の間にどのような関係があるのかを示している．

そのさい，資産のリターンが不確定の危険資産の場合，投資家が考慮する資産の特性はリターン（投資収益率の期待値を用いる）とリスク（投資収益率の標準偏差を用いる）のみであると仮定される．投資家は複数の危険資産を適当に組み合せることにより，よりリターンが高く，よりリスクの小さいポートフォリオを捜し求める．

いま，各資産(i)のリターン$(\bar{r}_i)$とリスク(σ_i)を推定し，それらをσ−$\bar{r}$平面上にプロットすると**図1**のようになるとしよう．

さて，これらの資産を組み合せて作ることのできるポートフォリオは無数に存在するが，それらすべてを集めた集合を投資機会集合と呼ぶ．これが投資家にとって代替案の集合となる．投資機会集合をσ−$\bar{r}$平面上に表わすと**図2**を得る．

投資機会集合の境界がこのように非線形となるのは，資産の投資収益率の間の相関が完全ではないからである．

投資家はこれらの代替案の中から1つのポートフォリオを選択するわけだが，その選択の基準はリターンとリスクに関する2つの目的関数により示される．この目的関数は代替案の集合に対して半順序関係を与えるので，最適解は非劣解（パレート解）として与えられる．このパレート解を有効ポートフォリオ（efficient portfolio）といい，その集合を有効フロンティア（efficient frontier）と呼ぶ（図2参照）．このように，投資家の行動は典型的な多目的最適化問題としてとらえることができる．

ここで，利子率r_fが確定している安全な資産f（無危険資産）が存在し，投資家は自由にこの無危険資産に投資し，あるいはこれを借り入れることができると仮定する．いま，危険資産だけからなるポートフォリオに無危険資産を組み入れた混合ポートフォリオを考える．ある危険資産ポートフォリオと無危険資産を組み合せた混合ポートフォリオは，σ−$\bar{r}$平面上においてそれら2つを結ぶ直線上に示される．

このようにして得られる混合ポートフォリオをすべての危険資産ポートフォリオについて考えると新たな代替案の集合が得られるが，これに対するパレート解集合は無危険資産の利子率r_fから有効フロンティア上に引かれた接線となる，これを資本市場線（capital market line: CML）と呼ぶ（**図3**参照）．

CMLが有効フロンティアと接する点Mはマーケット・ポートフォリオ（market portfolio）と呼ばれる．このマーケット・ポートフォリオは，無危険資産が存在するときにすべての投資家が共通に選択する最適危険資産ポー

トフォリオに他ならない．マーケット・ポートフォリオを用いるとCMLは次式により示される．

$$\bar{r}_p=r_f+\frac{\sigma_p}{\sigma_M}(\bar{r}_M-r_f) \qquad (1)$$

ただし，

$\bar{r}_p$：CML 上のポートフォリオのリターン

σ_p：CML 上のポートフォリオのリスク

$\bar{r}_M$：マーケット・ポートフォリオのリターン

σ_M：マーケット・ポートフォリオのリスク

r_f：無危険資産のリターン

である．

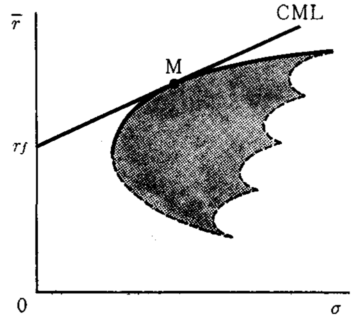

図 3

CAPMでは，このCMLをもとにして個別資産の評価を行なう．すなわち，個別資産(i)とマーケット・ポートフォリオ(M)の関係に注目し，有効フロンティアがマーケット・ポートフォリオにおいてCMLと接する条件を用いることにより，次式のような証券市場線（security market line: SML)を得る．

$$\bar{r}_i=r_f+\beta_i\ (\bar{r}_M-r_f) \qquad (2)$$

ここで，β_iは，

$$\beta_i=\sigma_{iM}/\sigma_M{}^2$$

ただし，σ_{iM}：資産（i）とマーケット・ポートフォリオ(M)の収益率の共分散

である．

SML は，個別資産のリターンが確定のリターン部分(右辺第１項)とリスクプレミアム部分(第２項)とに分解されることを示している．後者のうちの（$\bar{r}_M-r_f$）は全ての資産に共通のファクターであるので，β_iがその資産を特徴づける唯一のパラメータであり，個別資産の実質的なリスクの大きさを示す測度であることがわかる．

さて，資本市場で行動する投資家は，現在における各資産の市場価格をみて，将来に予想されるリターンとリスクを評価し，その資産の購入(投資)や売却を決める．このような投資家の行動が数多く集められた結果として，各資産の市場価格が決まることになる．CAPMは，均衡状態において，資産価格形成のもととなる各資産のリターンをβなるリスク測度と関連づけて示している．したがって，式(2)が与えられるなら，これに対応して各資産の価格も定まることになる．しかも，ここで重要なことは，CAPMでは各資産のリターンが，β を通して，市場全体の水準（マーケット・ポートフォリオ）に対し相対的に与えられることである．したがって，どの資産価格も他の資産の価格に対する相対的な大きさとして与えられることになる．

4. 代替案の集合と評価空間

これまでは，CAPMを$\sigma-\bar{r}$平面上で議論してきた．これは投資家がσと$\bar{r}$という2つの評価基準にもとづいて行動するとしているからである．しかし，もともと投資家は，どの資産にどれだけ投資するかという決定を行なうことにより，かれのポートフォリオを最適化しようとしているはずである．いいかえれば，投資家が最終的に行なう意思決定は，かれのポートフォリオを最適化するような各資産への投資割合，すなわち投資比率ベクトルを決めることである．したがって，CAPMにおいて，投資家の意思決定がσと$\bar{r}$についての評価だけで十分であるためには，少なくとも，$\sigma-\bar{r}$ 平面上で与えられる マーケット・ポートフォリオは，投資家が求めている投資比率ベクトルを一意に定めるものでなくてはならない．

この点を明らかにするために，投資比率ベクトル（$\boldsymbol{x}$）の張る空間から$\sigma-\bar{r}$平面への 写像について考えてみよう．

いま，市場にn個の危険資産があるとすると，空売りがない場合，投資家の代替案の集合は，

$$X=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}=1,\ \ \forall_i\ x_i\geqq 0\} \qquad (3)$$

ただし，

$$\boldsymbol{e}=(1,\ 1,\cdots,\ 1)^T$$

というR^nの部分空間となっている．

ここで，

$$\bar{\boldsymbol{r}}=(\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\cdots,\ \bar{r}_n)^T$$

とすると，Xから投資家の評価空間（$\sigma-\bar{r}$平面）への写像は，次の２つの式で与えられる．

$$r=\bar{\boldsymbol{r}}^T\boldsymbol{x} \qquad (4)$$

$$\sigma^2=\boldsymbol{x}^T V\boldsymbol{x} \qquad (5)$$

ただし，

V：投資収益率の分散共分散行列

である．

ところで，$\sigma-\bar{r}$平面上でのCAPMの議論が意味をもつためには，少なくともマーケット・ポートフォリオについて，この逆写像が存在しなくてはならない．そこで，$n=3$の場合についてこの写像を図解してみよう．

まず，式(3)より，代替案の集合XはR^n空間における

超平面上の凸閉集合であることがわかる(図4参照).

次に，X から $\bar{r}$ への写像は式(4)で与えられており，X は x_1 を除いた R^{n-1} 上でも表現することができるので，図4に対応づけて図示すると図5になる．また，X から σ への写像は式(5)で与えられており，同様に x_2 を除いて考えると図6になる．最後に，図5と図6を合成すると図7が得られ，代替案の集合から評価空間への写像を描くことができる．

さらに,図7の図形を $\sigma-\bar{r}$ 平面へ正射影すると,CAPMで用いる投資機会集合を得ることができる(図8参照).

さて，図7において有効フロンティアは左側の膨らみの稜線上の一部に相当する．また，この稜線上では $\bar{r}$ を定めると，それに対応する投資比率ベクトルは一意に定まることがわかる．マーケット・ポートフォリオは有効フロンティア上の1点であるので，これに対応する投資比率ベクトルも一意に定まる．したがって，$\sigma-\bar{r}$ 平面上のマーケット・ポートフォリオから X への写像が存在する．

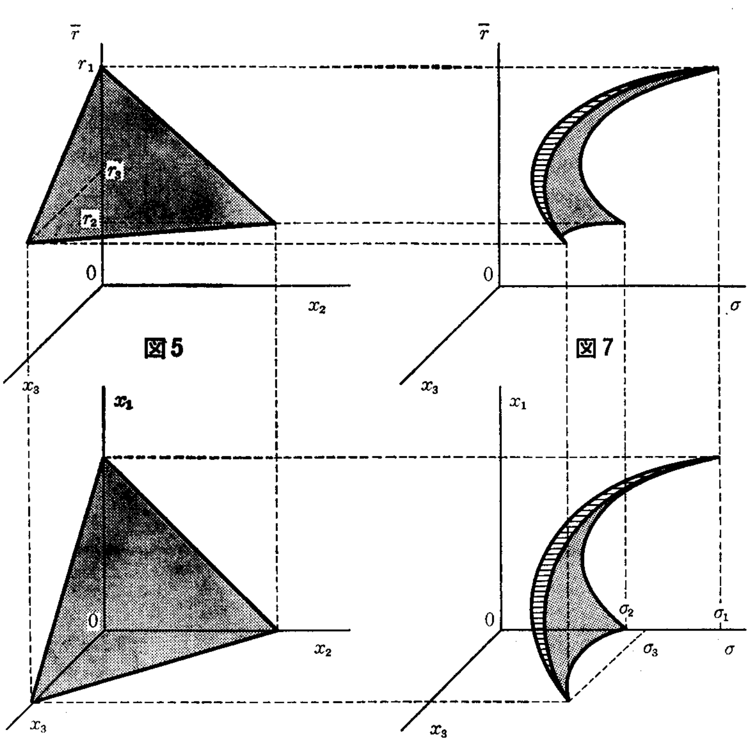

図5

図7

図4

図6

このように，$\sigma-\bar{r}$ 平面上で求められたマーケット・ポートフォリオからその投資比率ベクトルを導くことができるので，投資家は危険資産に対する最適な投資意思を

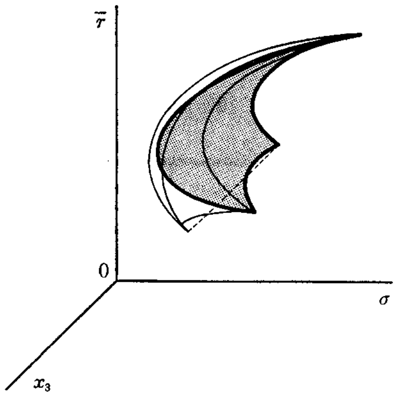

図8

決定し，行動することができる．

5. まとめ

本論ではまず，こんにち注目を集めている資本市場の理論がもともとORと深く関わっていることを述べ，次に，資本市場の理論でも最も基本的なものの1つであるCAPMを例に，投資家の投資意思決定が多目的最適化問題として記述されることを示した．

すなわち,CAPMは,投資比率ベクトルからリスク・リターンという2次元の評価空間への写像をもとに議論しており，典型的な多目的最適化問題をなしているということである．しかも，CAPMの均衡状態は，無危険資産の導入により最適解が一意に定まるような特殊な系をなしている．

資本市場の理論は，市場の理論として経済学と密接に関連している．しかし，同時に，それは解が一意に定まる特殊な多目的最適化問題であることに注意しなくてはならない．

参考文献

[1] W. F. Sharpe, "A Simplified Model for

Portfolio Analysis," *Management Science*. Vol.9, No.2 (January 1963), pp.277-293.

[2] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, John Wiley & Sons, 1959.

[3] W. F. Sharpe, *INVESTMENT*, 3rd, Prentice-Hall, 1985.

[4] 桐谷維，ポートフォリオ・セレクション 一金融資産選択の理論一，春秋社，1968.

[5] 榊原茂樹，現代財務理論，千倉書房，1986.

[6] 清水清孝，多目的と競争の理論，共立出版株式会社，1982.

疑似インデックス・ポートフォリオ

竹田　準

まえがき

株式のポートフォリオを構築する方法にはいろいろな種類が，ありその投資目的も多様化しているが，今後は疑似インデックス・ポートフォリオへの要求が高まってくることが予想される．

数理計画法を使って疑似インデックス・ポートフォリオを構築する方法はいくつかあるものの，それぞれ長所短所があり，現時点では，いずれの手法が最適であるか一概には断定できないようである．

ここでは，この疑似インデックス・ポートフォリオの構築方法のいくつかをとりあげ，それぞれの問題点を列挙してみた．

ポートフォリオの種類と目的

株式のポートフォリオをどのように構築し，投資すればいいのかというテーマは，端的にいえば，数理計画法の問題に帰するといえる．

すなわち，投資家それぞれのニーズに合った株式のポートフォリオを構築するということは，どの銘柄を，どの位の比率で，どのように組み合せて投資するのか，または，組み合せた銘柄の平均値が希望した通りになっているか，このどちらかの問題に帰着するからである．

株式のポートフォリオの種類として，主なものを列挙すると，次の4点があげられる．

1. 銘柄を，あるいくつかの基準で絞り込み，その選定した銘柄に対して最適な組合せを求めてポートフォリオとする．
2. 業種を，あるいくつかの基準で絞り込み，その選定した業種に対して最適な組合せを設定し，さらに，その選定された業種ごとに銘柄を選出し組み合せると同時に，全体としての整合性を求めてポートフォリオとする．
3. 設定したいポートフォリオ全体の属性平均値，たとえばリスク水準とか株価水準などを，まず，いくつか定め，そのいずれの値も満足させるように個別銘柄を選定して，ポートフォリオとする．
4. 希望する市場指標と，たとえば，東証株価指数とか日経平均株価指数などと同じような動きをするように銘柄を選定し，ポートフォリオとする．

なお，観点を変えて，株式のポートフォリオを構築して投資する目的として，主なものを列挙すると，次の3点があげられる．

1. 株価の先行は予測しがたいとの前提にたつと，ある特定の銘柄に集中投資するのは危険であるため銘柄の分散をはかり，個別銘柄ごとにいくらの収益を獲得したかをみるのではなく，ポートフォリオとして投資金額全体に対するリターンを追及する．
2. 年金ファンドのように，投資金額そのものが大規模になればなるほど，個別銘柄に対する集中投資は規制もあり，また，実際上，不可能であるため，分散投資にならざるを得なくなり，その結果，ポートフォリオとしてのリターンを追及することになる．
3. 市場指標と連動するようなポートフォリオを構築してパッシブ的にリターンを追及するとともに，先物取引などとの組合せで，裁定取引とかヘッジ取引を行ない，より安全で，より高いリターンを追及する．

各投資家の動向をみると，それぞれのニーズに応じてポートフォリオの投資目的を設定し，そして，どのような種類のポートフォリオを構築するのかを決定しているようである．

しかしながら，株価指数先物取引がもっと本格的になり，株価指数に対するオプション取引も開始されると，裁定取引とかヘッジ取引の比率がますます高まり，ひいては，市場指標と同じように動くポートフォリオの構築の比重がそれだけ高まってくるものとみられる．

特に，より少額の投資金額とより少数の銘柄の組合せで東証株価指数や日経平均株価と同じような動きを示すようなポートフォリオ，いわゆる疑似インデックス・ポ

たけだ　じゅん　㈱三洋経済研究所　サーニス開発部
〒103 中央区日本橋茅場町3―7―3

ートフォリオの構築方法が追求されてこよう．

ベータ値による疑似インデックス・ポートフォリオ

インデックス・ポートフォリオの構築方法としては，時価総額加重法とか層化抽出法などがあるが，いずれにしても，かなり大規模な投資金額と多数の組み入れ銘柄数を必要とする．しれがって，組み入れ銘柄数をより少なく，投資金額をより少なくした疑似インデックス・ポートフォリオの構築には，これらの方法で対処することはなかなか難しいようである．

そこで数理計画法により組み入れられた銘柄のベータ値の平均が1となるようにポートフォリオを構築して，これを疑似インデックス・ポートフォリオとする方法がまずあげられる．

この方法で，61年10月末を起点にして，それぞれ10銘柄と50銘柄を組み入れたポートフォリオを作成してみた．日経平均株価と対比させながら，これらのポートフォリオがその後の6カ月間にどのように推移したかを描いたのが**図1**である．

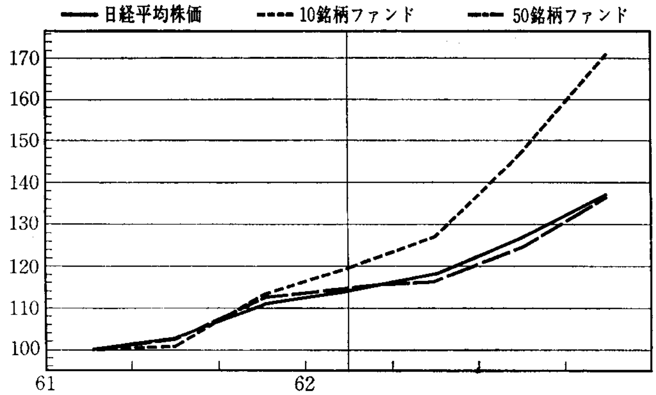

図1

表1

年　月（月末満）	61／10	62／01	62／04
10銘柄ファンド（最小自乗法ベータ）	0.992	1.046	1.206
50銘柄ファンド（最小自乗法ベータ）	1.016	1.038	1.070
10銘柄ファンド（ベイズ修正ベータ）	0.971	0.962	0.957
10銘柄ファンド（フーリエ・ベータ）	0.985	0.986	0.989
10銘柄ファンド（ファジー・ベータ）	1.052	0.941	1.000

50銘柄のポートフォリオは期待したような推移を示している反面，10銘柄を組み入れたポートフォリオは，トラッキング・エラーをみても乖離度合をみても，満足できるような結果を示していない．

組み入れ銘柄数が少なければ少ないほど，求められたポートフォリオの過去の動きが対象とする市場指標と連動するように構築されたとしても，その後の動きをみると，同じように動くとは限らないということである．ポートフォリオのベータ値の変動がいちじるしいことからでもわかる（**表1**）．このようなことが，何故生じるかは，まず第1に，ベータ値の妥当性そのものを検討しなければならない．ベータ値の計算は最小自乗法によるのが通常である．ところが，これが成り立つのは，データが正規分布しているとの想定にもとづいている．

データが正規分布しているか否かの検定方法にはスチューデントのテストが用いられている．しかし，この方法による検定は，階級の区分の仕方で，同じデータであっても，正規分布していると判断されたり，否と判断されるので，信頼性があるとはいいがたい．その他に，尖り度とか歪み度などによる方法もあるが，いずれも，絶対的な方法と断定できるものはないようである．

また，同一銘柄の株価データであっても，時系列的にみた場合，ある期間に区切って分析すると，正規分布をしていると実証されたとしても，別の期間をとると，そうでない場合が多いのではないかと推測される．

それに，データに異常値があると，そのデータに引っ張られて，歪んだベータ値が算出されるケースが多い．したがって，ある異常値が観測期間内に初めて発生した時点とか，あるいは，このデータが消滅した時点には，ベータ値の変動がいちじるしい．

なお，最小自乗法によるベータ値は，ヘッジ取引とか裁定取引など，いわゆるプログラミング売買を行なうさいには，多くの場合，中心的な役割を果たすデータだけに取扱いには注意が必要であろう．

もっとも，米国では，このようなプログラミング売買を行なうさいのポートフォリオには通常かなり多数の銘柄が組み入れられており，このことによって，ベータ値の不的確性を補っているとともに，利鞘の少なさを，量でカバーしているようである．

第2に，検討しなければならないポイントは数理計画法であろう．

ポートフォリオの構築は整数計画法で求めなければならない．すなわち，ポートフォリオに組み入れられる1

銘柄当りの株数は，最小取引単位通常(1000株)の整数倍でなければならないからである．

しかしながら，全上場銘柄（約2000銘柄弱）を対象に，整数計画法を実際上使用した場合，処理時間が長く，しかも，INFEASIBLE SOLUTION となる可能性が多く，即時性を要求されるオンラインによる情報システムとしては実用性があるとは言いにくい．

そうかといって，線形計画法を使っても，問題になるのは，求められた解が最小取引単位の整数倍でない場合に，なんらかの方法で調整しなければならないが，その結果，それらは真の最適解とは乖離してくるということである．

なお,このようなポートフォリオの構築には，動的計画法が最適な手法とみられているものの計算量が多くなって，実際上，利用不可能であるため，線形計画法を適用しているケースが多いが，この場合には，本当に最適な銘柄が選出されて組み合されているのか，断定できないところにも問題点がある．

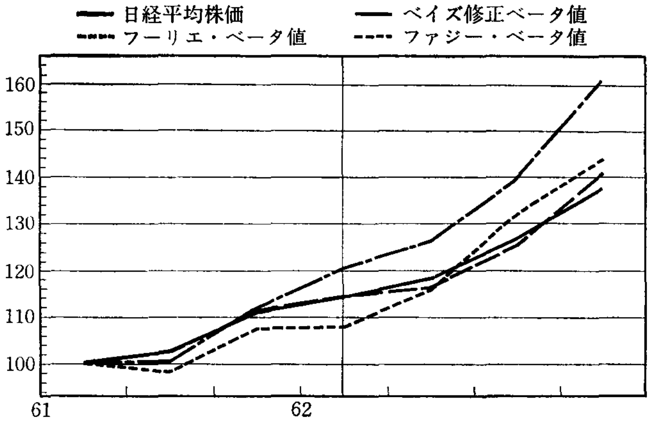

図 2

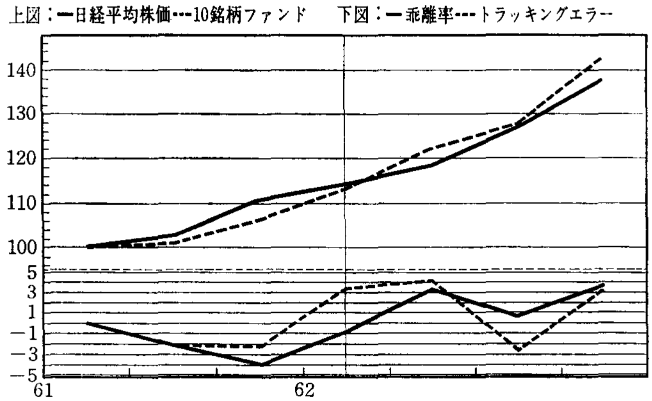

図 3

フーリエ・ベータなどによる疑似インデックス・ポートフォリオ

ファンダメンタル・ベータとか，修正ベータとか，マルチファクター・モデルによるベータ値の算出などが数多く紹介されているが，ここでは，個別銘柄の市場に対する感応度を算出する方法として，次の3種類の方法を述べてみたい．

1：ベイズ修正ベータ

事前確率と事後確率による『ベイズの定理』を応用してベータ値を算出する．

2：ファジー・ベータ

ファジー線形回帰分析によりベータ値を算出する．

3：フーリエ・ベータ

フーリエ解析によるスペクトル分析からベータ値を算出する．

最小自乗法によるベータ値をもとに構築したポートフォリオと同じ方法で，10銘柄ずつ組み入れたポートフォリオを作成し，時系列的にそれぞれのベータの平均値の推移をまとめてみた（**表1**）．

最小自乗法によるベータ値をベースにしたポートフォリオと比べると，その後のベータ値の変動幅は，より安定的だといえそうであり，グラフ（**図2**）をみても，市場指標である日経平均株価との連動性は，よりフィットしている．しかしながら，これらの方法も，時期などの条件が異なった場合，いつも同じようなパフォーマンスをあげるとは言い切れないようである．今回はフーリエ・ベータの結果がよいようではあるが，組み入れ銘柄数が異なったり，組み入れ時期が異なったりすると，ベイズ修正ベータやファジー・ベータの方がいい場合があらわれたりする．いずれにしても，まだまだ充分とはいえず，また，どの方法がより最適かもこれからの検証を待たなければならない．

テクニカル分析による疑似インデックス・ポートフォリオ

疑似インデックス・ポートフォリオを構築する方法としてもう1つあげられるのが，株価のパターン分析をもとにする考え方である．テクニカル・アナリシスの1つの分野であるパターン分析で，市場指標と同じように動

くと予想される銘柄をピックアップし，組み合せて，ポートフォリオとして構築する方法である．

この方法で，10銘柄を組み入れたポートフォリオを作成してみた．グラフ（図3）をみる限り，良好な成績をあげているようである．しかし，最小自乗法により求めたベータ値で，このポートフォリオの平均値を計算すると，61年10月が0.774に対して，62年1月が0.785，62年4月が0.657となっている．過去の動きが日経平均株価と異なっていても，その後の推移とはなんらの関係もないようにみえる．

したがって，ここで検討しなければならないポイントは，『効率的市場仮説』の存在であろう．『効率的市場仮説』は，フィルター・ルールの検定とか連の検定とか自己相関検定などによって，検証結果が発表されている．

さらに，古くからあるいろいろのテクニカル分析の手法でいわれている買いのシグナルがでた場合の当たる確率を検証してみたが，平均して，50%から60%の間である．やってもやらなくても同じような結果となっている．

統計数理研究所の『TIMSAC』のパッケージにあるAIC基準による自己回帰モデルを使い，株価の予測を行なったさいの最適な項数をみると，そのほとんどが，ゼロ次か1次である．

オプション取引で最も利用され，確度高いブラック＝ショールズ モデルは，また，ポートフォリオ・インシュランスにも応用されているが，この理論そのものは，市場が効率的であることが前提条件となっている．

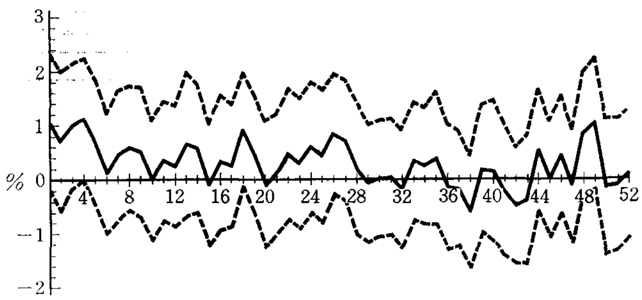

図 4 （点線±σ）

このように考えると，市場は効率的で，株価はランダム・ウオークしているようにみえる．

しかし，1942年に『1月効果』の研究結果が発表されて以来，『低PER効果』とか『小型株効果』等が報告され，市場は非効率的であると実証されている．

東証上場銘柄を対象に，昭和48年からの過去約15年間にわたり週次ベースで計算したところ，『1月効果』ははっきりと現われているようである（図4）．業種別に分けた37業界それぞれに対しても同じような分析を行なったが，どの業界でも『1月効果』がみられた．

また，テクニカル分析の1つの手法である株価移動平均線分析を使って，株価予測を行なってみた．

株価と移動平均線との組み合せでパターン分析を行ない，すなわち，トレンド，カイリ，クロス状況の組合せでいくつかのパターンに分類し，それぞれのパターンごとに，株価がいくらになるかの確率を求めて，その期待値を株価の予測値とした（表2，図5）．

東証1部上場全銘柄を対象に，それぞれの期待値を予測（昭和62年4月1日現在）し，その後の3カ月間に実際に推移した株価と比べて，当ったか否かの確率度合を散布図（図6）でみると，その相関度はかなり高いといえる．すなわち，回帰係数は0.909で，相関係数は0.827となっている．

このようにみると，必ずしも市場は効率的であるとは断定できないように思われ，このテクニカル分析によるポートフォリオの結果は，どちらの仮説を想定したもの

表 2　XXXXX銘柄 期待値 617.3円，標準偏差37.2円

	株価分布		確率	
20	920円以上～		2.70617675	%
19	880円以上～	920円未満	1.57350444	%
18	840円以上～	880円未満	2.03909301	%
17	800円以上～	840円未満	2.50213050	%
16	760円以上～	800円未満	3.07483959	%
15	720円以上～	760円未満	4.14066219	%
14	680円以上～	720円未満	5.91540622	%
13	640円以上～	680円未満	8.18982124	%
12	600円以上～	640円未満	12.86142444	%
11	560円以上～	600円未満	21.42079162	%
10	520円以上～	560円未満	23.10762023	%
9	490円以上～	520円未満	7.43921375	%
8	470円以上～	490円未満	2.85598850	%
7	450円以上～	470円未満	1.15106487	%
6	430円以上～	450円未満	0.48696470	%
5	410円以上～	430円未満	0.24504166	%
4	390円以上～	410円未満	0.13208109	%
3	370円以上～	390円未満	0.06590813	%
2	350円以上～	370円未満	0.03332884	%
1		350円未満	0.05894757	%

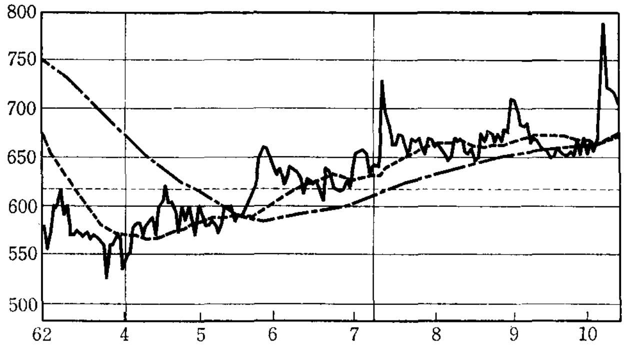

図 5　XXXX銘柄の株価推移と期待値

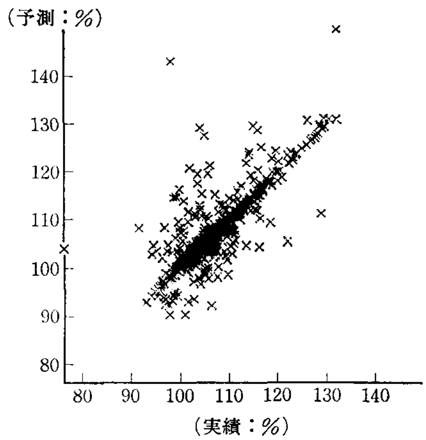

図 6　ベータ値　+.909448　アルファ値+9.8538 相関係数　+.8273060 標準誤差+3.503964 データ数 1049

か迷うところである．

次に問題となるのは，パターン分析により選定された銘柄をどのように組み合せてポートフォリオを構築するかの手法，いわば数理計画法にかわる手法がないということであろう．つまり個別銘柄がそれぞれもっている時系列的なパターンそのものをデータとしてどのような比率で組み合せたらいいかという解法がないということである．現在は1銘柄につき1取引単位ずつかその整数倍で処理をしており，もっと最適な組合せがあったとしてもそをれ見つける可能性がないという点である．

おわりに

疑似インデックス・ポートフォリオを構築するうえでの問題点をいくつか列挙してみたが，一方では，それらを解決する新しい考え方とかシステムが次から次へと現われてきている．たとえば，ポートフォリオの構築は動的計画法によるのが最適だとみられるが，いまだ実用化されていなく，線形計画法とか2次計画法で処理をしているのが実情であろう．しかしながら，昨今，動的計画法に対して新しい分析手法の概念が導入されたり，ニューラルボードなどが開発されるにつれて動的計画法的な最適解の算出も期待できるようになった．

さらに，ニューロコンピューティングを使ってポートフォリオを構築する手法も，プロトタイプではあるが開発されている．また，ＡＩ（エキスパート・システム）によるポートフォリオの構築もすでに実用化の段階にまで開発されている．

ＬＳＩの発展につれ，画像処理方法によるパターン分析ができるようになってきた．過去の経験則とか数値解析などによる従来の方式では，株価のパターン分析そのものが行き詰まっていた感があるが，このような画像処理方法を利用するとまったくアプローチの方法が違うため，テクニカル・アナリシスとしては，ひとつのブレークスルーとなる可能性が強いように思える．

市場との感応度を測るものに対しても，新しい考え方とか理論が順次発表されており，フーリエ・ベータ値などに対してもさらに進んだ研究・シミュレーションがなされている．今後も，ポートフォリオの構築方法に関する新しい理論とか分析手法の開発と並行して，コンピュータのハードウェアならびにソフトウェアの面もより一層の発展が期待されるので，この結果，より効率のよい，新しい金融資産運用のシステムが次々と開発されてくるものと思われる．

参　考　文　献

◎R. A. ホーゲン／J. ラコニショック，丸淳子／兼広崇明　訳，東洋経済新報社，「株式市場のミステリー」1988

◎ウイリアム・F・シャープ，日本証券アナリスト協会訳／発行「現代証券投資論」1983

◎米沢康博／丸淳子，東洋経済新報社「日本の株式市場」1984

◎小峰みどり／首藤恵／丸淳子，東洋経済新報社「現代証券市場分析」1986

◎蠟山昌一，金融財政事情研究会「株価指数先物取引」1986

◎大村敬一／清水正俊，金融財政事情研究会「株式オプション」1987

◎日本証券経済研究所，日本経済新聞社「現代証券事典」1981

投資リスクと動的投資理論

浦谷　規

1. はじめに

情報化社会のためか，テレビニュースで主要国平均株価と外国為替レートが毎日報道される．輸出入に景気が左右される産業の企業人ばかりか，海外旅行や手軽に可能となった海外のカードショッピングを楽しみにする主婦，ＯＬ等にも関心事になったためであろう．これらの価格は近年いちじるしく変動している．変動が大きいので，基本的には安い時買い高くなったら売却すれば，利益が得られることは明らかである．たとえば，今1ドルが130円で買えるとしよう．ボーナスで1万ドルを130万円で買ったとし，１年ドル預金をする．米国金利は，およそ年利８％程であるから１年後には1.08万ドルになる．この時１ドルが200円という円安になったとすると，216万円が手元に返り，１年間で86万円の利益，率にして66%の収益となる．しかし，１年後が円高で１ドル 100 円の場合には，22万円の損失で年率－17%になる．１年後の予想価格がいかに，虎の子の小金を守るために重要であるかは言うまでもない．理論的には，利子平衡説によれば「金利の高い国の通貨は長期的には相対的に安くなる」ことが明らかにされているので，例のような年間66%もの利益率になる「確率」は低いと言える．

それならば，ドル預金をしてわが国金利以上の収益率を１年後にあげる「確率」は何%になるのかと反問したくなるであろう．その解答をマーコヴィッツ[１]以来のMPT(Modern Portfolio Theory)と呼ばれるファイナンス理論は用意してきた．もし対ドルレートの収益率の分布形が対称であれば，答えはチェビシェフの不等式できわめて単純にかたづく．aをわが国の金利，rを１年間の収益率確率変数とし，その平均をm，分散を σ^2 とすると，わが国よりドル預金が有利になる確率は，$\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(a-m)^2}$以下である．しかし，第１に収益率の分布形が対称である根拠もない上，第２に確率が０である可能性もある等，あまり使い道がある方法ではない．そこでＭＰＴが研究してきたリスク概念を紹介しよう．

2. ＭＰＴのリスク概念

一般に資産価格の収益率は完全市場では，幾何ブラウン運動になるとされている．米国市場の観測では，無限の２次モーメントをもつパレート分布になる（ファーマ[2]等）の批判もあるが，決定的ではない．何よりも，中心極限定理により，多くの資産を保有した時その平均収益率は正規分布に漸近するため，個々の資産収益率の分布形はあまり重要視しなくてもよいだろう．多くの資産を保有することは，「卵を運ぶとき多くのバスケットで運べ」の喩え通り，すべてのリスクを伴なう行為，つまり賭の初歩である．

複数の資産を保有するなら，各々の資産は，いったいどれほどそれぞれ保有すればよいだろうか．これが，いわゆるポートフォリオ選択問題である．

n 種類の危険資産（たとえば株式など）と１種類の無危険資産（たとえば短期政府保障預金）があり，保有資金 W を $(n+1)$の資産にいかに割当るかを考えよう．目的は可能なかぎり確実に，できるだけ高い収益を得ることにある．n 種の危険資産の収益率を$r_i(i=1,2,\cdots,n)$，無危険資産の収益率を r とすると，１期後の全保有資産W'(ポートフォリオと呼ぶ)の期待値は，(1)式の通りとなる．

$$(1)\quad E[W']=\sum_{i=1}^{n}W_i(1+E[r_i])+(W-\sum_{i=1}^{n}W_i)(1+r)$$

ただし，W_iは第 i 危険資産の保有額であり，無危険資産の保有額は $W-\sum_{i=1}^{n}W_i$ である．W'の分散は，(2)式となる．

$$(2)\quad \mathrm{Var}[W']=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}W_i W_j \sigma_{ij}$$

ただし，$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}\ (r_i, r_j)$ つまり r_i と r_j の共分散である．目的の１つは，最大の収益をあげることであるから$\max_{W_i} E[W']$で各資産への割当が求められる．W_i が

うらたに　ただし　静岡県立大学　経営情報学部
〒422 静岡市谷田395

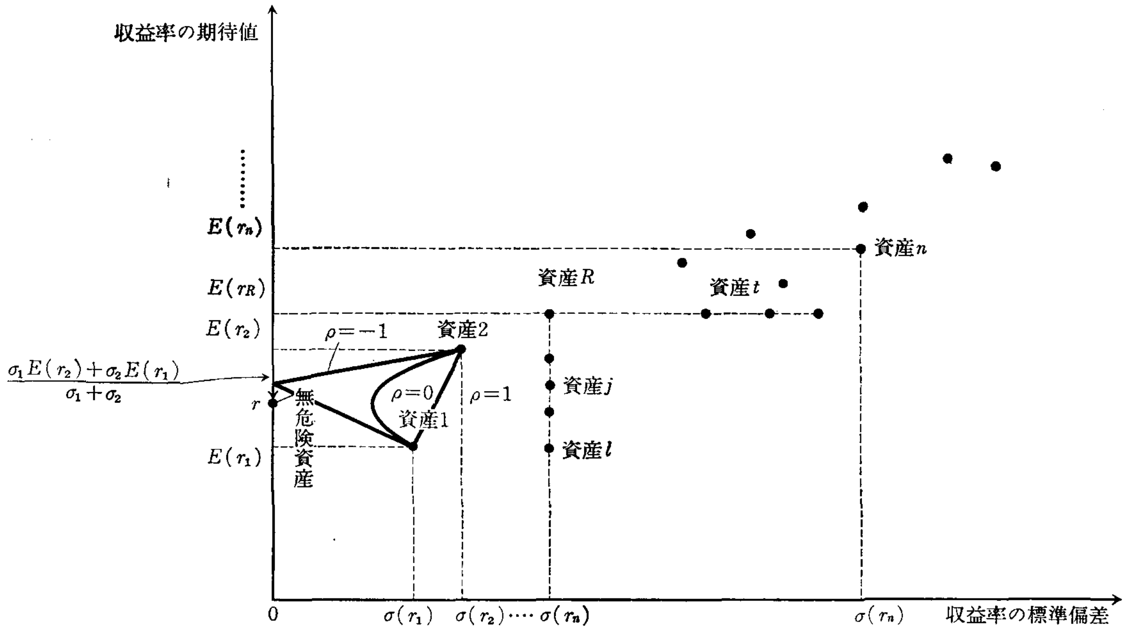

図 1　資産の期待値と標準偏差

負の時は空売りになるから，空売を許さないなら $0 \leq W_i \leq W$ でなければならない．もう1つの目的である確実に収益をあげるためには，W の確率分布を考えねばならない．資産数 n は，株式だけでも数千になるし，一般的にそれぞれの平均収益はあまり大差はないので，中心極限定理から $(W'-W)/W$ は対数正規分布と考えられるだろう．1年後のポートフォリオ収益率を $R'=(W'-W)/W$ とおくと，最大の期待収益率ポートフォリオ $E(R'^*)$ の分散は $\mathrm{Var}(R'^*)$ で求められる．この資産組合せの対数値 $\log R'$ が，確率99.7%で実現する範囲は，

(3) $$E(\log R'^*)-3\sqrt{\mathrm{Var}(\log R'^*)} \leq \log R' \leq E(\log R'^*)+3\sqrt{\mathrm{Var}(\log R'^*)}$$

である．(3)式をみると，いくら最大収益ポートフォリオの $E(R'^*)$ が高くても，その分散が大きいときには，(3)の下限から求められる収益率が負になり，元金割れが生じてしまう．そこで，目的である確実に，高収益にするためには，目的関数を(4)式のように2つの目的に重みをつけた和で表わす．

(4) $$\max_{Wi} E(R)+\lambda(-\mathrm{Var}(R))$$

(3)式より単純になっているのは，対数関数も平方根も単調関数であること，正規分布の信頼区間の係数を λ と一般的に表わしたからである．この問題は，制約付き最適化問題で，双対的に考えられる．1つは，

(5) $$\begin{cases} \max_{Wi} E(R) \\ \text{subject to } \mathrm{Var}(R)=\text{constant} \end{cases}$$

であり，もう1つは

(6) $$\begin{cases} \min_{Wi} \mathrm{Var}(R) \\ \text{subject to } E(R)=\text{constant} \end{cases}$$

である．(5) では期待収益率の最大化問題が，分散一定すなわちリスク一定の下で行なわれる．(6) では一定の収益率の下での分散＝リスク最小化問題と定式化される．いずれの場合も，リスクを分散として把えるところに特徴がある．投資選択基準を，期待値と分散の2つのパラメータで表わすことにすると，今まで述べてきた $(n+1)$ 資産は図1の通りにプロットすることが可能となる．図1には縦軸に期待収益率，横軸に標準偏差 $(\sqrt{\text{分散}})$ をとり各資産の散布図を表わす．

(5) 式の問題を図1で標準偏差が $\sigma(r_k)$ に等しい資産の中から選択すると期待値が最大の資産 k となる．同様に (6)式の問題で期待値が $E(r_k)$ に等しい資産から最小分散の資産を選択すると資産 k となる．このような条件を満たす資産の線型結合が目的のポートフォリオ W' を表わす．W' を図1上で具体的に見るために，資産1と資産2だけからなるポートフォリオで W' を考えよう．現在の全資産は無危険資産を考えないこととしたので，$W=W_1+W_2$ である．また $E(W')=W_1(1+E(r_1))+W_2(1$

$+E(r_2))$ であり，$\mathrm{Var}\,(W')=W_1^2\sigma^2(r_1)+W_2^2\sigma^2(r_2)+2W_1W_2\sigma^2(r_1r_2)$ である．共分散 $\sigma^2(r,r_2)$ は，相関係数 ρ を用いると

(7) $\sigma^2(r_1,r_2)=\sigma(r_1)\,\sigma(r_2)\,\rho$

と表わされる．W_1，W_2 の2変数は，上3式を W で除して $W_1/W=x$ とおくと，$W_2/W=1-x$ となり，$E(W'/W)=x\,E(r_1+1)+(1-x)E(r_2+1)$，$\mathrm{Var}(W'/W)=x^2\sigma^2(r_1)+(1-x)^2\sigma^2(r_2)+2x(1-x)\,\sigma(r_1)\,\sigma(r_2)\,\rho$ と1変数関数となる．したがって，$x=\{E(W'/W)-E\,(r_2+1)\}/E(r_1-r_2)$ となる．一方分散 $\mathrm{Var}\,(W'/W)$ は，資産1と資産2の相関係数が極端な場合を調べると，図形的に明らかとなる．

$\rho=1$ のとき $\mathrm{Var}(W'/W)=(x\sigma(r_1)+(1-x)\sigma(r_2))^2$

$\rho=0$ のとき $\mathrm{Var}(W'/W)=x^2\sigma^2(r_1)+(1-x)^2\sigma^2(r_2)$

$\rho=-1$ のとき $\mathrm{Var}(W'/W)=(x\,\sigma(r_1)-(1-x)\sigma(r_2))^2$

したがって $\rho=1$ のとき $\sigma(W'/W)=x(\sigma(r_1)-\sigma(r_2))+\sigma(r_2)=\dfrac{\sigma(r_1)-\sigma(r_2)}{E(r_1-r_2)}(E(W'/W-1)-E(r_1))+\sigma(r_1)$ となり，資産1と資産2を結ぶ線分となる．すなわち $\rho=1$ で完全に相関している時はどちらの資産でも同じことを示している．

$\rho=-1$ のとき，$\sigma(W'/W)=|x(\sigma(r_1)+\sigma(r_2))-\sigma(r_2)|$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{E(r_1-r_2)}(E(R')-E(r_1))+\sigma_1 \\ \qquad ;E(R')\leqq\dfrac{\sigma_1E(r_2)+\sigma_2E(r_1)}{\sigma_1+\sigma_2}\text{のとき} \\ \dfrac{-(\sigma_1+\sigma_2)}{E(r_1-r_2)}(E(R')-E(r_2))+\sigma_2 \\ \qquad ;E(R')>\dfrac{\sigma_1E(r_2)+\sigma_2E(r_1)}{\sigma_1+\sigma_2}\text{のとき}\end{cases}$$

ただし $\sigma_i=\sigma(r_i)$；$R'=(W'-W)/W$ と略記する．また図の例のように $E(r)_2>E(r_1)$ と仮定する．上式は，資産1と2が逆相関($\rho=-1$)があるときは，$E(R')=(\sigma_1E(r_2)+\sigma_2E(r_1))/(\sigma_1+\sigma_2)$ という無危険資産を自分でポートフォリオを組むことによって作り出せる．もしこの自家製無危険資産が市場の無危険資産収益率 r より大きいとき，このポートフォリオを作る人は市場で金利 r で借入れ，2の資産を運用するとまったくリスクなく均衡になるまで利益を得ることができる．すなわち他の人が同じことにづき，危険資産1，2が高騰し，このポートフォリオの収益率と市場無危険資産収益率とが等しくなるまでもうけることができる．

相関係数が最大1，最小-1のときが図1の3角形であるから，$\rho=0$ のときは，$\sigma^2(R')=x^2(\sigma^2(r_1)+\sigma^2(r_2))+2x\sigma(r_2)+1$ $x=(E(R')-E(r_2))/E(r_1-r_2)$ の資産1，2を通る双曲線になることは明らかであろう．ρ が一般的な値の時にも双曲線になることは類推される．双曲線の上側だけが(5)(6)の条件を満たす．図1では太線の部分である．この太線より下側にある資産は収益率が小さく，投資上効率的でとは言えない．そこでこの太線の部分を効率的フロンティアと呼ぶ．

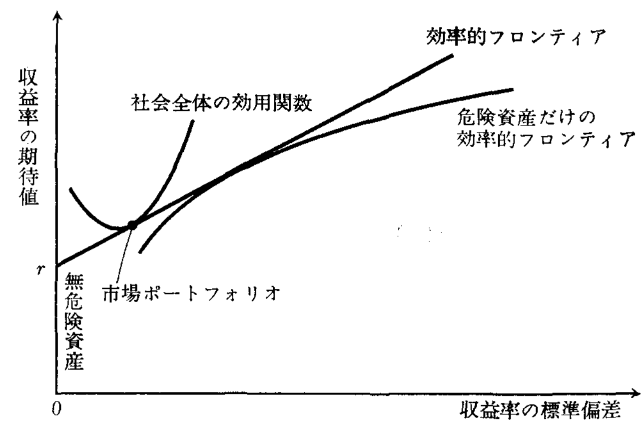

図 2 効率的フロンティアと市場ポートフォリオ

一般的に n 種の危険資産のポートフォリオを考えるとその効率的フロンティアは上に凸になることがわかる．さらに，前述の均衡値の無危険資産との危険資産だけのポートフォリオとの資金割当問題は，効率的フロンティアへ無危険資産から接線が引けるとき，図2の通りその半直線上が最も効率的フロンティアとなる．接点より上にある部分は，無危険資産を借りて，すなわち借金をして株式投資をすることを表わしている．

さてこの半直線上が効率的であるとするなら，すべての投資家にとって，株式の保有比率，すなわち W_i/W は同一であり，異なるのは，無危険資産と危険資産全体の比率だけとなる．それを決定するのが投資家の効用関数で，リスクに対する態度でそれぞれ異なる．そこで，社会全体の合計のポートフォリオ選択を考えてみよう．すべての人が共通の情報をもち合理的であるならば（完全市場と呼ぶ)，効率的フロンティアは同一で，社会全体でも同一である．異なる効用関数の社会全体の和は求められるから，それを**図2**に書くと，社会全体の最適点が求められる．この点は，現実の市場取引で実現される無危険資産と危険資産とのポートフォリオを表わす．これを市場ポートフォリオと呼ぶ．市場ポートフォリオでは，危険資産の割当比率は，たとえば資産 k の市場に存在する総額を危険資産全体の総額で割って求められる．たとえば

株式では，i 企業の時価X総発行株数を東証全体の時価総額で割ったもので求められる．したがって，この均衡値が成り立つ条件が社会的に満たされると考えるなら，(5)と(6)式の膨大な2次計画問題はまったく解くに値しないことになる．現実的には，この市場ポートフォリオは，実際に投資家が購入できるかが問題となる．答えは「イエス」であり，米国ではS＆P500等であり，わが国では東証指数である．過去の実績から，高給を取る，いわゆるファンドマネージャーがこの市場ポートフォリオより，長期にわたってより高い収益率は出した実績はほとんどない．したがって，投資戦略は市場ポートフォリオを買えばそれで事足るように考えられる．

3. CAPMとリスク評価

前節の結論では，投資はあまり知恵の出しようのないまったく面白味のない活動に見える．しかし，実際すべての人が市場ポートフォリオを買うとすると，企業の株式発行の意味がなくなりかねない．上記の理論はあくまで均衡市場であり，変動いちじるしい企業活動が常に均衡しているとは考えられない．しかし，長期的には均衡することは間違いない．そこで考えられたのが，CAPM (Capital Asset Pricing Model) と呼ばれる，市場ポートフォリオと各資産の変動の違いをリスクと見る考え方である．シャープ[3]らによって始められ，市場ポートフォリオを買わなくても，それとほぼ同じ変動をする数種類の資産からなるポートフォリオで代替できることが示された．

今，市場ポートフォリオの収益率をR_Mとすると，他の資産 i との変動の相違を表わすパラメータとしてβ_iを次の通り定義する．

$$(8)\quad \beta_i \equiv \frac{\mathrm{Cov}\,(R_M, R_i)}{\mathrm{Var}\,(R_M)}$$

市場ポートフォリオ自身のβ_Mは，1であり，β_iが1より大なる資産は市場以上に収益率が変動し，β_iが1より小なる資産はより小さい変動を示す．この新しいリスク評価値β_iと期待収益率との関係は，次の通り CAPM と呼ばれる式である．

$$(9)\quad E\,(r_i) = r + (E\,(R_M) - r)\,\beta_i$$

(9)式は，2節で市場ポートフォリオを図解で求めた問題の解であり，次のように個人の投資の効用最大化として定式化すれば求められる．詳細は COPELAND [4]等の教科書を参考にされたい．

$$(10)\quad \begin{cases} \underset{W_{jt},W_{j0}}{\mathrm{Max}} & E\,[U_j\,(E\,(R'_j),\ \mathrm{Var}\,(R'_j))] \\ \text{subject to} & W_j = \sum_{t=1}^{n} W_{jt} + W_{j0} \end{cases}$$

ただしU_jは個人 j の効用関数，$R'_j = W'_j/W_j$ のようにすべての添字 j は個人 j を表わす．W_{j0}は個人 j の無危険資産額を表わす．(9)式を求める概略は，個人 j の期待効用最大化条件を求め，すべての個人の和をとると(9)式が求められる．

CAPMを用いると，短期的に高収益が得られると考える資産を数種類からなるポートフォリオを作り，不均衡収益をあげうる可能性をもたせ，それが失敗した場合には長期的均衡で市場ポートフォリオを確保しうるはずである．したがって，基本的には分散でリスクを評価する考え方をとる方法である．

4. 動的投資理論のリスク評価

2節と3節で述べたMPTでは，単純化して言えば，予想される収益はある確率で得られることを主張している．したがって収益率の対数値がほぼ正規分布になり，たとえどんな大きないわゆる σ の信頼区間をとっても元金割をれ起さない確率を1にすることはできない．投資家は，MPTのような収益期待値とその分散で説明しうる最適行動をとっているという仮説が，理論的にも実証的にも近年疑問視されつつある．

実証的には，オプションおよびポートフォリオ・インシュアランスの株式市場を上まわるほどの拡大である．ポートフォリオ・インシュアランスは，危険資産と無危険資産を動的に組み合せて，収益率の確率分布を変化させる投資方法（[5]を参照）でオプションを人工的に作ったものであるので，オプションの期待値と分散を考えれば十分である．オプションの対象となる危険資産S_tの満期Tでの収益率 $R_T = S_T/S_0$が対数正規分布$N\,(\mu T, \sigma^2 T)$にしたがうとしよう．これは伊藤過程 $dS_t/S_0 = \mu dt + \sigma dz$の仮定である．期待値$E(R_T)$および分散 $\mathrm{Var}\,(R_T)$は，正規分布モーメント母関数（[6]を参照）より

$$(11)\quad \begin{cases} E(R_T) = \exp\,(\mu T + \sigma^2 T/2) \\ \mathrm{Var}(R_T) = \exp(2\mu T + 2\sigma^2 T) \\ \qquad\qquad - \exp(2\mu T + \sigma^2 T) \end{cases}$$

となる．一方，満期Tで行使価格KのコールオプションCの期待値$E(C)$は，満期にS_TがK以上のとき$S_T - K$を受けとり，S_t/S_0 が対数正規分布にしたがうから，

$$(12)\quad E(C) = \int_K^\infty (S_0 x - K) \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\log x - \mu T)^2/\sigma^2 T\right] dx$$

である．変数変換をすると(12)式は，

$$(12')\quad E\,(C) = \exp\,(\mu T + \sigma^2 T/2)\; S_0\,N\,(d) - K N\,(d - \sigma\sqrt{T})$$

となる．ただし $d = [\log\,(S_0/K) + (\mu T + \sigma^2 T)]/\sigma\sqrt{T}$,

$N(\cdot)$ は標準正規分布累積密度関数である．このコールオプションの価格 p_c は，ブラック・ショールズ[7]で与えられる．

(13)　$p_c=S_0N(d')-Ke^{-rT}N(d'-\sigma\sqrt{T})$

ただし，$d'=[\log(S_0/K)+(rT+\sigma^2T/2)]/\sigma\sqrt{T}$ 危険資産の収益率 $E(R_t)$ は，無危険資産の収益率 e^{r^T} より大でなければならないから，(11)より

(14)　$\mu+\sigma^2/2>r$

となる．ただし，この節では連続的に考えているので，たとえば無危険資産の収益率は e^{rT} である．(12′) で $x=(\mu+\sigma^2/2)$ とおくと，$E(C)=\phi(x)$，$(x\geqq r)$，ただし $\phi(x)=e^{xT}S_0N(d)-KN(d-\sigma\sqrt{T})$，$d=[\log(S_0/K)+(x+\sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}$ である．$\phi(r)$ を満期から現在価値へ割引くと，p_c に等しくなる．$p_c=e^{-rT}\phi(r)$ したがってオプションの収益率 $E(C/p_c)$ は

(15)　$E(C/p_c)=\phi(\mu+\sigma^2/2)/[e^{-rT}\phi(r)]=e^{rT}\phi(\mu+\sigma^2/2)/\phi(r)$ である．$E(C/p_c)$ を危険資産の収益率 $E(R_T)$ と比較すると，$e^{rT}\phi(\mu+\sigma^2/2)/\phi(r)-e^{(\mu+\sigma 2/2)T}=e^{rT}[\phi(\mu+\sigma^2/2)/\phi(r)-e^{(\mu+\sigma 2/2-r)T}]$ であるから，$[\log\phi(\mu+\sigma^2/2)-\log\phi(r)]$ が $(\mu+\sigma^2/2-r)$ つまり危険資産の期待収益と無危険資産収益率の瞬時の差より大か小かが問題となる．$d\log\partial(x)/\partial x>1$ であれば，$E(C/p_c)>E(R_T)$ が成り立つ．$\log\phi(x)$ を x で微分すると

$$\frac{\partial\log\phi(x)}{\partial x}=\frac{\partial\phi/\partial x}{\phi(x)}=\frac{Te^{xT}S_0N(d)}{e^{xT}S_0N(d)-KN(d-\sigma\sqrt{T})}>1$$

が明らかに成立する．これによって，オプションの期待収益率がその危険資産の期待収益率より大きいことが明らかとなった．一方，分散を求めるためにオプションの2次のモーメントを同様に求めると

(16)　$E(C^2)=S_0^2\exp(2\mu T+2\sigma^2T)N(d+\sigma\sqrt{T})-2S_0K\exp(\mu T+\sigma^2T/2)\times N(d)+K^2N(d-\sigma\sqrt{T})$

となる．平均・標準偏差図で，危険資産とそのオプションの位置関係を明らかにしよう．

オプションが効率的であるためには図3の無危険資産と市場ポートフォリオを結ぶ半直線上になければならない．ところが，その条件(17)は必ずしも成立しない．

(17)　$E(R_T)\sigma(c/p_c)-E(c/p_c)\sigma(R_T)$
$\qquad -e^{rT}(\sigma(c/p_c)-\sigma(R_T))=0$

図3の通りになるのは，$K\geqq S_0$ かつ r が十分小さい場合である[8]．分布が非対称であるオプションは，従来の効率性では判断できない．

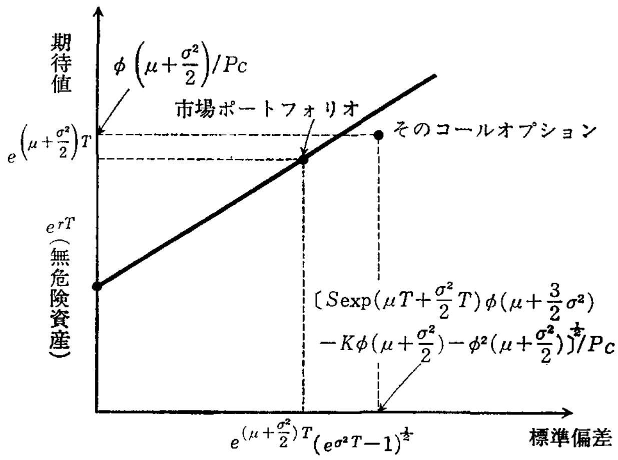

図 3　市場ポートフォリオとそのコールオプションの比較

それでは，なぜ現実に厖大なオプションが取引きされるのであろうか．オプションは元金割れの確率を0にすることが可能であり，人々はこの特質を選好するからだと考えられる．投資はギャンブルと異なり元金割れを嫌うからであろう．

また理論的には，個人の投資と消費の生涯理論からオプション，あるいはそれと同等な CPPI (Constant Proportion Portfolio Insuranceの略で，(全資産－確保したい額の定数倍を変動資産に投資する方法)) が選好されることが，グラニト[9]によって主張されている．ブラック[10]は，生涯効用関数 $U_1(C_1)+U_2(C_2)+\cdots+U_n(C_n)+U_{n+1}(W_{n+1})$ を最大にする投資戦略を求めた．ただし $U_i(c_i)$ は i 期の消費の効用，$U_{n+1}(w_{n+1})$ は遺産の効用とする．その解は，投資関数を $x(w,t)$ とすると，

(17)　$\partial x/\partial w=(r-\partial C/\partial w)x-(wr-C)\partial x/\partial w-\sigma^2x^2\partial^2x/\partial w\partial t$ を満たし，境界条件 $x(w,0)$ は初期投資関数とする．もし消費と初期投資関数がともに，資金 w の線型関数であるなら，(18)の解が得られ，投資は資産に線型比例する．したがって，CPPI が生涯効用を最大にする投資政策であることになる．換言すれば，生涯全体での最適問題を解いた場合には，CPPI あるいはオプションが最適投資戦略となることが指摘されている．

5. おわりに

マーコヴィッツ以来 MPT として発展してきた投資理論は私たちの投資効用最大化行動を，期待収益最大化とリスク＝分散最小化で分析してきた．しかし，近年の Financial Theory は，発展のいちじるしい確率過程理

論を取り込み動学的に投資行動を分析し，その結果として新しい投資対象を創り出してきている．それが，ダイナミック・ヘッジングとも呼ばれる，合成オプションやCPPIである．計算機とそのネットワークの発展により，今後新しい動的投資理論の解析とその実施は確実に社会に浸透していくに違いない．オペレーションズ・リサーチを専門とする私たちには，親近感のある最適化や確率過程論を応用し，世界一の資産保有国であるわが国の資産運用の効率化を進めていかなくてはならないのではないだろうか．

参考文献

[1] Markowitz, Harry M., "Portfolio Selection, Wiley, 1967

[2] Cootner, P. ed, "The Random Character of Stock Market Prices," MIT Press, 1964

[3] Sharpe, W. F., "A Simplified Model for Portfolio Analysis" Management Science, Jan. 1963, pp.277-293

[4] Copeland, T. E, et al, "Financial Theory and Corporate Policy" Addison-Wesley, Reading, Mass., 1979

[5] 浦谷 規，"オプションとポートフォリオ・インシュアランス"，オペレーションズ・リサーチ，1987 Vol. 32, No.12

[6] Parzen, E., "Modern Probability Theory and Its Applications," John Wiley, NY, 1960

[7] Black, F., and Scholes, M. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," J. of Political Economy, 81, 1973

[8] Uratani, T., "Mean-Variance Comparison between Option and the Underlying Asset," Research Report No. 2, Sept., 1988. Univ. of Shizuoka.

[9] Granito, M., R. "The Intellectual Origins of Portfolio Insurance." Luskin ed., Portfolio Insurance, 1987, John Wiley & Sons.

[10] Black, F. "Individual Investment and Consumption Strategies Under Uncertainty." Luskin ed., Portfolio Insurance, 1987, John Wiley & Sons.